تعليم الرياضيات للمرحلة الثانوية

أساليب ووحدات إثرائية

تأليف

Alfred S. Posamentier
Dean, School of Education

Jey Stepelman
Supervisor of Mathematics

ترجمة
حسن مظفر الرزو
مدير مركز بحوث المعلوماتية

راجعه
د. صالح عوض عرم
أستاذ تربويات الرياضيات المشارك



تعليم الرياضيات للمرحلة الثانوية
أساليب ووحدات إثرائية

هذه ترجمة عربية مصرح بها لكتاب

Teaching Secondary Mathematics

Techniques and Enrichment Units

تأليف

Alfred S. Posamentier
Dean, School of Education
Professor of Mathematics Education
The City College
The City University of New York
New York, New York

Jey Stepelman
Supervisor of Mathematics Department
(retired)
Goerge Washingron High School
New York, New York

Sixth Edition
2002



Upper Saddle River, New Jersey
Columbus, Ohio



تعليم الرياضيات للمرحلة الثانوية

أساليب ووحدات إثرائية

تأليف

Alfred S. Posamentier
Dean, School of Education
Professor of Mathematics Education
The City College
The City University of New York
New York, New York

Jey Stepelman
Supervisor of Mathematics
Department (retired)
Goerge Washingron High School
New York, New York

ترجمة

حسن مظفر الرزو
مدير مركز بحوث المعلوماتية
خبير في المكتب العلمي الاستشاري
كلية الحدباء الجامعة – العراق

راجعه

د . صالح عوض عرم
أستاذ تربويات الرياضيات المشارك
جامعة عجمان للعلوم والتكنولوجيا
دولة الإمارات العربية المتحدة

الناشر

دار الكتاب الجامعي

العين

2004 م

الطبعة الأولى

1424هـ - 2004م

دار الكتـــاب الجامعي

عضو اتحاد الناشرين العرب
عضو المجلس العربي للموهوبين والمتفوقين
العين – الإمارات العربية المتحدة

ص.ب. 16983 – هاتف: 7554845-3-00971
فاكس: 7542102-3-00971

E-mail : bookhous@emirates.net.ae

مُقَدِّمَة Preface

هل يعتبر تعليم الرياضيات فناً أم علماً؟.

فإذا كان فناً فإن الأشخاص الذين يمتلكون مواهب فريدة فقط سيكونون مدرّسين ناجحين لمادة الرياضيات. فالفن يعتمد بصورة ملموسة على ملكة الإبداع، ويمكن تعلّم جزء محدود من مفرداته. أما البقية فتبقى مرتهنة ببزوغ إشراقات الحدس أو البداهة.

أما إذا كان تعليم الرياضيات علماً، فإن كل من يمتلك القدرة على تعلّم تدريس الرياضيات (بصرف النظر عن الموهبة) ينبغي أن يكون قادراً على أداء هذه المهمة.

إننا نعتبر تعليم الرياضيات فناً وعلماً في آن واحد، فكل منا بحاجة إلى قدر معلوم من الاستعداد الفطري للتعليم بنجاح.

إن هذا الاستعداد (مع استثناءات محدودة) بحاجة إلى أن يدعم بقدر متنوع من مبادئ اجتماعية، ونفسية، وفلسفية، وقدرة على الحكم على الأشياء بصورة صائبة وسليمة.

لقد وفّرنا (من خلال هذا الكتاب) لمعلم الرياضيات، أو من يأمل أن يكون كذلك في المستقبل، مجموعة كبيرة من الأفكار التي تغطي جميع جوانب الخبرة بهذا الميدان، وأفكار أخرى نعتقد بأنها ستكون مفيدة وتوفر دعماً للجميع. وأمددنا مادة الكتاب (في كثير من الحالات) باقتراحات وإيحاءات عميقة قد اختبرت بمعيار متمرّس ـ رياضي.

من أجل هذا نستطيع (بأي حال من الأحوال) أن نؤهل هذا الكتاب لأن يكون حاوياً على " **كل شيء تريد معرفته عن تعليم الرياضيات ولا تعرف من الذي تسأله عن هذه المهمة**".

يناقش القسم الأول من الكتاب طرائق تعليم الرياضيات، مع الأخذ بنظر الاعتبار جميع السؤوليات على عاتق صاحب هذه المهنة. بدأنا باستعراض لتاريخ تربويات الرياضيات لكي تتوافر لدى مدرّس الرياضيات (في هذه الأيام) فكرة واضحة عن كيفية نشوء وتطور تعليم الرياضيات.

وبعد وصف مبادئ تخطيط مادة الدرس، ناقشنا جوانب التعليم التي تعتمد في التدريس الفعّال. ونظراً لكون الجانب الأكثر أهمية في تدريس الرياضيات يعتمد على قابلية الطالب في حلّ المسائل داخل غرفة التدريس وخارجها، فقد خصصنا فصلاً كاملاً لمناقشة هذا الموضوع.

وقد عالجنا موضوع حلّ المسائل عبر جملة من الطرق تتدرج من الأسس التدريسية إلى جوانب إعادة الابتكار والتحفيز التي تكمن وراءها.

إن العقبة الأساسية تكمن في ظاهرة التغير السريع الذي يعاني منه عالم التقنية المعاصرة. وهناك مشكلتان، الأولى: هي أن هذا الكتاب لن تكون له فرصة محتملة للطباعة قريباً ما لم تكن هناك تغييرات واعدة في التقنية السائدة. في الوقت نفسه، هناك الكثير من المدارس في الولايات المتحدة التي هي أقل حظاً من غيرها، والتي لا تمتلك التقنيات التي تم وصفها في هذا الكتاب، والتي يفترض أن تكون جاهزة للاستخدام من قبل المعلم. لقد حاولنا توجيه القضايا، والمواقف بحيث تغطي متطلبات معظم مدارس هذه الأيام. يتحمل معلمو الرياضيات مسؤوليات ومهام خارج سياقات التدريس المعتادة، وينبغي عليهم أن يركزوا اهتماماتهم بمسألة إثراء عملية تدريس الطلبة الموهوبين والمتميزين، وكذلك الذين يفتقرون إلى هذه المواهب الاستثنائية، كما يجب عليهم أن يوفروا لطلبتهم مناهج لأنشطة إضافية تعمق اهتماماتهم بمادة الرياضيات، وتزيد من وشائج الارتباط بمفرداتها.

أنهينا الجزء الأول من الكتاب بمناقشة المهام المهنية لمعلمي الرياضيات.

وبذلنا جهداً واعياً بعدم إخبار المعلم كيف يتعامل مع جميع المواقف التي تصادفه، وبإزاء ذلك، حاولنا (قدر الإمكان) توفير خيارات متنوعة تتيح للمعلمين إمكانية اتخاذ حكم مهني حول أدائهم التعليمي.

وعليه لا توجد طريقة تعليم تصلح لجميع المعلمين. فالاختلاف والتباين في شخصية المعلمين ينشب عنها اختلاف ملموس في طرائق التدريس، وما يكون صالحاً لمعلم ما، لن يكون صالحاً لمعلم آخر.

يمدّ القسم الثاني من الكتاب معلمي الرياضيات بمجموعة من الوحدات الإثرائية تناسب جميع مناهج التدريس في المدارس الثانوية.

وقد عمدنا إلى عرض أهداف كل وحدة، مع تزويد وسيلة للتقييم الأولي، ثم ألحقناها بوصف متعمق للموضوع بحيث يستطيع القارئ (الذي لا يمتلك معرفة كافية حول الموضوع) تعلم الموضوع بسهولة ويسر.

ثم عدنا فأرفقنا بأسلوب العرض هذا، جملة من الاقتراحات لتدريس هذه المفردة الدراسية لصفوف المدارس الثانوية.

ولتوفير مناخ مناسب لتحديد مستوى تعلم مفردة دراسية محددة (بشكل متمكن) زوّد الكتاب بوسائل تساعد على تقييم لاحق للنشاط التعليمي، يضاف إلى ذلك وجود فهرس ببداية كل قسم لغرض تمكين المعلمين من اختيار وحدات الموضوع الدراسي، ومستوى المرحلة الدراسية.

وقد اعتمدت مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية التي وضعها المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات 2000 (The National Council of Teachers of Mathematics 2000) بوصفها أساساً مرجعياً لجميع الموضوعات التي عولجت خلال الكتاب، ولا تتوفر لدينا معرفة أكيدة حول ما ستؤول إليه خصائص وطبيعة تعلم الرياضيات في المستقبل. وتحدد "المعايير" حالياً صورة أولية عن طبيعة جدول الأعمال المحتملة لهذا الموضوع. إلا أنه بات واضحاً لدينا أن التقدم الملحوظ في التقنيات السائدة خلال عصرنا الراهن، والتي يصاحبها انخفاض ملموس بكلف الحواسيب، والآلات الحاسبة اليدوية سوف يحمل معه تأثيرات ملموسة على تعليم الرياضيات بالمستقبل. بيد أنه لا زالت ثمة سحابة شكوك تلفّ كثير من المناطق في الولايات المتحدة الأمريكية حول طبيعة الاتجاهات المحتملة في تربويات الرياضيات. من أجل هذا حاولنا البحث بحذر عن طريقة مستحدثة لتعليم الرياضيات، ترتكز إلى أفكار وطرائق قابلة للاختبار مع مرور الأيام.

حوى الكتاب بين دفتيه مورداً متكاملاً يستطيع القارئ أن ينهل منه ما يريد حول كيفية تعليم الرياضيات، مع مجموعة من المواد الإثرائية، والتي يمكن تبنيها بسهولة في صفوف المراحل المختلفة، لتعميق الفائدة المرجوّة من تعليم المادة، ولتشجيع الطلبة على دراسة مادة الرياضيات بشغف وحماس.

أعد هذا الكتاب لصنفين من جمهور القراء: المعلمون ما قبل الخدمة في تعليم الرياضيات في المدارس الثانوية، ومعلمو الرياضيات الذين يسعون إلى تحسين مهاراتهم التعليمية، وتعميق مواردهم المعرفية من خلال طريق منهجي محكم.

كذلك سيكون الكتاب مورداً إضافياً لمعلمي الرياضيات الذين يريدون امتلاك مصدراً مفصلاً جاهزاً يشخص أمامهم باستمرار، مما يوفر لهم فرصة مناسبة لمراجعة أدائهم التعليمي، والرجوع إلى القسم الثاني من الكتاب للكشف عن أفكار تزيد برامجهم التدريسية عمقاً وثراءً.

شكر وعرفان Acknowledgement

إن كتاباً يأمل بتحقيق الأهداف آنفة الذكر، لهو بحاجة ماسة إلى موارد من مصادر خبرات واسعة ومتنوعة. ولضمان حسن ملاءمته لمتطلبات جمهور القراء، وكوادر التعليم عمدنا إلى إشراك مجموعة كبيرة من معلمي الرياضيات في المدارس الثانوية بعملية إعداد الوحدات الإثرائية، والتي قمنا بنشرها لدى منشورات (Croft NEI Waterford, Connecticut).

إننا نتقدم ببالغ شكرنا وعرفاننا لجميل كل معلمي الرياضيات:

Renee E. Baxter, Peter Catranides, Beatrice F. Cohen, Stevens Colello, Joyce A. Dato, James DeMetro, Benito Gomez, Adele Hayda, Cynthia Horvath, Howard Kale, Gladys Kornfield, Arlene Kuperberg, Susan Loeb, David Martienz, Robert Parisi, Patricia Pearson, Steven Pottash, Soraida Rivera, Amelia O. Rogers, Howard Sardis, Verna Segara, Max Sharf, Malcolm Singer, Joseph Skittone, Jon Sontz, Daniel Stolnitz, Richard A. Vitulli, Stanely Weinstien, Barbara Winters, Betty York .

ويستحق البروفيسور Evan Maletsky شكراً وامتناناً خاصاً لمشاركته في قسم الوحدات الإثرائية.

كذلك نرغب بشكر البروفيسور Alfred Weiss، والذي كان فيما مضى في كلية المدينة بجامعة مدينة نيويورك والذي ساهم في "المعالجة النفسية لحل المسائل" بالإضافة إلى الجزء الذي يخص "الإبداع في حل المسائل" بالفصل الرابع.

وقد تلقينا مشاركة خبيرة للفصل الخامس بواسطة الدكتور Stephen E. Morseh، الأستاذ المشارك في تربويات الرياضيات في كلية المدينة بجامعة مدينة نيويورك. وقد عرض خبير حل المسائل المشهور Steven Conrad والرائد في النقاشات الرياضية الوطنية والمحلية، ومعلم الرياضيات السابق في مدرسة Roslyn العالية (ولاية نيويورك) جملة من التعليقات المهمة حول الفصل الرابع بموضوع حل المسائل. وشكرنا الخاص أيضاً إلى الدكتور William Farber من كلية المدينة على مساعدته التي لا تقدر في الفصل الأول.

إن القراءة التي يسودها طابع القلق والحرص الشديد لمخطوطة كل طبعة من طبعات الكتاب كانت على يد Jacob Cohen المساعد الأول لمسئول الرياضيات في المدرسة الثانوية لـ Theodore Roosevelt (مدينة نيويورك)، والذي ساهم بتقديم تعليقات عميقة على الدوام، وكذلك بواسطة Arlene Zimney وكيلة المديرة التنفيذية السابقة للمناهج والتدريس بمدرسة مدينة نيويورك العامة.

كذلك نريد شكر الذين ساهموا بمراجعة طبعات الكتاب المختلفة على تعليقاتهم السديدة والحكيمة: Nancy Alexander، جامعة لويزيانا التقنية، Alice Artzt كلية كوينز في كوني، Joanne Rossi Becker ولاية سان جوس، Jay Graening جامعة ماركويتي، Miriam E.Connellan بجامعة أركنساس، Jane Ann McLaughlin متقاعدة، كلية نيوجيرسي، James Mason جامعة مقاطعة كاليفورنيا، San Bernadino, Regina Panasuk جامعة ماستشتيوتس، Lowell, David Pugalle جامعة الولاية لسهل ساجيناو، Frances Stroup جامعة ولاية كارولينا الشمالية، William M. Waters الجامعة الصغيرة لولاية كارولينا الشمالية، Max Sobel كلية الولاية مونتكلير. كذلك نحن ممتنون لمراجعة خبراء تعليم الرياضيات لمادة الكتاب وتقديم مقترحاتهم السديدة. ونثمن المساعدة الفاعلة التي تقدمت بها معلمة الرياضيات والحاسوب بمدرسة برونكس الثانوية للعلوم Deborah J. Stepelman وبالخصوص مساهمتها في إعداد أجزاء من النسخة الأولية للكتاب، وكذلك نخص Barbara Rockhow بقسم الرياضيات بمدرسة برونكس الثانوية للعلوم لمشاركتها معنا بمعرفتها العميقة وخبرتها الرصينة بالمواد اليدوية.

ولا يسعنا إلا أن نثمن الموافقة التي منحنا إياها المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات، والمؤلف Arthur A. Hiatt على تصوير أجزاء كبيرة من " أنشطة للآلة الحاسبة " والتي ظهرت في كتاب Arithmetic Teacher, No.6, (February 1987): 38 – 42.

كذلك نحن ممتنون جداً للمحررتين اللتين عملتا معنا: Linda Montgomery, Mary Irvin على قيامهما بإسداء خدمات إسناد لا تقدر، وإتاحة الفرصة أمامنا للعمل في بيئة خالية من الضغوط والقلق.

بوزامينتير.ألفريد س

جاي ستيف

مقدمة المترجم

عندما عرض عليّ الأخوة الكرام في دار الكتاب الجامعي مشروع ترجمة هذا الكتاب، أرجأت موضوع الموافقة على المشاركة بترجمته حتى أنظر ملياً في تفاصيل محتوياته. وقد تصورته في بادئ الأمر (بعد إلقاء نظرة سريعة على محتويات الكتاب) كتاباً تقليدياً يعالج موضوعات رياضية تختص بمدرسي الرياضيات الذين يمارسون هذه المهمة السامية، وآخرين لما تتوفر لهم بعد فرصة مباشرة مهام عملية تدريس الرياضيات الثانوية.

وبعد أن طويت أوراق رحلتي العلمية إلى جامعة الإمارات العربية المتحدة، وقفلت راجعاً إلى بلدي، انتهزت فرصة وجودي في الباخرة التي تمخر عباب أمواج الخليج المتلاطمة لكي أطالع في كتاب الرياضيات الذي شاطرني الرحلة البحرية إلى العراق!. وكم كانت دهشتي كبيرة عندما بدأت بقراءة عبارات المؤلف، وهو من كبار الخبراء التربويين في العالم بموضوع العلوم الرياضية، وطرائق تدريسها، فوجدتها عبارات دقيقة، وبليغة، تنحو نحو تأصيل أسس تدريس الرياضيات وفق منهجية علمية وتربوية محكمة.

وقد ازدادت وشائج الصلة بيني وبين الكتاب بمرور الأيام، وبزغت أمامي كثير من الأمور التي ينبغي اعتمادها عند قيامنا بإرشاد طلبتنا داخل المؤسسة الجامعية لكي ننشئ جيلاً يقود العملية التربوية لترسيخ العلوم الرياضية في مدارسنا، وجامعاتنا على حد سواء لأنها مادة التقدم العلمي، والأساس المتين الذي ترتكز إليه جميع العلوم الصرفة والتطبيقية.

وأخيراً بدأت بالعمل على قسم الوحدات الإثرائية التي لا أبالغ في تأكيد أهميتها بالنسبة لجميع الاختصاصات، فرغم أننا قد تلقينا في دراساتنا العليا أعلى منهج دراسي مخصص لمادة الرياضيات في القطاعات الهندسية قاطبة، فقد وجدت في الوحدات الإثرائية الكثير من المعلومات القيمة التي سدّت الفضاءات الخالية بمعرفتي الرياضية.

إذن نلخص القول بأن هذا الكتاب فريد في مادته العلمية، وامتداد دائرة معالجاته الموضوعية إلى أكثر من ميدان، بحيث يمكن أن نعده مرجعاً لا يستغني عنه الذي يخطو الخطوة الأولى باتجاه هذا المضمار، والمتخصص الذي يمكن أن ينهل من الخبرة العميقة التي يمتلكها مؤلفه.

ولكي أخفف من وطأة العبارات العلمية الجافة حاولت أن استخدم عبارة سهلة، وبلغة عربية تحاول الموازنة بين جفاف العبارة العلمية الرصينة، وسلاسة العبارة الأدبية التي تجعل النفوس تميل إليها، وتألفها، متجنباً الإسراف في هذا الأمر بحيث تخرج الدلالة عن دائرة ما أراده المؤلف .

وأخيراً أود الإشارة إلى أن قاموس الاصطلاحات العلمية الموحدة الذي أصدرته المنظمة العربية للتربية والثقافة والعلوم، قد شاركني في رحلتي الخصبة عند ترجمة الكتاب، فنهلت من تراجم الاصطلاحات الواردة فيه لكي تكون ترجمتي للكتاب قريبة من ثوابت الترجمة إلى اللغة العربية المعتمدة في جل الأقطار العربية، ولإزالة مواطن الالتباس في الاستخدامات الفنية للاصطلاح الرياضي.

أسأل الله تعالى أن أكون قد قاربت الصواب بعملي على ترجمة هذا الكتاب المهم، وأرجو أن يغفر لي القراء من طلبة جامعات، وأساتذة متخصصين زلاتي التي قلما يخلو منها أي عمل لابن آدم مهما حاول الالتزام بالدقة والموضوعية.

كذلك أشكر الأخت المهندسة سوسن كمال عبدالحميد لما بذلته من مجهود مضني ومتميز في تنسيق وإخراج هذا الكتاب.

المترجم
حسن مظفر الرزو
كلية الحدباء الجامعة – الموصل
العراق

فهرس Contents

8- أنشطة لا منهجية في الرياضيات

وحدات إثرائية لصفوف المدارس الثانوية

قائمة تفصيلية-متقاطعة للوحدات الإثرائية

طرائق تعليم الرياضيات في المرحلة الثانوية

Methods of Teaching Secondary Mathematics



1 تحديات التعليم

The Challenge Of Teaching

كثرت المطالب، والتحديات، والمسؤوليات الملقاة على عاتق معلمي الرياضيات بالمدارس الثانوية، في وقتنا الحاضر، وتعددت أشكالها. ولم تعد قائمة المهارات التي تتطلبها مهنة معلم الرياضيات مقتصرة على تفاصيل مفردات اختصاصه، بل اصبح من الضروري الاستجابة إلى جملة الاحتياجات التي تتطلبها الخصائص دائمة التغيير للمجتمع التقني المعاصر.

إن تعليم الرياضيات الثانوية، هي فعالية علمية تتداخل مع عنصر الثقافة بما يضمن تحقيق تقدم وتتطور ملموس في البيئة التعليمية بالشكل الذي يحقق احتياجات المجتمع. ومن ثم فإن نمو التقانة، وبالخصوص التأثيرات العميقة التي حملتها تطبيقات الحاسوب، تصاحبها تطورات الحاصلة في كل من الرياضيات البحتة والتطبيقية ستساهم في زيادة في مساحة المعرفة الرياضية وعمق جذورها بوصفها علما مستقلا بذاته. لقد نجم عن البيئة المجتمعية المعاصرة جملة من التأثيرات التي ساهمت في تغيير خصائص أساليب تعليم الرياضيات المدرسية، واصبح من الواجب على هذه التأثيرات أن تنعكس إلى قدرات إضافية تمنح للطلبة وتهيئتهم للمشاركة في فعاليات عالم الغد وأنشطته المختلفة.

في ضوء هذه الرؤية الجديدة والأهداف التي تتوخاها بوثيقة المجلس الوطني معلمي الرياضيات "المبادئ والمعايير الخاصة بالرياضيات المدرسية"، ينبغي أن تتوافر لجميع الطلبة فرصة تعلم، وإدراك، وتطبيق المبادئ، والأسس، والمهارات داخل المؤسسة التعليمية وخارجها. فضلا عن ذلك فإن الوثيقة تدعم الأطر – الدراسية الرياضية التي ترتكز إلى توظيف وتشجيع بيئة تعلم فعالة، حيث تتوفر للطلبة فرصة تطوير ملكتهم الذاتية في ميدان التفكير الرياضي، وتعميق القدرات الرياضية – المنطقية.

طلبة اليوم، الرياضيات، واحتياجات المجتمع
Today's Student, Mathematics & Society Need

ينبغي لطلبة المدارس، في هذه الأيام، التهيؤ للعيش في مجتمع بحاجة إلى فهم عميق واهتمام بالغ بالعلوم الرياضية. إن من الصعوبة بمكان، وإن لم يكن مستحيلا. إدارة الواقع الذي يحيط بنا بدون حد قبول من معرفة، ومهارات، وتطبيقات رياضية. فلم يعد كافيا إتقان عملية احتساب مفردات قائمة التسوق. أو التأكد من موازنة الحساب الصرفي، حيث بزغت الحاجة الملحة لدى المجتمع إلى المزيد من طلبة الرياضيات الثانوية، الذين يمتلكون القدرة على تطبيق مهارتهم الرياضية لحل المشكلات التي تبح بها الأرض الواقع التي يعيشون عليها.

فعلى سبيل المثال، يمكن إقامة ارتباط بين مبادئ الاحتمالات والإحصاء مع الواقع العلمي، الذي يتطلب من الأشخاص جمع، وتسجيل، وتفسير وتحليل، والاتصال لعرض مجاميع البيانات التي تتطلبها عملية صنع القرار الذي يدير دفة حياتهم اليومية. أن تفسير دلالة الرسم البياني بوصفها جزأ من متطلبات التشخيص الطبي، يمتلك تأثيرا ملموسا على اتخاذ القرار الطبي الذي يرتبط بصحة الإنسان ووجوده.

كذلك فإن المبادئ الأساسية لعملية العد والجبر تساعد على تيسير اتخاذ القرارات المالية الشخصية على ارض صلبة وواقعية. إنما استخدام التصميم الرياضي فيمد تقنيات الحاسوب بقاعدة علمية رصينة، تتضمن استمرار أنشطة البحث والتطوير بميدان عتاد الحاسوب Computer Hardware وبرمجياته Software والتطورات المستقبلية في دائرة شبكة الانترنيت وخدمات الاتصال.

أصبحت المهن والمناصب السائدة بميدان تقنيات الحاسوب والأعمال، والعلوم والهندسة تتطلب معرفة رياضية أكثر عمقا وشمولا مما كانت تطلبه بالماضي. وفي ضوء ما قاله السناتور John Glenn، رائد الفضاء السابق، فإن الرياضيات والعلوم بتوفر المعرفة العلمية التي ستكون يحتاجها الجيل الجديد من المخترعين، والمنتجين، والعاملين، في كل بلدان الأرض، إذا أرادوا حل الإشكاليات غير المنظورة، ورواية الأحلام التي ستحدد مستقبل الولايات المتحدة الأمريكية(*).

(*) Before It's too late: A Report to the nation on mathematics and since teaching for the 21st Century (US department of Education, 2000, page 4).

الأزمة في تربويات الرياضيات
Crisis In Math Education

طلبة اليوم (TIMSS) Today's Students (TIMSS)

يسود إجماع وطني على أن طرائق تعليم الرياضيات، في هذه الأيام، عقيمة وغير ذات كفاءة في إيصال المعلومات إلى الطلبة. وقد القي الضوء على هذه الطرائق التقليدية بواسطة النتائج التي استحصلت من التقييم الوطني للتطور التربوي National Assessment of Education of progress (NAEP) والدراسة العالمية – الثالثة للرياضيات والعلوم Third International Mathematics Science Study (TIMSS) اظهر هذان التقييمان للمناهج الرياضية التقليدية التي اقترحت بالولايات المتحدة وجود عدد كبير من طلبة المدارس العليا الذين لا يمتلكون القدرة على إجراء عمليات حسابية بسيطة، وبالتالي لا يستطيعون التنافس على المستوى العالمي في هذا المضمار الحيوي. وأكد هذان التقريران وجود عجز ملحوظ في تعليم وتعلم الرياضيات بالولايات المتحدة، ونبه على انعكاس تأثيراته السلبية على مستقبل بلدنا.

ولغرض مواجهة هذا العجز، ينبغي تبني تغييرات منظمة ذات تأثير ملموس على كل من عمليتي تعليم وتعلم الرياضيات، على أن تكون هذه التغيرات شاملة وتركز على كيفيات تطوير القدرة الرياضية لدى الطلبة والمعلمين.

إن جعل الرياضيات ذات معنى وتمتلك دوراً تطبيقياً– بالنسبة للطلبة– يستلزم إعادة تأسيس جميع الجوانب الخاصة: بتدريس الرياضيات، ومواد المناهج، والبيئة التعلمية، ومهام المعلمين، وطرائق تقييم الفهم الرياضي للطلبة.

افتقار الطلبة إلى الأسس الرياضية

يلاحظ وجود مشكلة متنامية تتعلق بتدني مستويات الإنجازات الرياضية لدى الطلبة الأمريكيين. ووفقا للتقرير الصادر عن لجنة التقييم الوطني للتطور التربوي (NAEP) والذي عمد إلى مراقبة نتائج الاختبارات التي أجريت على حوالي 150 ألف طالب تتراوح أعمارهم بين 9، 13، و17، فإن نصف الذين وصلت أعمارهم إلى 17 عاما فقط كانوا قادرين على حل المسائل الرياضية بنجاح حسب مستوى المدرسة المتوسطة. فضلا عن ذلك فإن التقرير الذي اعد بواسطة خدمات الاختبار التربوي Educational Testing Services (ETS, 1986) وبعنوان ((بطاقة تقرير الرياضيات)) اظهر أن حوالي 1.5 مليونا من الطلبة المبتدئين والمتقدمين في المدارس الوطنية العليا كانوا غير قادرين افتراضياً على إجراء العمليات الرياضية البسيطة،

ويفتقرون إلى المهارات الأساسية التي تتطلبها الحياة اليومية، لكثير من الوظائف المعاصرة، ومتطلبات الكفاءة الوظيفية، والتجارة، وشغل المواقع الوظيفية، والمهن.

برز تباين كبير في الرياضيات التي يتلقاها الطلبة بالمدارس على عموم رقعة الولايات المتحدة، وأظهرت المقارنات العالمية بأن مستويات الإنجاز الرياضي للطلبة الأمريكيين تقع (بصورة ملموسة) خلف البلدان التي تنافسنا بالميزان الاقتصادي.

يضاف إلى ذلك وجود فجوة إنجازية واسعة بين الطلبة من مختلف الثقافات والمستويات الاجتماعية – الاقتصادية المتباينة للمجتمع. (Third International Mathematics & Science Study, 1999). ووفقاً لمؤشر تقرير (TIMSS) – والذي عني بدراسة ومقارنة الإنجازات الرياضية لطلبة الصف الثامن في ثلاثة عشر ولاية أمريكية فيما بينها، وثمانية وثلاثين بلدا اشتركت بهذه الدراسة الدولية– فإن الطلبة الذين يقصدون المدارس في القاطعات الداخلية للمدن من الأسر التي تمتاز بدخلها المحدود، والأقليات، استطاعوا الحصول على مواد وموارد رياضية أكثر من الطلبة في المقاطعات غير المدينية Non-Urban. ويظهر هذا الاختلاف أن الطلبة غير المستفيدين لم يتول تعليمهم معلمو رياضيات مهرة ومؤهلون، وان محتوى الرياضيات التي تم تدريسها كانت – بصورة عامة– دون المستويات القياسية. كذلك فإن أبنية المدارس كانت غير ملائمة وتفتقر إلى البيئة التربوية التي تثمر (بصورة عامة) عن إنجازات إيجابية ملموسة. وبالإضافة إلى ذلك، فإن هؤلاء الطلبة شاركوا بشكل ضئيل في البرامج التي وضعت للطلبة الموهوبين، وأخذوا، بشكل ملموس عدداً أقل من المساقات الرياضية المميزة مما أخذها طلبة الصفوف المتوسطة.

تؤدي هذه العوامل إلى زيادة غيابات الطلبة، والتي ينجم عنها افتقار الطلبة إلى إمكانية تحقيق إنجازات إيجابية. وتتفاقم الأزمة نتيجة للشحة المتزايدة بالمعلمين المؤهلين لتدريس الرياضيات ووجود نقصان ملحوظ بالموارد الخاصة والفيدرالية المطلوبة لدعم الأنشطة الأكاديمية – المنهجية الإضافية، والبرامج التربوية المساعدة للأقليات، والبرامج التي تدعم مشاركة أولياء الأمور.

إن نتائج المسوحات التي قام بها المركز الوطني للإحصائيات National Center For Educational Statistics (NCES)، والمركز الوطني لتقييم التقدم التربوي، أظهرت وجود بعض التقدم لدى طلبة الولايات المتحدة. وان مجموع النقاط لطلبة الولايات المتحدة بدرجات الصفين الرابع والثامن أظهرت تقدما مستمرا خلال السنين العشر الماضية، أما مجموع النقاط للصف الثاني عشر كانت في عام 2000 أكثر مما هي عليه عام 1990، بالرغم من زيادة الفجوة بين الطلبة البيض والملونين، والأسبان والبرتغال Hispanic حيث بقيت دون تغيير منذ عام 1990 (NCES, 2000).

تمييز خصائص المدارس ذات الإنجاز المنخفض والمرتفع
Distinguish Characteristics of High & Low Achieving Schools

هناك جملة من الأسباب التي تكمن وراءها الإنجازات المرتفعة أو المنخفضة للمدارس المختلفة. فهل أن دائرة هذه الأسباب تعود إلى افتقار الطلبة إلى القدرة؟ أم إلى افتقار المعلمين إلى المحتوى المعرفي أو المهارات التعليمية المؤثرة؟ أم أنها نتيجة لأخطاء أولياء الأمور وطبيعة بيئة المنزل؟

يظهر في الجدول الآتي، والمستخلص من تقرير TIMSS، وصف لمجموعة من المتغيرات المعتمدة Dependent Variables والتي تصلح كمؤشرات أو خصائص للمدارس ذات الإنجاز المرتفع أو المنخفض.

استعرضت نشرة المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM News Bulletin, Volume 37, Issue 9, May/ June 2001) مؤشرات دراسة TIMSS لمقارنة ومقابلة مستويات الإنجاز لعدة مدارس، ومدارس المقاطعات، لاستكشاف مجموع نقاط الإنجازات المتحققة لأفضل مدارس الولايات المتحدة.

وفرت هذه التحريات مؤشرات إيجابية قد ينجم عن تكاتفها وتكاملها حصول تحسن ملحوظ لإنجازات طلبة الولايات بميدان الرياضيات.

أكدت –كذلك– نتائج دراسة TIMSS بأن إنجاز الطالب ترتبط بشدة بمهارة معلم الرياضيات، ونوعية تعليم الرياضيات. بالرغم من أن عددا لا بأس به من طلبة الصف الثامن (في الولايات المتحدة) يتولى تعليمهم معلمون يمتلكون شهادات علمية في التربية أو اختصاصات أخرى – غير رياضية–.

وهذا يعني بأنه ينبغي أن يمتلك معلمو مادة الرياضيات إجازة في الرياضيات أو في تربويات الرياضيات. أن تحسين نوعية تعليم الرياضيات في المدارس الثانوية الأمريكية سيستمر بوصفه تحديا أساسيا لتقديم المزيد من التغيير المنظم بتعليم الرياضيات. إن زيادة ميزان دفوعات المعلمين، وتعديلات متطلبات منح الشهادات، وصقل برامج التدريب ما قبل – الخدمة وفي أثناء الخدمة، والتطوير المهني تعد العوامل الأكثر أهمية للارتقاء بإصلاح إعداد معلم الرياضيات.

تمييز خصائص المدارس ذات الإنجاز المرتفع و المنخفض

خلفية المنزل	تتألف هذه الفئة من متغيرات دالة على الموارد المادية ومعرفة القراءة والكتابة، في المنزل. وتحوي هذه الفئة على خمسة متغيرات هي: ▪ عدد الكتب الموجودة في المنزل. ▪ وجود مصادر تساعد على الدراسة (قاموس، منضدة دراسة، حاسوب) ▪ ممتلكات المنزل. ▪ مستوى المشاركة التربوية للأبوين. ▪ عدد ساعات العمل بالمنزل.
ارتباط المنزل بالمدرسة	تتضمن المتغيرات التي تتأثر بعوامل كل من المنزل والمدرسة، مثل طموحات الطالب وضغوط الابوين والأقران للإنجاز.
حجم المدرسة وموقعها	تؤثر هذه المتغيرات على مستوى المدرسة، وتتضمن درجة الصفة المدنية Urbanicity للمدرسة وحجم المدرسة، والصفوف.
المناخ الاجتماعي للمدرسة	يتألف المناخ الاجتماعي للمدرسة من العوامل التي تفضي إلى بيئة تعلمية، آمنة، ومنظمة، ومثمرة. ويتضمن، أيضا، مشاكل انضباط المدرسة، والتي تشمل المشاكل الإدارية كانتهاك رمز الرداء المدرسي، وأكثر الانحرافات السلوكية خطورة.
موقف الطلبة تجاه العلوم أو الرياضيات	*تتألف هذه الفئة من عوامل مواقف الطلبة، والتي تشمل المواقف إزاء العلوم والرياضيات، والاعتقاد* بفاعلية العلوم ونجاعتها.
الأنشطة التدريسية في حصة العلوم أو الرياضيات	وتتضمن المتغيرات إلى تصف مظاهر غرفة التدريس، مثل تواتر التجارب في العلوم، ومعدل تكرار تفحص المعلم للواجب البيتي في الرياضيات.

شحـــة المعلمين The Teacher Shortage

تعاني النظم المدرسية في الولايات المتحدة من عجز كبير في معلمي المدارس الثانوية، وبالخصوص في ميداني الرياضيات والعلوم.

إن دنو الكثير من الكوادر التدريسية إلى سن التقاعد، والتقليص الرسمي لحجم الصفوف، والأعداد المفرطة للمهاجرين، وأولاد العائلات التي يكثر عدد أطفالها Baby Boomers، قد أورثت المدارس الأمريكية حاجة ماسة إلى عدد كبير من المدرسين الجدد خلال العقد القادم. لغرض تعميق فهمنا بأبعاد هذا المأزق، ينبغي الأخذ بعين الاعتبار الأسباب التاريخية والسياسية التي تكمن وراء معاناة القطاع المدرسي لهذا الشعب من شحة المدرسين. خلال الكساد الاقتصادي لعقد الثلاثينيات، اجتذب العلماء المتميزون إلى مهنة التعليم إضافة إلى كونها إحدى المهن القليلة التي فتحت أبوابها للإناث والأقليات قبل صدور قانون الحقوق المدنية لعام 1964.

إن هذا الموجات المبكرة من المهنيين التي غزت نظم المدارس خلال بدايات الستينات لحين بزوغ أزمة وطنية جديدة، هي حرب فيتنام، نجم عنها أيضا توجه كوادر متقدمة إلى مهنة التعليم بمدارس المتطوعين staff – to – hand وفي مجالات حساسة مثل الرياضيات والعلوم.

ازدادت مهنة عمل العنصر النسائي في غضون عام 1968، بصورة ملحوظة، مع تزويدهم بخيارات تطويرهم باتجاه مهنة التعليم، والتي أضحت خيارهم المهني بعد حين. وكذلك الحال بالنسبة للأقليات التي عمدت إلى اختيار التعليم مهنة لها، والتي استقطبت بشكل نشط إلى قطاع التجارة والأعمال.

إن من الواضح إن شحة المعلمين أصبحت في هذه الأيام، أزمة كبيرة، بوصفها نتيجة لعدم قدرة مهنة التعليم على التنافس المتوازن مع جذب القطاع الخاص ببريقه الأخاذ.

وفي الواقع، تتراوح الحاجة إلى المعلمين خلال العقد القادم بين 2-2.5 مليون (بمعدل يزيد على 200.000 معلم سنويا) وفق ما ورد بالدراسة التي أعدتها الوكالة الوطنية للتعليم ومستقبل أمريكا National Commission on Teaching and Ameica's Future (NCTAF). إن حوالي نصف هذا العدد من المعلمين سيكونون أفرادا تم إعدادهم لهذه المهنة، بينما ستأتي البقية من مرتجعات الذخيرة الطارئة من المعلمين، بالمقابل فأنه لا توجد أمارة على إمكانية عودة الذين تركوا هذه المهنة إلى العمل ثانية بهذا الميدان. وفي معظم الحالات فإن هؤلاء الأفراد يرون بأن أجورهم الحالية، وبيئة العمل، وفرص التطور هي أكثر قبولا مقارنة مع أقرانهم الذين مكثوا في دائرة مهنة التعليم.

لجأت جملة من مدارس المقاطعات (في محاولة لإيجاد حل ناجع للحاجة المتزايدة) بإشغال مناصب التعليم بواسطة معلمين لا يمتلكون تأهيلاً أو ترخيصا، أو يقومون بتعليم مفردات دراسية خارج حقل اختصاصهم. وقد ازداد بشكل ملحوظ – عدد الشهادات المؤقتة والتراخيص الصادرة إلى معلمين غير مرخصين أو مخولين للتعليم في الصفوف خلال السنين الأخيرة، وفي الوقت نفسه فإن حاجة الطلبة إلى مستويات متقدمة من مساقاته الرياضيات في المدارس الثانوية بدأت بازدياد بشكل ملحوظ.

إن شحة المعلمين هي أكثر حدة في المناطق المدينية من البلاد حيث يزداد عدد الطلبة، وهناك حاجة كبيرة لمعلمين وكوادر متخصصة لكي يشغلوا الفراغ الذي تشكو منه عدد كبير من المدارس. يضاف إلى ذلك أعراض كثير من المعلمين عن التدريس في المدارس المدينية نتيجة لتعقد المشاكل الاجتماعية والتعليمية الموجودة فيها.من أجل هذا تعاني قطاعات المدارس (بعموم الولايات المتحدة) من مشاكل وعقبات كبيرة إزاء توفير مناخ مناسب لاجتذاب المتخصصين بالرياضيات إلى مناصب وظيفية بأجور متدنية في أسواق العمل التي تديرها أنشطة التنافس والتقنيات السائدة بالعصر الراهن.

الحلول المحتملة لمشكلة شحة المعلم
Possible Solutions to The Teacher Shortage Problem

بالرغم من عدم توفر حلول شاملة وموضوعية لمسألة شحة المعلم فإن هناك جملة من البرامج المطروحة والاستراتيجيات التي يمكن اعتمادها للتغلب على هذه المشكلة أو احتوائها.

إن الاستراتيجيات والبرامج المدرجة فيما يأتي على رغم كونها مؤقتة ومرحلية إلا أنها يمكن أن تؤدي إلى الوصول لحلول للمشكلة يطول منالها.

- توظيف معلمين أجانب لملء الشواغر الحاصلة لحين إيجاد البدائل الدائمة، فعلى سبيل المثال إن برنامج معلمي العلوم والرياضيات النمساوي والذي بدأ العمل به في كلية المدينة بجامعة المدينة في نيويورك، والذي هو الآن في سنته الرابعة، ويشمل المعلمين الذين يرغبون بالبقاء لفترة أطول تزيد على سنتين أو ثلاث سنوات وقد تم نقل هذا الأسلوب في جملة من المدن الأمريكية وبلدان كثيرة أخرى لتجاوز الشحة الحاصلة في الملاكات الرياضية.
- تقديم مشروع مثل برنامج زمالات التعليم لمدينة نيويورك New York City Teaching Fellows Program، الذي ربما يسد أكثر الاحتياجات حدة في تعليم الرياضيات. مثال ذلك أن نتائج التحري الميداني لحوالي 1200 متقدم للوظيفة (تم قبولها ضمن هذا البرنامج خلال السنتين الماضيتين) يمكن استخدامها لتحديد أي من هؤلاء المرشحين يمتلك بعض الاهتمام، أو الميل، أو الخبرة في الرياضيات. إن متابعة اختبار الكفاءة سيوفر مناخا مناسبا لاختيار معلمي الرياضيات المحتملين للمدارس المتوسطة. يمكن أن يعطى هؤلاء المرشحون سلسلة من المساقات الدراسية في مادة الرياضيات لاستكمال خلفيتهم العلمية وأحكام بناء مقومات المعرفة التي تكمن وراء مفاهيم الرياضيات لمناهج تدريس المدارس المتوسطة. إن ربط البرنامج مع الأصول المناسبة لعلم التدريس Pedagogy، وطرائق تدريس الرياضيات سينتج عنه تحويل الزمالات إلى معلمي رياضيات متدربين تدريبا جيدا.
- تقديم حوافز مجزية للمعلمين المؤهلين والذين يمتلكون القدرة على تعليم محتوى المجالات المتخصصة.
- تقديم مرتبات وظروف عمل تنافسية، وتعيين أشخاص مؤهلين من قطاع الصناعة. فعلى سبيل المثال، يعين برنامج تدريب معلمي الرياضيات – المتوسط Mid - Carceer Mathmematics Teacher Training Program في كلية المدينة في جامعة مدينة نيويورك، ويختار المرشحون من قطاع الهندسة والأعمال ممن يمتلكون خلفية رياضية رصينة، ويرغبون بالدخول إلى ميدان مهنة التعليم. وباشر برنامجا تدريبيا لتأهيلهم ليصبحوا معلمين فاعلين خلال مرحلة الحصول على درجة الماجستير Masters'Degree.
- إتاحة الفرصة لبعض المعلمين المتقاعدين الأكفاء لجني مبالغ ضريبية إضافة على مواطن سكناهم لتعليمهم الجزئي (مثال، 3/5 برنامج)، وتوفير حوافز للمعلمين المؤهلين في موضوعات مهمة لإبقائهم في التعليم في الأماكن الأكثر حاجة.
- إقامة برنامج توظيفي مشدد مع توفير حوافز مناسبة مثل علاوات السكن، وتعويض مبالغ كلف الانتقال، وتقدير ومكافأة الأداء الأمثل في تخصصات الكلية الرئيسية في نطاق الحاجة (مثل الرياضيات/العلوم).
- إنشاء برنامج جديد لنصح المعلم يتم من خلاله تقديم العون للمعلمين خلال سني العمل الأولى وتذليل العقبات التي تحيط بعملية التعليم.
- إعداد نشرة لمهنة المستقبل Career Bulletin Board على

شبكة الإنترنت لضمان ملائمة حصول المعلمين على العمل المناسب.

- تخويل النظم المدرسية للإعلان عن الوظائف المطلوبة في فترة مبكرة من السنة الدراسية للسنة المقبلة. بينما يلاحظ أن معظم القاطعات تنتظر لحين نهاية فصل الربيع أو الصيف لتعيين المعلمين.

الأهداف والتحديات لمعلمي الرياضيات الثانوية هذه الأيام
Goals and Challenges For Secondary Math Teachers Today

جعل الرياضيات سهلة المنال
Making Math Accessible

وفقا المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات فإن العدالة لمادة التربوية هو العنصر الجوهري لهدف رؤية مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية (NCTM, 2000). بالرغم من كون الخيط العام هي الرياضيات، فإن من الواجب على مجتمعنا أن يعي ويكون أكثر حساسية عند معالجة موضوع العدالة الخاص بتعليم الرياضيات.

إن مناهج الرياضيات ينبغي أن تعكس حقيقة عدم تساوي قدرات الطلبة ومواهبهم، لأنهم يتعلمون ويتمثلون المعرفة بطرق متعددة، ويملكون أنماط تعلم متباينة. وقد تم إنشاء عدد كبير من البرامج النموذجية التي تجسد معايير NCTM، وتكييفها، وتعديلها، تمهيدا لتطبيقها في الصفوف الدراسية بعموم الولايات المتحدة.

وبالرغم من الأهمية التي تمتاز بها هذه التغييرات، فليس هناك ضمانات بأن أيا من هذه نماذج من المناهج الدراسية ستكون شاملة، أو مدعومة، أو متكاملة بعلاقتها مع مدخل منصف لجميع الطلبة.

وبالرغم من التعديلات الجارية على مناهج الرياضيات لتغطية النطاق الشامل للمحتوى والطرائق الرياضية فإنها ليست كافية، ويبقى الطلبة – هذه الأيام – بعيدين عن المشاركة المتساوية في العملية التعليمية.

لقد أظهرت وثائق البحوث أن الطلبة لا يتلقون قدرا كافيا من انتباه المدرس واهتمامه، ولا يميلون إلى استعراض المواد التي يدرسونها والتي تعد وثيقة الصلة وظيفيا بحياتهم اليومية، كما انهم لا يتوقعون أو يشجعون على مواصلة رياضيات ذات مستوى أعلى (مجلس التطوير والبحث التربوي، 1990).

من أجل هذا ينبغي تشجيع جميع الطلبة على إدراك أن الرياضيات والعلوم حيويان وأن هناك صلة بينها وبين مفردات الحياة اليومية، بالرغم من التعارض الداخلي والخارجي، والضغوط التي قد تؤدي إلى تثبيط همم الطلبة عن الاستمرار في دراسة الرياضيات. إن المعاني الكامنة وراء هذا الأمر، تبدو واضحة، وأن الطرق التي تدرّس بها الرياضيات يجب أن تتغير. وتبرز مسألة مسؤولية المعلم بوصفها عنصرا جوهريا لتمهيد التغييرات المنظمة بالطريقة التي تكون فيها عملية التدريس مرتبطة بالطلبة. فإذا كان تعليم الرياضيات وتعلمها يهدف إلى جذب الطلبة، فإن المعلمين بحاجة إلى خلق بيئة صفية تشجع التطور الرياضي لجميع الطلبة قاطبة.

العدالة Equity

إن مبدأ العدالة في تربويات الرياضيات (NCTM, 2000) يدعم الاعتقاد بأن جميع الطلبة قادرون على تعلم مادة الرياضيات. فضلا عن ذلك، فإن هذا المبدأ يتطلب توقعات كبيرة لجميع متعلمي هذه المادة.

وفي أحوال كثيرة، يميل المعلمون والمدراء إلى أدنى التوقعات للطلبة الذين يعيشون في فقر، والطلبة الذين يصنفون بوصفهم متعلمين للغة الإنكليزية (اللغة الإنكليزية كلغة ثانوية)، والطلبة ذوي الاحتياجات الخاصة، والطالبات، وطلبة الأقليات. وبأي حال من الأحوال، فإن التوقعات تزداد وتنمو لصالح هؤلاء الطلبة لتعزيز العدالة الرياضية، وتعد توقعات المعلمين العامل الوحيد والأكثر أهمية بمضمار إنجازات الطلبة، ولذا فإنها بحاجة إلى عناية خاصة ومتأنية.

ينبغي أن تبلغ التوقعات المرتفعة لجميع الطلبة بواسطة المعلمين شفويا ومدونة، خلال الفصل الدراسي الذي يمتد على طول السنة الأكاديمية. ويستطيع المعلمون تبليغ هذه التوقعات خلال التفاعل والتدريس داخل غرف الدرس، وترجمتها ميدانيا عن طريق التعليقات، والملاحظات، ومشاهدة تقارير واختبارات وامتحانات الطلبة، عندما يتم تعيين مجاميع التعلم التعاوني للطلبة، وعندما يقام حوار مباشر مع الطالب، وعند تفاعلهم مع البالغين في دائرة حياة الطالب.

يمكن أن تحقق التوقعات المرتفعة – جزئيا – من خلال البرامج التربوية التي تحفز الطلبة وتشجعهم على تقدير أهمية وفائدة التعلم الرياضي الداعم لتوقعاتهم وفرصهم.

إن التوقعات المرتفعة ضرورية بيد أنها ليست كافية لتحقيق الأهداف للبيئة المدرسية التي أحكمت حدودها والتي تدعم وتشجع العدالة بين جميع الطلبة في تربويات الرياضيات. ينبغي على كل طالب أن يعايش برنامجاً أو منهجاً تفصيلياً

للرياضيات يوفر له مناخا مناسبا لإشباع فضوله، واهتماماته، وتعلمه لهذه المادة، شريطة أن يدعم هذا البرنامج الخبرة التربوية السابقة، والمتانة الأكاديمية، والاهتمامات الحياتية.

يحتاج بعض الطلبة دعما إضافيا لكي يحققوا التوقعات المرتفعة في الرياضيات، فمثلا الطلبة الذين يصنفون كمتعلمين للغة الإنكليزية (ESL) قد يحتاجون إلى مساعدة إضافية لكي يتحقق الهدف الخاص بالمعرفة الرياضية. وقد يحتاج بعض هؤلاء الطلبة إلى نسخة مترجمة من أدوات التقييم لكي يستطيعوا تكييفها مع حاجاتهم، فمثلا، إذا كان يتم درجة معرفتهم الرياضية بالإنكليزية فقط، فلا يمكن تقييم قدراتهم وخبراتهم الرياضية بصورة دقيقة.

بعض الطلبة ذوي القدرات المتواضعة قد يجعلهم بحاجة إلى مزيد من الوقت لإكمال واجباتهم المدرسية، أو يكونوا بحاجة إلى المزيد من وسائل الإيضاح المرئية المثيرة مثل الرسوم البيانية، أو النشرات، أو عروضا تصميميه باستخدام جهاز الإسقاط العلوي Overhead projector وهؤلاء الطلبة بحاجة إلى طرائق تعليمية -- سمعية – أكثر من حاجتهم إلى مادة مكتوبة أثناء تعلمهم. وتظهر الحاجة إلى موارد إضافية وتكميلية لدعم هؤلاء الطلبة، مثل برامج لمناهج دراسية إضافية، والمزيد من التناصح والتدريب الجماعي، أو تدريب مدرسي إضافي، كذلك فإن الطلبة المتميزين والموهوبين بمادة الرياضيات قد يحتاجون إلى برامج إثرائية أو موارد إضافية تحثهم وتشغلهم.

فمثلا، يوفر نادي الرياضيات لهؤلاء الطلبة وغيرهم من الشرائح الطلابية فرصة مناسبة لاستكشاف المواضيع الرياضية التي لا تناقش داخل الصف الدراسي في الحالات الاعتيادية.

يمكن تحقيق العدالة بالرياضيات، أيضاً، من خلال التوظيف المؤثر للتقنية، فتوفر الآلات الحاسبة والحواسيب لجميع الطلبة فرصة لتحري حشد كبير من المسائل والمواقف الرياضية. يضاف إلى ذلك أن البرامج التدريبية – الحاسوبية يمكن أن تصمم لمساعدة الطلبة على صقل وترصين مهاراتهم وتعميق التدريس الرياضي.

يعد التعلم الحاسوبي التكيف Computer Adaptive Learning كمعدات الاتصال المتخصصة (AAC) من الأدوات ذات الكفاءة في الارتقاء بقابليات الطلبة الذين يعانون من اعتلال بالنطق واللغة. وتساعد معدات الإصغاء المساعدة Assistive Listening Devices (ALD) الطلبة الذين يعانون من ضعف شديد بالسمع، كذلك فإن تكبير مساحة مرقاب (شاشة) الحاسوب، وخدمات الفيديو الوصفية، وقارئات المرقاب ستساعد الطلبة الذين يعانون من ضعف بحاسة الإبصار. وان برمجيات التمييز/ الإنتاج الصوتي ستوفر للمعلمين القدرة على الارتقاء بالتفكير الرياضي للطلبة، حيث بدونها لا يمكن لهم المشاركة بأفكارهم بالطريقة التقليدية في البيئة الرياضية.

تفيد التقنية بشد اهتمام الطلبة الذين لا تثير طرائق التعليم/ التعلم التقليدية فيهم حافزا على تعميق فهمهم الرياضي، من أجل هذا ينبغي أن تكون سهلة المنال لجميع الطلبة، على أن يوفر المعلمون لطلبتهم فرصا لاستكشاف، وتحري، واكتشاف الأفكار الرياضية المهمة والمشوقة من خلال البيئة التي توفرها التقنية.

القلق الرياضي Math Anxiety

يعاني كثير من الناس في مجتمعنا ذي التقنيات العالية من شعور مقلق، وخوف، عندما يجابه مادة الرياضيات، وسواء عمدنا إلى تصنيف هذه الظاهرة بوصفها تفاد للرياضيات Math avoidance، أو عصاب رياضي Mathphobia ، أو ما يعرف بالقلق الرياضي، والذي يعكس واقعا ملموسا لملايين من البشر التي تعاني من هذه الظاهرة وفقا لما ذهب إليه الطبيب شيلا توبياس Sheila Tobias فإن القلق الرياضي هو عبارة عن إخفاق بالجرأة الشخصية في مواجهة الحاجة إلى إجراء حسابات أو تحليل مسألة تتضمن أرقاما، أو هندسة، أو مفاهيم رياضية.

إن هذا القلق هو استجابة مع الزمن تسبب ضغطا مستمرا في غرفة تدريس الرياضيات عندما تعطي الاختبارات باستمرار تحت وطأة الوقت المحدد، أو في المنزل حيث ينشأ التنافس مع الأقرباء، أو في مكان العمل.

يحمل القلق الرياضي بآثاره إلى الذكور والإناث معا، إلا أن تأثيراته على الإناث تكون اشد وضوحا. وبصورة عامة تعاني الإناث الكثير من الضغوط النفسية عند تنفيذ أمر معتبر، في ثقافتنا (وليس بالضرورة في الثقافات الأخرى)، كوجودهن في "ميدان للرجال".بيد أن التاريخ يبرهن أن الكثير من النساء قد نجحن في الرياضيات وحقول أخرى تستند إلى الرياضيات.

ينبغي على المعلمين تمييز بعض السمات، والأعراض، والمؤشرات المرتبطة بقلق الرياضيات التي تظهر على طلبتهم بين الحين والآخر، فعلى سبيل المثال يعاني بعض الطلبة من عدم القدرة والقلق إزاء حل المسائل اللفظية Verbal Problems فضلا عن شعور بعض الطلبة بقشعريرة مستشعرين بردا شديدا أثناء الاختبارات والامتحانات الموجزة.

ينبغي إعادة التفكير في تبني مفهوم أن الجواب الخاطئ يعد جوابا سيئا، وأن الجواب الصحيح هو جواب جيد. وتظهر الحاجة إلى التأكيد على العمليات والآليات بدلا من الناتج. إن للتشجيع الصادر عن المعلم، وبيئة التنشئة، والسماح بالاستمرار في السير وفق القدرات الذاتية، سيساعد الطلبة الذين يعانون من القلق الرياضي بالتغلب على وساوسهم وطرده من ذواتهم وحياتهم اليومية.

زيادة تماسك الرياضيات

Concretizing Mathematics

يدعم كثير من الباحثين بمجال تربويات الرياضيات (اتحاد منتصف الغرب لتعليم الرياضيات والعلوم Midwest (Consortium for Mathematics Science Education فكرة أن تركيز الاهتمام بموضوع الميكانيك، والإجراء الرياضي يشوش ويكبح التعلم الهادف، وقد يؤدي إلى انتشار مبادئ خاطئة حول قدرة ومحدودية طرائق التعليم الرياضي.

عندما يمنح الطلبة فرصة المشاركة الفاعلة في عملية التعلم، يصبحون أكثر ميلا لتطوير مرادهم الشخصي من الأفكار والمفاهيم الرياضية، وسيكتسبون – نتيجة لهذا الأمر – شعورا ذاتيا بامتلاكهم مفاهيم أو مواضيع رياضية، مما يقوي قدرة الطالب.

إن المعلمين الذين سيساهمون في هذه الاستراتيجيات التعلمية سيؤدون وظيفة مسهّل Facilitator إضافة إلى دوره كمعلم. إن الفرق الجوهري بين دور المعلم ودور المسهّل يكمن في أن الأول يغرس المعلومات في الطلبة من خلال: الإعلام، والتوضيح، والتحدث، محاولا جعل المعلومات أكثر وضوحا (بقدر الإمكان) للطلبة. بالمقابل فإن الثاني يرشد، ويقود، وينصح الطلبة الذين قد يبلغون آخر الأمر إلى حدسهم، وبراهينهم، واستنتاجاتهم الذاتية.

لا تقتصر عملية تعليم الرياضيات على البحث عن سبل وضع القواعد، والتعاريف، والطرق الإجرائية كي يستظهرها الطلبة عن ظهر قلب، ولكن تهدف إلى تعهد الطلبة والأخذ بيدهم كمشارك فعال بعملية التعلم. إن بعض الاستراتيجيات التدريسية التي ينصح بها لدعم بيئة التعلم الفعال Active Learning في صف الرياضيات المدرسي، هي استخدام المواد المحسوسة Concrete Materials وتشجيع الطلبة على مناقشة الأفكار الرياضية، وعلى الكتابة التي قد تتضمن تعلم أسلوب إعداد السجلات التعليمية Journal، والمساهمة بتبادل الخبرة والأفكار من خلال مجاميع التعلم التعاوني Cooperative Learning. إن المشاركة الفعالة للطالب تثير مكامن القدرة لديه على إدراك مفاهيم الرياضيات، ويضاف إلى فوائد التعلم التعاوني تطوير مهارات التفكير والاستنتاج، وزيادة احترام الذات، وتحسين المواقف وحسن الفهم باتجاه الأقليات والثقافات الأخرى، وقبول الطلبة الذين ينتمون إلى التيار العام.

اثبت نماذج التعلم التعاوني فعاليتها في الصفوف غير المتجانسة Heterogeneous. إن من الضروري الانتباه إلى وجود فروق بين العمل بمجاميع صغيرة، والتعلم التعاوني، فالفكرة الأساسية لأنموذج Model التعلم التعاوني ترتكز إلى حقيقة ان كل طالب في المجموعة التعاونية عرضة للمحاسبة على النتائج النهائية للمجموعة، وان على الطلبة العمل سوية كفريق واحد لضمان النجاح.

ومع ذلك، فبالرغم من تنظيم مجموعة العمل الصغيرة ليعملوا معا، فإن كل طالب سيكون عرضة للمحاسبة عن ذاته فقط ذكرا كان أم أنثى. ومن ثم فإن أعضاء المجموعة الصغيرة قد يكونون أكثر تعاونا وتشاورا فيما بينهم، بيد انه لا توجد سوى النتائج الفردية في ميزان التقييم مع غياب الأهداف المشتركة.

إن تدريس الرياضيات الذي يستثمر مجموعة متنوعة من التطبيقات، وجملة من العروض يساعد على تطوير نمو الطالب في كل من المجالين الإدراكي Cognitive والوجداني Affective.

بصورة عامة، تركز الرياضيات على تمثيل ونقل الأفكار والعلاقات التي تربط بالأرقام، والمكان، والبيانات. وهناك وفرة من الأنشطة والفعاليات التربوية التي تدعم هذه الفكرة. فعلى سبيل المثال، قد يعمد الطلبة إلى تفسير اهتماماتهم المفاهيمية بصورة رمزية، من ثم يقترحون وصفا لفظيا لمواقف مشابهة.

قد تتألف الأنشطة الأخرى من اختيار الأنموذج الأمثل لتوضيح علاقة ما، باستخدام الحاسوب (أو الآلة الحاسبة) بطرق فريدة للبحث في مسألة ما، وكتابة مداخل السجلات التعلمية، وإدراج تعليقات على الحواشي، أو الحدس الشخصي لشرح ملاحظات في الرياضيات.

ينبغي على المعلمين تطويع التدريس بالشكل الذي يجعله مناسبا للتطورات المحتملة في تعلم الطلبة. وبصورة عامة، يكتسب الطلبة فهما أكثر عمقا بالرياضيات عندما يمنحون الفرصة لتطوير معرفتهم الرياضية من خلال: الخبرة المباشرة، والاستنتاج، وحل المسائل، والاستكشاف، وتبادل الآراء والمعلومات مع الغير. إن هذا النوع من التدريس يشجع تفاعل

الطالب، والذي يعزز نمو: الإدراك، واحترام الذات، والقدرة الرياضية. فضلا عن ذلك أن هذا النوع من التدريس لا يتطلب بالضرورة ولا يفيد الطلبة بتدوين، أو خزن المواد التي تقع خارج دائرة فهمهم.

إن الاستخدام المؤثر للنماذج والمواقف الواقعية وتوظيف المواد المحسوسة، والتعلم التعاوني، واستكشاف المسائل، والمناقشات داخل غرفة الدرس، سيمكن الطلبة من إدراك وتقدير فائدة وجمال الرياضيات، والذي سيسهم بتطوير ونمو ملكة الإدراك لديهم.

باختصار، أن البيئة التعلمية والتي تمتاز بصلتها الوظيفية - الوثيقة مع المواقف السائدة بالعالم الواقعي ستشجع الطلبة على المسائل الواقعية، والتي تتطلب براعة ودهاء، وتعكس بوضوح استخدام الرياضيات في الحياة اليومية.

دور المواد التي بمتناول اليد Role of Hands-On Materials: إن المواد التي تقع بمتناول اليد، أو المواد اليدوية، هي عبارة عن أشياء ملموسة Tangible Objects التي يستطيع الطلبة استكشافها، وتنظيمها وتحريكها، وتجميعها، وتبويبها، واستخدامها وسيلة للقياس عند إنشاء أنموذج المفاهيم والمسائل الرياضية. فعلى سبيل المثال، إن استخدام التشكيلات الجبرية Algebra Tiles قد يسهم في مساعدة الطلبة على فهم مجموعة متنوعة من المفاهيم الجبرية، والتي تتضمن نظرية فيثاغورث.

إن استخدام اللوحات الأرضية Geoboards قد يوفر للطلبة فرصة استكشاف مجموعة من الأشكال الهندسية -ثنائية الأبعاد 2 Dimensional. والبيئة التربوية التي تدعم استخدام الألعاب التشكيلية Manipulative قد يساعد على تحسين فهم الطالب وإنجازاته المدرسية، شريطة أن يقام ارتباط واضح ووثيق بين المواد المستخدمة والمفاهيم الرياضية المحددة، والإجراءات التي يعمد الطلبة إلى ترميزها.

إن من الضروري على المعلمين مد يد للطلبة لتحقيق الانتقال من دائرة الخبرة المحسوسة إلى دائرة الرموز الرياضية المجردة. إن عملية الانتقال من المحسوس إلى المجرد هي سلسلة متصلة Continuum من المحسوس أو أنموذج ما هو بمتناول اليد، إلى شبة المحسوس أو التخطيطي Diagrammatic، إلى شبه المجرد Semiabstract أو الرموز التي لا تشابه الألعاب التشكيلية الذي تمثله، إلى المجرد الذي قد يوضح صيغة رياضية، أو معادلة أو برهان.

وبالرغم من استخدام المواد التشكيلية في المراحل الدراسية المبكرة، فإن الاستخدام المؤثر للمواد المحسوسة قد يلعب دورا مهما، كذلك، في مراحل التدريس المدرسي المتوسط والثانوية.

يعمد معلمو الرياضيات بالمدارس الثانوية، في معظم الأحيان، إلى نقل المعلومات عبر أنموذج تقليدي مجرد للتدريس دون الأخذ بنظر الاعتبار الخبرة المتماسكة والمتراكمة ولغرض تلبية حاجات جميع الطلبة التعليمية والرياضية، يبدو من الضروري على المعلمين أن يكونوا أكثر مرونة، اخذين بنظر الاعتبار وفرة الأساليب التعليمية للطلبة والتي قد تتضمن استخدام المواد التشكيلية.

أظهرت البحوث المستفيضة أن الاستخدام الصحيح والمناسب للتقنية يساعد في التطوير المفاهيمي للطلبة على استيعاب مادة الرياضيات، ومهارات حل المسائل. وعليه فإن الاستخدام المناسب للحواسيب والآلات الحاسبة بات ضروريا في غرفة تدريس الرياضيات.

وتتوفر جملة من برمجيات الحاسوب، الجديرة بالاهتمام، التي تستثمر الإمكانيات المتاحة عليه، فتحاكي بعضها العالم الواقعي، والتطبيقات والنمذجة الرياضية، فعلى سبيل المثال، فإن برمجيات الحاسوب الديناميكية مثل:

كراسات الرسم الهندسي The Geometric Sketchpad (Key Curriculum Press)
التخيل الهندسي The Geometric Supposer (Sunburst)
مجموعات التماثل
Maple
Mathematica.

تساعد الطلبة على الإدراك المفاهيمي للتجريد الهندسي، ومفاهيم الجبر عبر توحيد شكلي لما هو في متناول اليد مع ما هو في متناول الفكر. يضاف إلى ذلك أن الآلات الحاسبة العلمية والرسومية تحوي نظم المنطق الجبري (مبنية بداخلها) والتي توفر للطلبة فرصة تقدير الرياضيات من خلال التعلم المرئي Visual learning. بالحقيقة، إن كثيرا من أدوات التقييم الرياضي، مثل اختبار الذكاء أو الكفاءة المدرسية Scholastic Aptitude Test (SAT) بحاجة إلى استخدام آلة حاسبة رسومية أو علمية.

ولا زالت التقنيات الحديثة تمر بدراسات وتطويرات متعمقة، باستمرار، وان حجما كبيرا منها يمتلك تأثيرا واضحا على عمليتي تعليم وتعلم الرياضيات، وسوف تستمر بعمل المزيد للأجيال القادمة.

المعايير: اثنا عشر عاما من النمو
The Standards: Twelve Years of Growth

المعايير القديمة The Old Standards

في عام 1989، عمد المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM) إلى إصدار ثلاثية من وثائق المعايير (لغرض إحداث تغيير وتقدم في الإصلاح المنظم لتعليم الرياضيات) التي وصفت بإسهاب الأهداف العالمية لمناهج الدراسة، والتعليم، والتقييم في الرياضيات المدرسية K-12.

إن هذه الوثائق والمعروفة بمعايير NCTM تتألف مما يلي:

1. معايير منهج وتقويم الرياضيات المدرسية Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989)
2. المعايير المهنية لتعليم الرياضيات Professional Standards for Teaching Mathematics (1991).
3. تقييم المعايير للرياضيات المدرسية Assessment Standards for School Mathematics (1995)

استخدمت هذه الوثائق الثلاثة، منذ قرابة اثني عشر عاماً، بوصفها قوة دافعة وإطار عمل للتطوير اللاحق للجهود الوطنية في المدينة والولاية للارتقاء بالرياضيات المدرسية في الولايات المتحدة. و قدمت هذه الوثيقة،على وجه التخصيص، رؤية واضحة عن الكيفية المطلوبة لتعليم الرياضيات وتعلمها، ورسمت الأهداف الخاصة، وساعدت بالتأثير على التغيرات الطارئة في تعليم الرياضيات بالصف المدرسي على عموم الولايات المتحدة. بصورة عامة، لم يرد من المعايير أن تكون دليلا لطرق إجرائية تعتمد في تعليم الرياضيات، بل كان هدفها الأساس منصبا على تقديم رؤية تتألف من الأهداف التي يمكن في خلالها اختبار: مناهج الرياضيات، وتعليمها، وتقييم ممارساتها. ولقد تم إعداد هذه الوثائق الثلاث، وتحريرها من قبل فريق من المربين المهنيين بمادة الرياضيات، من بينهم معلمين، واستشاريين، وباحثين، ورياضيين، وأساتذة جامعيين باختصاص الرياضيات وتربويات الرياضيات.

تصف الوثيقة الأولى للمعايير (معايير منهج وتقويم الرياضيات المدرسية (*1989*)) *الموضوعات الأساسية في* الرياضيات، والتي ينبغي على الطلبة إدراكها وتطبيقها، يضاف إلى ذلك تؤكد المعايير على أهمية المهارات الموجهة عملياتيا Process-Oreinted مثل حل المسائل، مهارات التعليل، والتواصل في الرياضيات، وإنشاء الصلات.

تم تقسيم هيكلية المعايير إلى أصناف حسب مستويات المراحل، مثل: روضة أطفال إلى الصف الرابع، الصف الخامس إلى الصف لثامن، الصف التاسع إلى الصف الثاني عشر، وتحوي كل منها 14-12 من المعايير.

أدرجت المعايير الخاصة برياضيات المدارس الثانوية: حل المسائل، التواصل، والتعليل، والصلات، والأعداد والعلاقات، ونظم الإعداد، ونظرية العدد، والحسابات والتقريب، والأنماط والدوال، والجبر، والإحصاء، والاحتمال، والهندسة، والقياس.

تصف الوثيقة الثانية للمعايير (المعايير المهنية لتعليم الرياضيات (1991)) الطرق التي يستطيع التربويون اعتمادها في عرض الأنشطة الرياضية والتي تنسجم مع روح، ورؤية، ومقاصد معايير المناهج والتقويم. فضلا عن أن هذه المعايير قد صيغت وفقا للمطالب الأساسية التي حددها التربويون، مثل اختيار اختيارات أنشطة رياضية ذات معنى، واستهلال وتشجيع الحوار اللفظي الذي يرتبط بهذه الأنشطة، والمحافظة على بيئة تركز على الطالب باتجاه التعلم.

كذلك تدعم المعايير مبدأ تدريب المعلمين، والتطوير المهني، والتقويم المستمر لطرائق تعليم الرياضيات.

تصف الوثيقة الثالثة للمعايير (تقييم المعايير للرياضيات المدرسية (1995)) فلسفة تقييم الممارسات التي تم تزكيتها، والتي ينبغي على تربويين الرياضيات الأخذ بها لدعم التطورات في القدرة الرياضية لجميع الطلبة (NCTM, Making A Living, Making A Life, 1997).

لا تكفي الامتحانات السريعة والاختبارات في عملية تقييم الرياضيات، وتؤكد معايير التقييم، وتدعم، استخدام نماذج تقييم متعددة لتحديد ما يتعلمه الطلبة. فمثلا توجد مجموعة كبيرة من المؤشرات الاختيارية التي تساعد المعلمين على التحقق من قدرات طلبتهم وتقدمهم، وإنجازاتهم. فقد تتضمن أدوات التقييم الطرق التي يتبناها الطلبة في حل مسائل الواجبات المنزلية، المناقشات الدائرة بين طالب وآخر، المفكرات الشخصية لتعلم الرياضيات والتي قد تعكس الإنجاز التحريري للطالب، و شريط الفيديو Video-taping التي توفر للمعلمين فرصة إضافية لتعميق البصيرة بقدرات الطلبة على التفكير، ومستويات فهمهم.

فضلا عن ذلك، توفر عملية تقييم التحصيل في الرياضيات للطلبة الفرصة لبيان وعرض أفكارهم على الورق. ونتيجة لذلك يستطيع المعلمون كسب القدرة على التعمق بفهم أساليب تعلم الطلبة، وسيكونون قادرين على تقويم تقدم الطلبة على أسس أكثر شمولية. تعزز معايير التقييم، أيضا، مبدأ العدالة التربوية Educational Equity، بمعنى آخر، توقعات مرتفعة لجميع الطلبة. لذا ينبغي على المعلمين إدراك أساليب التعلم للطلبة،

ومدى قدراتهم، والبحث عن وسائل لتعزيز المشاركة الفاعلة لجميع الطلبة في خبرة تعلم الرياضيات.

يشترط إجراء التقييم لكل طالب متضمنا المتعلمين الخصوصيين، والموهوبين والمتميزين، بما يوفر لهم الفرصة لبيان فهمهم لموضوع ما بطرق متعددة. وينبغي استخدام نتائج التقييم لتجهيز كل طالب بالفرصة والدعم المناسب لتحقيق المستويات المثلى في النجاح.

وخلال الفترة القصيرة من نشر الوثائق الثلاث، قررت NCTM إلحاق المعايير بسلسلة من الكتيبات التي تعضدها بأمثلة محددة، واقتراحات تفصيلية حول كيفية تطبيق كل معيار من هذه المعايير في غرفة التدريس.

أطلق على هذه السلسلة ((سلسلة إضافية)) Addenda Series، وقد أبرزت مجموعة من مناهج الدراسة المتاحة والنماذج الرياضية لتنظيم المحتوى الرياضي المقترح في معايير المنهج والتقويم. فضلا عن ذلك توفر السلسلة الإضافية عينة لمنهج، ودروس، وأنشطة تساعد على زيادة وثائق المعايير.

هناك اثنان وعشرون كتابا في المجموعة الكاملة لسلسة الإضافية، صممت ستة من هذه الكتيبات للمدارس المتوسطة (الصفوف 8-5)، وخمس كتيبات للمدارس الثانوية.

توفر هذه الكتيبات مصادر ثمينة للمعلم لعرض أنشطة ودروس تناسب طلبة المدارس الثانوية.

المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية

The Principles and Standards for School Mathematics

عبر جهود متواصلة لمواجهة المطالب المتغيرة للمجتمع التقني، والاستمرار بتقديم تغييرات منظمة في تربويات الرياضيات، اصدر NCTM "مبادئ ومعايير للرياضيات المدرسية" في نيسان من عام 2000. إن الهدف الأساس من هذه الوثيقة هو تنقيح، وتكامل، وتعديل، وتحسين الأهداف الأصلية لمعايير NCTM لسنة 1989.

توفر "مبادئ ومعايير لرياضيات المدرسة" مسارا ورؤية متعمقة مع *إتاحة الفرصة لمدارس المقاطعات المحلية وللمدارس* لاتخاذ قرارات مهمة باتجاه قضايا المناهج الدراسية. وتقدم "مبادئ ومعايير لرياضيات المدرسة" مجموعة تفصيلية من الأهداف للرياضيات المصممة لجميع الطلبة (K-12). أعدت الأهداف لغرض تشكيل: مناهج، وتعليم، وجهود التقييم للمستقبل، ولتوفير أدوات ومصادر ثمينة للمعلمين، والمدراء، ولواضعي السياسات، لغرض استكشاف وتحسين نوعية برامج التدريس الرياضي، ولإرشاد أنشطة التقدم والتحديث السائدة في: الأطر المنهجية، والتقييمات، ومواد التعليم، ولتشجيع الأفكار واستمرار الحوار بمستوى الوطن والولاية، وبالمستوى المحلي.

بات من الضروري جدا على معلمي الرياضيات الثانوية تطوير منظور شامل لتعليم الرياضيات وتعلمها. فعلى سبيل المثال، ينبغي على مدرسي المدارس الثانوية عدم الاقتصار على مراعاة مجال وتتابع المفردات المعتمدة في غرفة تدريسهم الحالية، بل ينبغي عليهم الأخذ بنظر الاعتبار الرياضيات التي تم تعليمها سابقا للطلبة في كل من المدارس الابتدائية والمتوسطة، والرياضيات التي سيدرسها الطلبة في المراحل والمستويات الدراسية اللاحقة في المدارس الثانوية والتعليم الجامعي.

سيوفر هذا الأمر للمدرسين إمكانية معالجة الرياضيات (التي يقومون بتعليمها) بمنظور أكثر شمولا. وفضلا عن ذلك، سيكتسب المعلمون مستويات متزايدة من الحساسية باتجاه الاحتياجات الرياضية، وأساليب التعلم الخاصة بطلبتهم.

نتيجة لتنظيم "مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية" باستخدام مجال بأربعة مراحل، (ما قبل رياض الأطفال إلى الصف الثاني، والصف الثالث إلى الصف الخامس، والصف السادس إلى الصف الثامن، والصف التاسع إلى الصف الثاني عشر)، وستتوفر للمعلمين إمكانية إجراء بحوث – غير رسمية لمواضيع الرياضيات بالصفوف الأولية، ويقومون فيما بعد بتنظيم تدريسهم لمواجهة الحاجات الخاصة بطلابهم. ولقد تم إعداد مجموعة واضحة من التوقعات لكل نطاق من الصفوف تعالج كل جزء من محتويات المعايير، وكذلك أهداف العمليات من المعلم ، أيضاً.

إن المعايير هي عبارة عن أوصاف لما ينبغي لتدريس الرياضيات أن يتيح للطلاب أن يعرفوه ويعملوه، وتصاريح بكل ذي قيمة في مضمار تعليم الرياضيات المدرسية (NCTM, 2000).

تصف المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية، وتطور نوعين *من المعايير: معايير لتعلم موضوعات رياضية محددة، ومعايير* عمليات لكل من أصول علم التعليم وطرائق التعليم.

توضح المعايير (من 1 إلى 5) محتوى أهداف الرياضيات للصفوف 6 إلى 12، وتتضمن هذه الأهداف: الأعداد والعمليات، والجبر، والهندسة، والقياسات، وتحليل البيانات والاحتمالات. تعرض المعايير 6 إلى 10 أهداف عمليات تعليم الرياضيات للصفوف 6 إلى 12، وتتضمن هذه الأهداف: حل

المسائل، التحليل والبرهان، والتواصل، والارتباطات، والعروض.

إن الأهداف والعمليات غير قابلة للتبادل - على وجه الحصر- فيما بينها، بينما ترتبط إحداها بالأخرى ارتباطا طبيعيا.

فعلى سبيل المثال، فهي تحتاج إلى معرفة المحتوى في تحليل البيانات والاحتمالات لغرض إعداد ارتباطات / عروض بين محتوى المجالين. فضلا عن الصعوبة البالغة التي تعترض صياغة الحدس المنطقي في الهندسة بدون تعليل أو برهان، كذلك يبدو من المستحيل، افتراضيا، رسم تمثيلات مرئية دقيقة دون معرفة بالجبر والدوال.

نشرت NCTM سلسلة من الكتيبات بعنوان "سلسلة الإبحار" Navigation Series كملحق للمبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية تشابه هذه السلسلة بأهدافها السلسلة الإضافية وتركز بمعالجة عميقة لجملة من المفاهيم الرياضية، ويعالج كل كتيب من هذه الكتيبات مدى محددا من الصفوف الدراسية (ما قبل رياض الأطفال-2، 3-5، 6-8، 9-12.

يلخص الجدول التالي الموضوعات الرئيسية للمبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية الخاص بـ NCTM.

يعرض القسم الأول من الجدول معايير المحتوى، ويصف القسم الثاني معايير العمليات.

معايير المحتوى للرياضيات المدرسية

معيار العدد والعمليات	ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال لغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	▪ فهم الأعداد، وطرق عرضها، والعلاقات القائمة بين الأعداد، والنظم العددية.
	▪ فهم معنى العمليات وكيف ترتبط فيما بينها.
	▪ أن يحسب بسهولة ويسر، ويستطيع إعداد تخمينات معقولة.
معيار الجبر	ينبغي على برنامج التدريس ما قبل رياض الأطفال لغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	▪ فهم الأشكال، والعلاقات، والدوال.
	▪ عرض وتحليل المواقف والبنى الرياضية باستخدام الرموز الجبرية.
	▪ استخدام النماذج الرياضية لعرض وفهم العلاقات الكمية.
	▪ تحليل التغيير بسياقات مختلفة.
معيار الهندسة	ينبغي على برنامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	▪ تحليل خصائص ومميزات الأشكال الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد، وتطوير البراهين الرياضية حول العلاقة الهندسية.
	▪ تحديد المواقع ووصف العلاقات المكانية باستخدام هندسة الإحداثيات، ونظم وصفية أخرى.
	▪ تطبيق التحويلات، واستخدام التناظر لتحليل المواقف الرياضية.
	▪ استخدام التمثيل الصوري، والإدراك المكاني، والنمذجة الهندسية لحل المسائل.
معيار القياس	ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	▪ فهم الصفات القابلة للقياس للأشياء، والوحدات، والنظم، وعمليات القياس.
	▪ تطبيق التقانات المناسبة، والأدوات، والصيغ لوصف القياس.
مصادر تحليل البيانات والاحتمالات	ينبغي على برامج التدريس لمهنة ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من:
	▪ صياغة الأسئلة التي يمكن توجيهها بواسطة البيانات، وجمع، وتنظيم، وعرض البيانات المرتبطة معها للإجابة عنها.
	▪ اختيار الطرائق الإحصائية المناسبة لتحليل البيانات واستخدامها.
	▪ تطوير الاستدلالات والتوقعات التي ترتكز إلى البيانات وتقويمها.
	▪ فهم المفاهيم الأساسية للاحتمالات وتطبيقها.

معايير العمليات للرياضيات المدرسية

معيار حل المسألة	ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من: ▪ بناء معرفة رياضية جديدة من خلال حل المسألة. ▪ حل المسائل التي تظهر في سياقات أخرى. ▪ تطبيق وتبني مجموعة من الاستراتيجيات المناسبة لحل المسائل. ▪ المراقبة وعكسها على عمليات الحل الرياضي للمسائل.
معيار الحجة والبرهان	ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من: ▪ إدراك أن التعليل والبرهان هما المظهران الأساسيان للرياضيات. ▪ إجراء وتحقيق الحدس الرياضي. ▪ تطوير وتقويم الاستدلال والبرهان الرياضيين. ▪ اختيار واستخدام أنواع متعددة من التعليل وطرائق البرهان.
معيار التواصل	ينبغي على برامج التدريس لمرحلة ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من: ▪ تنظيم وتعزيز تفكيرهم الرياضي من خلال التواصل. ▪ تواصل فكرهم الرياضي بصورة واضحة ومترابطة مع مدرسيهم، ونظرائهم، والآخرين. ▪ تحليل وتقويم التفكير الرياضي واستراتيجيات الغير. ▪ استخدام اللغة الرياضية للتعبير عن الأفكار الرياضية بدقة.
معيار الارتباطات	ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من: ▪ تمييز واستخدام الارتباطات بين الأفكار الرياضية. ▪ فهم كيفية ترابط الأفكار الرياضية فيما بينها وكيف تبنى إحداها على الأخرى، لإنتاج الكل المترابط. ▪ تمييز وتطبيق الرياضيات في سياقات تقع خارج الرياضيات.
معيار العرض	ينبغي على برامج التدريس ما قبل رياض الأطفال ولغاية الصف 12 أن تمكن الطلبة من: ▪ إنشاء واستخدام العروض لتنظيم، وتسجيل، عوامل الآراء الرياضية. ▪ اختيار، وتطبيق، وترجمة ما بين العروض لحل المسائل. ▪ العروض للمستخدم لنموذجة وتفسير الظواهر الفيزيائية، والاجتماعية والرياضية.

المبادئ للرياضيات المدرسية

العدالة	▪ إن التميز في الرياضيات التربوية يحتاج إلى العدالة: أعلى التوقعات ودعم مركز لجميع الطلبة.
منهاج الدراسة	▪ إن منهج الدراسة أكثر من كونه مجموعة من الأنشطة: ينبغي أن يكون مترابطا، ويركز على أهم الموضوعات الرياضية، وأن يكون قد احسن توزيع تفريعاته عبر الصفوف الدراسية.
التعليم	▪ يتطلب التعليم المؤثر للرياضيات فهم ما ينبغي على الطلبة معرفته، ويحتاجون إلى تعلمه، ثم تحديهم ودعمهم لتعلمها بشكل جيد.
التعلم	▪ ينبغي أن يترافق تعلم الطلبة مع الفهم والبناء الفاعل لمعرفة جديدة من خلال الخبرة والمعرفة القبلية.
التقييم	▪ ينبغي أن يدعم التقييم تعلم الرياضيات الأساسية ويوفر معلومات مفيدة لكل من المعلمين والطلبة.
التقنية	▪ إن التقنية ضرورية في عمليتي تعليم الرياضيات وتعلمها، ولها تأثير ملموس على طبيعة الرياضيات التي يتم تدريسها، وتعزز تعلم الطلبة.

إنجاز المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية Implementing The Principles And Standards For School Mathematics: نصت مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية على ما يلي: "إن أحد أهداف هذه الوثيقة هي اقتراح وسيلة لتركيز المناهج"، بيد أن مهمة مواصلة هذا الهدف داخل دائرة الصف المدرسي تشكل تحديا كبيرا. سيتبع إنجاز هذا الهدف مثابرة مستمرة لتحسين مجموعة الأفكار الجديدة، والابتكارات الخاصة بالمناهج الدراسية ووضعها موضع التنفيذ والتي ستجعل من الولايات المتحدة منافسا شديدا للأفضل في العالم بمادة الرياضيات.

حاول عدد من المدارس الثانوية على عموم الولايات المتحدة، استكشاف وتنفيذ عدد كبير من: البرامج الرياضية، ونماذج المناهج الدراسية، ومجموعة متباينة من أدوات التقييم استجابة للتحديات، والحاجات، والمسؤوليات التي تفرضها عمليات تعليم وتعلم الرياضيات في مجتمع يعج بتطورات تقنية.

تم تمويل جملة من هذه المشاريع وصُدق عليها بواسطة مؤسسة تمويل العلوم الوطنية (NSF) National Science Foundation والتي نشأت عن جملة من البحوث الشاملة التي أجريت على تعليم الرياضيات وتعلمها في المدارس الثانوية. فضلا عن ذلك، إن مقصد هذه البرامج يركز على اقتراح أنشطة تدعم أساليب التفكير الرياضي التي تنفع الطلبة في مساعهم المستقبلي، وترتبط بتطبيقات الواقع الميداني الذي سيواجهونه.

إن هذه الموارد الجديدة والمستحدثة قد ارتكزت إلى المبادئ والمعايير للرياضيات المدرسية الصادرة عن المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM, 2000).

يصف الجدول الآتي عشرة برامج رياضية-نموذجية تستخدم في عدد من المدارس المتوسطة والثانوية على طول رقعة الولايات المتحدة.

نماذج منهاجية مثالية لرياضيات المدارس الثانوية

	المدرسة المتوسطة
الرياضيات المترابطة Connected Mathematics	منهاج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف 6-8 الذي تم تطويره بواسطة مشروع الرياضيات المترابطة (CMP). ▪ تسعى الرياضيات المترابطة لتطوير المعرفة الرياضية للطالب والمعلم، والتي تكون ثرية في الترابطات وعميقة بالفهم والمهارات. ▪ يمكن اختصار الأهداف بمعيار وحيد: ينبغي على جميع الطلبة أن يكونوا قادرين على التعليل والتواصل ببراعة في الرياضيات. ▪ تعريف المهارات على أساس أكثر من كونها براعة في الحسابات والتعامل مع الرموز. ▪ تحري الأفكار الرياضية المهمة عبر وحدات منظمة. ▪ إتاحة عدة طرق للطلبة في عرض كيفية إدراكهم للرياضيات في الوحدات.
الرياضيات في السياق Mathematics in Context	منهاج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف (5-8) الذي تم تطويره بواسطة مشروع الرياضيات في السياق (Mic). ▪ إن الرياضيات في السياق هو منهاج دراسي شامل لرياضيات المدارس المتوسطة للصفوف 5 إلى 8. ▪ يؤكد على الطبيعة الفعالة والديناميكية للرياضيات والسبل التي توفرها الرياضيات للطلبة في إدراك العالم الذي يحيط بهم. ▪ تتألف من المهام الرياضية وأسئلة تم تصميمها لتحفيز التفكير الرياضي ولتشجيع الحوار بين الطلبة.
الفضاء الرياضي: الرؤية والتفكير رياضيا Math Space: Seeing & Thinking Mathematics	منهاج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف (6-8) الذي تم تطويره بواسطة مشروع الرؤية والتفكير رياضيا: ▪ إن الفضاء الرياضي هو منهاج دراسي شامل لرياضيات المدارس المتوسطة بسنيها الثلاثة، والذي يركز على الرياضيات في حدود الخبرة البشرية.

- يدعم الطلبة على تعلم الرياضيات عن طريق جعلهم يمارسون الرياضيات، ويستخدمونها ويربطون بين الأفكار الرياضية، وينشئون فهمهم الرياضي الذاتي.
- يدعم المعلمون في استخدامهم المواد بمرونة لإشباع احتياجات طلبتهم.

الموضوعات الرياضية Mathematics

منهاج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف (6-8)، الذي تم تطويره بواسطة مشروع (STEM Project: Sin :Through Eight Mathematics)

- إن الموضوعات الرياضية هي منهاج دراسي رياضي متكامل لمدة ثلاث سنوات للطلبة في الصفوف (6-8).
- يشغل المنهج الدراسي الطلبة على ممارسة الرياضيات بصيغ مختلفة.
- يفترض أن يمتلك الطلبة الفرصة لاستخدام الآلة الحاسبة .Calculator.

مسارات الرحالة إلى الجبر والهندسة Voyager Pathway Algebra & Geometric

منهاج الدراسة للمدرسة المتوسطة للصفوف (6-8) الذي تم تطويره بواسطة مشروع رياضيات المدارس المتوسطة من خلال مشروع التطبيقات:

- تعرف مسارات الرحالة إلى الجبر والهندسة رسميا بمشروع رياضيات المدارس المتوسطة من خلال مشروع التطبيقات (MMAP)، وهو عبارة عن منهاج دراسي رياضي شامل للمدارس المتوسطة يكامل بين تقنيات الحاسوب مع ارتباطات موضوعية أخرى.
- يوفر فرصا متنوعة للطلبة لان يقيموا ويقوموا، بالإضافة إلى توفير فرص أمام الطلبة لتعلم كيفية إعداد التقييم.

المدرسة الثانوية High School

الرياضيات المعاصرة في السياق Contemporary Mathematics in Context

منهاج الدراسة للمدارس الثانوية للمراحل (9-12) الذي تم تطويره بواسطة مشروع Core-Plus Mathematics:

- إن الرياضيات المعاصرة في السياق هي برنامج رياضي متكامل لأربع سنوات، يتضمن منهجا دراسيا جوهريا لجميع الطلبة لثلاث سنوات، فضلا عن منهج مرن لأربع سنوات يستمر في إعداد الطلبة للرياضيات الجامعية.

برنامج الرياضيات التفاعلية Interactive Mathematic Program

منهاج الدراسة للمدارس الثانوية للصفوف (9-12) الذي تم تطويره بواسطة برنامج الرياضيات التفاعلية (IMP).

- إن برنامج الرياضيات التفاعلية (IMP) هو منهاج تدريسي متكامل لأربع سنوات يختص بموضوع المسائل، وقد صممت الرياضيات لتحل محل الجبر التقليدي-1، الهندسة والجبر-2 والمثلثات، وسياق ما قبل حساب التفاضل والتكامل CALCULUS (الحسبان).
- يوحد الرياضيات التقليدية مع موضوعات إضافية اقترحت بواسطة معايير مناهج الدراسة والتقويم لمجلس (NCTM) مثل: الإحصاء، والاحتمالية، والرياضيات المتقطعة Discrete Mathematics، وجبر المصفوفات Matrix Algebra.
- يتطلب استخدام آلة حاسبة-رسومية أثناء الدرس.

الارتباطات الرياضية MATH Connections

منهاج دراسي جوهري للرياضيات الثانوية

منهاج دراسي لثلاث سنوات لرياضيات المدارس الثانوية

- إن الارتباطات الرياضية هي منهاج دراسي متكامل للمدارس الثانوية يستغرق ثلاث سنوات، ولجميع الطلبة، وتكمن مهمته في أحداث تطور مفاهيمي لدى المتعلم.
- يتم توجيهه في ضوء المفاهيم، بمعنى آخر، تقدم المفاهيم في سياق تطبيقات الواقع الميداني، ومشاكله القائمة، ومشاريعه.

	▪ تم تصميمه لتزويد الطلبة بخبرات تساهم في تنشيط حب الاستطلاع لديهم، وإثارة خيالهم، وتحدي مهاراتهم الشخصية.
الرياضيات: صياغة عالمنا Mathematics: Modeling Our World	منهاج دراسي للمدارس الثانوية للصفوف (9-12) تم تطويره بواسطة مجمع الرياضيات وتطبيقاتها (COMAP). ▪ إن المنهج الدراسي "الرياضيات: صياغة عالمنا" هو منهاج جوهري متكامل للمدارس الثانوية ترتكز إلى مقدمة منطقية تفترض أن الطلبة يتعلمون بصورة افضل عندما يشاركون بصورة فاعلة بالعملية.
الرياضيات المتكاملة SIMMS Integrated Mathematics	منهاج دراسي للمدارس الثانوية للصفوف (9-12) تم تطويره بواسطة "مبادرة متضمنة لرياضيات وعلوم مونتانا" Systematic Initiative for Montana Mathematics and Science (SIMMS). ▪ الرياضيات المتكاملة (SIMMSIM) هي منهاج رياضي متكامل للصفوف (9-12) يستخدم سياقات العالم الواقعي بمعالجة موضوعية متكاملة، ولجميع الطلبة. ▪ يعالج المفردات الرياضية بطريقة مخالفة ترتيبيا للمناهج التقليدية، ويصلون إلى بعض الموضوعات الرياضية التي لا تدرج عادة في مرحلة المدارس الثانوية. ▪ يدعو إلى استخدام أشكال تدريسية مختلفة، تتضمن مجاميع عمل فردية وتعاونية، ومناقشات مفتوحة للصف الدراسي، ومشاريع فردية وجماعية.

التطوير المهني: مصدر المعلم
Professional Development: A Teacher's Resource

يعد التطوير المهني من أهم الموارد التي تساعد على الارتقاء: بمهارات التعليم المؤثرة، والتقانات الخاصة بمعلمي الرياضيات. إن تربويات الرياضيات هو حقل يعاني باستمرار من حالات النمو والتطور، وكما هو الحال في المهنة الطبية، حيث يشارك الأطباء وكوادر التمريض بحلقات دراسية وتدريبية للتواصل مع ميادين التطوير السائدة في حقل اختصاصهم، فإن على معلمي الرياضيات المحترفين المشاركة في البرامج المستمرة للتطوير المهني لتعميق معرفتهم، وخبراتهم، وقدراتهم بوصفهم معلمين بصفوف المدرسة. يستخدم اصطلاح "التطوير المهني" دائما بالتبادل مع اصطلاحات أخرى مثل "تدريب المعلمين"، أو "تطوير الكادر التدريسي"، أو "التدريب في أثناء الخدمة".

ينبغي أن يحسن تنظيم هذه الأنشطة، وتحدد توقيتاتها الزمنية باستمرار، وتعد بعناية بالغة لغرض زيادة، وإثراء، وتحسين: المهارات الرياضية والتعليمية، والمعرفة، وقدرات التربويين. إن من الضروري ملاحظة أن الهدف الجوهري للتطوير المهني يكمن في تحسين تعلم الطلبة. من ناحية ثانية، تتضمن موضوعات التطوير المهني الأولى الفقرات الآتية:

1- توفر للمربين فرصة تقييم الذات بمعيار النمو المهني.
2- تساعد التربويين على تطبيق المبادئ والمفاهيم الجديدة بعملية التعليم/التعلم في ضوء الاطلاع على التقدم التقني.
3- تدعم التربويين على توسيع آفاقهم الرياضية.
4- تساعد التربويين على تطورهم الشخصي والمهني.
5- تساعد على دعم التربويين في تطوير المفاهيم والتقانات التي تمتاز بكونها مؤثرة وتمتلك دقة رياضية. وتسهم في: خلق، وتحريض، وشحن قدرات الطلبة على طريق تقدير الرياضيات وتطبيقها ميدانيا.
6- الاستمرار بمعايير تميز عالية خلال برامج الرياضيات ومناهج الدراسة القائمة.
7- إتاحة فرصة الاستجابة للمشاكل الخاصة بالمناهج الدراسية أو بالتدريس.
8- تطبيق طرائق تعليم وممارسات تعلم مستحدثة.

أنواع التطوير المهني
Types of Professional Development

يمكن تقديم مجموعة من أنشطة التطوير المهني لكل من مجاميع المعلمين الصغيرة أو الكبيرة. وتتضمن هذه المجموعة: ورش عمل منفردة، أو سلسلة من ورش العمل التي يتم إدارتها

بواسطة خريجي كليات، ومعلمي رياضيات – متدربين، أو استشاريين.

تقدم ورش العمل بإعدادات وأشكال مختلفة، ويمكن تخصيصها بحيث تتلاءم مع الحاجات الخاصة بالمدرسة، أو المقاطعة خلال ساعات الدوام أو خارجها، أو في العطل الأسبوعية، إن طلب ذلك.

تستطيع المدارس أو المقاطعات أن تطلب ورش عمل منفردة والتي تركز على موضوعات محددة أو سلسلة من ورش العمل والتي تعالج موضوعا شائعا. قد تعد الورش جزءاً من مؤتمر، أو معهد. أو ملجأ. إن الورش المعدة للمعلمين الجدد أو المبتدئين، تساعد من يشارك فيها من معلمين جدد على اكتساب خبرات تعمق حساسيتهم باتجاه الاحتياجات التربوية والنفسية فضلا عن حاجة طلبتهم الشاملة للرياضيات.

إن هذه الخبرات سوف تنشئ فهماً افضل بكيفية تفكير طلبة الثانوية والية تعلمهم. ويمكن إعداد ورش العمل لذوي الخبرة من المعلمين لتعميق وزيادة مهاراتهم في تعليم موضوعات متخصصة. فضلا عن ذلك يمكن تجهيز ورش العمل لمطوري الكوادر والمشرفين لغرض زيادة الدعم من خلال مدرستهم أو منطقتهم.

ينبغي أن تتركز اهتمامات الورشة على الأنشطة التي تنسجم مع احتياجات الطلبة، والتي تتضمن تعميق المعايير: المحلية، والولاية والوطنية.

تتضمن الأشكال الأخرى للتطوير المهني المؤتمرات، ومراكز تفرغ، والمساقات الجامعية في أثناء الخدمة، والمعاهد. فتستطيع المؤتمرات أن توفر للمجاميع الكبيرة دورة مكتملة وإبراز عدد من المتحدثين الأساسيين. قد تتألف المؤتمرات من مجموعة ورش أو محاضرات بارزة لموضوعاتها، والتي تلائم مجاميع اصغر.

يضاف إلى ذلك إمكانية مشاركة متحدثين ضيوف، يتضمنون تربويين رياضيين معروفين وطنيا أو عالميا بعروض تفاعلية Presentation من خلال بث فيديوي والذي يصل إلى عدد كبير من المستمعين وطنياً ودولياً.

قد تستغرق أحداث المؤتمر نصف يوم أو يوما بكامله.

يمكن تجهيز مراكز التفرغ المتخصصة للتطوير المهني لمجاميع كبيرة، و المجاميع الصغيرة التي تتألف من جلسات متعددة. إن مركز التفرغ هو عبارة عن منهج داخلي وثيق الصلة بموضوعات تخص تربويات الرياضيات. وتتراوح وقائع التفرغ – بصورة عامة– بين يومين إلى ثلاثة أيام، وقد تتضمن موضوع/ مؤتمر كل يوم. وتستطيع معاهد التطوير المهني تغير أنشطة تناسب أعداد المجاميع الواسعة، وتقدم معالجة مركزة وطويلة الأمد لموضوع محدد أو موضوعات متعددة. وتتراوح الفترة التي تعتمدها هذه المعاهد بين أسبوع أو أسبوعين أو ثلاثة أسابيع من الأنشطة التي توفر للمشاركين باستمرار طيلة هذه الفترة.

تستمر المعاهد خلال الصيف أو خلال عطلة منتصف الشتاء، في ضوء حاجات المدرسة أو المقاطعة.

يمكن تقديم مساقات بعد الجمعة في: تربويات الرياضيات، ومحتوى الرياضيات، وتقنيات التعليم، والإشراف الرياضي، ويتوقف ذلك على الحاجات الخاصة بالمدرسة أو المقاطعة. يمكن توفير هذه المساقات من خلال برنامج تعاوني مع جامعة، يضاف إلى ذلك إمكانية تطويع مساقات ما بعد الدراسة الجامعية لتعكس احتياجات المدرسة أو المقاطعة.

هناك وفرة من فرص التطوير المهني تقترح أمام من خلال منظمات تربويات الرياضيات على المستوى المحلي، أو الولاية، أو الوطني، أو على شكل أنشطة تدريبية للمعلمين تعد في مدارس محلية ومدارس المقاطعة.

يمكن للخطوة التمهيدية الخاصة بالتطوير المهني أن تطوع وتقدم المعلمين والمشرفين وأولياء الأمور، والكوادر المساعدة شريطة أن تكون متوافقة مع المعايير المحلية، والولاية، والوطنية.

يظهر فيما يأتي مجموعة من النماذج عن المبادرات الإضافية للتطوير المهني:

- الاتفاقيات الوطنية أو المحلية في تربويات الرياضيات.
- ملاحظات المعلمين.
- نصائح المعلمين.
- حلقات دراسية عن تطوير المناهج.
- التفقد الداخلي للمدرسة.
- مراكز مصدر المعلم.
- شركات القطاع الخاص.
- برامج التبادل الخارجي.
- الدروس الإيضاحية.
- بحوث الأداء.
- تقويم كتب الدراسة والبرمجيات.
- المساقات في أثناء الخدمة.
- التفرغات Sabbaticals المستخدمة للتعزيز المهني.
- فريق الدعم المدرسي.
- مجاميع عمل الرياضيات.
- تأمل الأقران.

- مصادر التقنية وبرامج التقويم.
- تقويمات المعلمين.

يستنتج بأن الخطوة التمهيدية للتطوير المهني لمعلمي الرياضيات ينبغي أن تتضمن تشكيل من المحتوى الرياضي من وطرائق التعليم المناسبة، المشاركة الفاعلة للمعلمين، وفهم للمشاكل اليومية، ووتائر التعليم، والمواقف التي تنشأ في غرف الصف، والموازنة بين التطبيقات النظرية والعلمية، وبيان واضح للأهداف العامة والخاصة للمشاركين، وفرصة للمعلمين بتوظيف المهارات والطرائق الجديدة في غرف الصف، والاستمرار بالدعم الدائم والأنشطة التكميلية.

المصادر للمعلمين Resources For Teachers

توجد وفرة من الموارد المتاحة التي تساهم بدعم معلمي الرياضيات ومساعدتهم على التطور والتحسن على طريق الاحتراف. يمكن الدخول إلى هذه الموارد إما محليا من خلال المدارس أو مدارس المقاطعة أو من خلال مصادر خارجية.

تمتلك المدارس ومدارس المقاطعة إمكانية تدريب المعلمين من خلال مساقات في أثناء الخدمة، ودروس خاصة، مجاميع مناقشة، مؤتمرات، لجان، ورش عمل، وحلقات دراسية، وصادرات تمهيدية أخرى على طريق التطوير المهني.

إن عدداً من هذه المبادرات يمكن تطويعها لتتناسب مع المتطلبات الخاصة بالمعلنين، كذلك تساعد مراكز الموارد المتخصصة للمعلمين/ والرياضيات (والتي تمتلك احدث مواد المناهج الدراسية)، والكتب المنهجية، ونماذج الناشرين، ومجلات مهنية، مواد تشكيلية، وموارد سمعية-مرئية مثل الأقراص الليزرية، وبرمجيات حاسوبية، وأشرطة فيديو وأشرطة سمعية، على تحسين وتطوير خبرات المعلمين في الرياضيات وأصول التدريس، وكما يمكن إحراز النصائح، والإرشادات، والاستشارات من خلال مهني المدرسة، مثل رئيس القسم، ومنسق الرياضيات، ومدرب المدرّس، أو مرشد الصف.

يوفر هؤلاء الأشخاص اقتراحات مفيدة بخصوص تطبيق مناهج الدراسة، إدارة غرفة التدريس، مهارات التدريس، وإدارة المواد الدراسية. يضاف إلى ذلك قدرتهم على إدارة دفة دروس توضيحية حول موضوعات رياضية محددة، وصياغة تقنيات مختلفة لأنشطة التعليم.

هناك عدد كبير من الموارد الخارجية والتي تتوفر لمعلمي الرياضيات. فمؤسسات التعليم العالي مثل الكليات والجامعات تقدم فهما مختلفة للمعلمين على تعلم الرياضيات وتعليمها، وتتضمن هذه الفرص برامج منح الشهادات للمعلمين قبل الخدمة الوظيفية أو في إثنائها.

تشمل الموارد الجامعية: مكتبة حرم الجامعة التي تستطيع توفير كتب وثيقة الصلة بالتدريس، ومجلات أكاديمية، ومواد سمعية-مرئية وموارد أخرى تختص بميدان التعلم والتعليم. بالمقابل فإن الهيئة التدريسية الجامعية تستطيع تقديم عون علمي وثمار خبرتها في مجالات محددة تثير الاهتمام والبحث، والرياضيات ومساقات عمل تربويات الرياضيات، المؤتمرات، وورش العمل، وحلقات دراسية وبرامج خاصة لتهيئة المعلمين التي تركز على ارتباطات الشراكة التعليمية القائمة بين المدرسة والجامعة.

يوجد في كل ولاية قسم للتربية يساهم بتوفير موارد خصبة لمعلمي الرياضيات. وتتضمن الخدمات التي توفرها الولاية: معلومات حول التحصيل الدراسي والمهني للمعلم، وأسماء وعناوين المدارس المحلية، وسياسات الاختبار والتقويم، ومنح القرارات/ المقترحات وتطوير المناهج الدراسية.

المنظمات المهنية Professional Organizations

إن إحدى المنظمات الأساسية التي تدعم معلمي الرياضيات في جميع مظاهر الرياضيات وتربويات الرياضيات هو المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM). يوفر مجلس (NCTM) مطبوعات لتربويات الرياضيات المهنية، والتي تتضمن: تعليم الرياضيات للأطفال، وتعليم الرياضيات في المدارس المتوسطة، ومعلم الرياضيات، ومجلة البحوث في تربويات الرياضيات، ونشرات إخبارية متعددة لـ NCTM، وكتب سنوية، ووفرة من المطبوعات الأخرى التي تركز على موضوعات مهمة في تربويات الرياضيات.

فضلا عن ذلك تتكفل NCTM بجميع المؤتمرات الوطنية والمحلية التي تنعقد خلال العام الدراسي.

تعطي هذه المؤتمرات، لمعلمي الرياضيات، فرصة التقديم لورش العمل، أو المشاركة على مستوى المنطقة أو البلاد.

يوجد مورد مهم على مستوى المنظمات لمعلمي الرياضيات هو الجمعية الأمريكية للرياضيات Mathematical Association of America (MAA)، والتي تعمل على توجيه رياضيات الاختصاص على مستوى الكلية.

الاعتمادات المالية وأنواع أخرى من الدعم Funding and Other Support

هناك عدد لا بأس به من الموارد المنتشرة في القطاع الخاص فضلا عن المنظمات الرياضية والتعليمية فتوجد وفرة من

النقابات والمؤسسات التجارية التي تدعم المبادرات في ميدان تربويات الرياضيات.

في الحقيقة، إن كثيرا من هذه النقابات قد أقامت شراكات إقليمية مع المدارس المحلية في المقاطعات، وعمدت إلى تزويدهم بالموارد التي يفتقرون إليها مثل: الدعم المالي من خلال منح تشجيعية، المدارس، والأعمال التجارية، ومشاريع على مستوى المجتمع، ومتحدثين، وقياديين لورش العمل، وبرامج للتبادل والتعليم التعاوني، وبحوث إجرائية، وأخيرا التبرع بالمعدات المختلفة.

مصادر المجتمع Community Resource

يمكن العثور على وفرة من الموارد المفيدة في المجتمع المحلي. فعلى سبيل المثال، هناك الكثير من أولياء الأمور الذي يمتلكون مهارات خاصة، ودافعا ذاتيا للقيام بعمل يفيد المجتمع، أو خبرة في حقل محدد بميدان الرياضيات. حيث يستطيع هؤلاء زيارة المدارس وممارسة عملية توجيه للطلبة والمعلمين.

فضلا عن ذلك فإن كثيرا من الناس الذين يمثلون مجتمع الأعمال والتقنية، مثل: المصارف، والتأمين، والمبيعات، وتقنيات الحاسوب، يمتلكون الفرصة المناسبة للمشاركة بوصفهم ناصحين مخلصين وتربويين مشاركين.

تبرز موارد مجتمعية أخرى مثل: الوكالات الفدرالية، المتاحف، الحدائق العامة، المطارات، وشركات الخدمات التي تستطيع توفير: نشرات، وتتكفل بأعداد رحلات الطلبة، وإعداد عروض تبين طبيعة استخدام الرياضيات في حياتنا اليومية.

أخيرا، هناك عالم متكامل من الموارد الثمينة التي تتوفر من خلال مؤسسات النشر، حيث يستطيع الناشرون تجهيز كتب مدرسية، ومواد تجارية، وجلسات تدريبية حول الكتب المدرسية التي تم تبنيها حديثاً.

المؤسسات الوقفية Foundations

هناك عدد من المؤسسات الوقفية التي تدعم تربويات الرياضيات على المستوى الوطني، مثل المؤسسة الوطنية العلمية-الوقفية National Science Foundation (NSF) أو الإدارة الأمريكية للتعليم U. S. Dep. of Education. من ناحية ثانية، توجد وفرة من المؤسسات الوقفية الخاصة التي تدعم المبادرات المحلية، وتتوفر مكتبة متكاملة مكرسة للمؤسسات الوقفية في الولايات المتحدة.

مناظرة الرياضيات A Mathematics Debate

تدور مناظرة معقدة داخل دائرة المجتمع الرياضي بخصوص كيفية تعليم الرياضيات في مدارسنا. وقد عمد ممثلون من مدارس المقاطعات، والمدارس الخاصة، والجامعات يضاف إليها القطاع الخاص إلى تنظيم: منتديات للحوار، ومجاميع متخصصة، ومناقشات بخصوص تقييم فعالية تربويات الرياضيات. ويبدو بأن المنظور التقليدي يدعم مبدأ الاتجاهات الإجرائية، والتي تتضمن: الاستظهار عن ظهر قلب Memorization، والتنقيب وممارسة القواعد والتعريفات بوصفه طريقاً أمثل لتعليم الرياضيات وتعلمها. بالجهة المقابلة يبرز التيار المعاصر، مثل منظور التيار البنيوي Constructivists، والذي يقترح أن على الطلبة استثمار قدراتهم الفطرية لصياغة خوارزمياتهم (Algorithms) في سبيل اكتساب ملكات ذاتية من الموضوعات الرياضية المحددة.

ناقش التربويون الرياضيون هذه الآراء والاهتمامات لسنين طويلة، يضاف إلى ذلك أن هذه المناظرات قد ازدادت تشابكا وتعقيدا بنتائج الدراسة العالمية الثالثة للرياضيات والعلوم Third International Math & Science Study (TIMMS) عندما ظهر بأن التلاميذ الأمريكان في الصف الثامن كانوا متوسطين، وأن مجاميع تلاميذ الصف الثاني عشر كانت ضعيفة ومتدنية عند مقارنتها بنفس مجاميع الأعمار في بلدان أخرى.

إن المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM) يدعم باستمرار فكرة أن الرياضيات ينبغي تدريسها من خلال بيان وترسيخ الجانب المفاهيمي الذي ترتكز إليه، بمعنى آخر، أن المعلمين ينبغي عليهم تعليم الرياضيات من أجل تعميق الفهم، وأن يجعلوا الرياضيات اشد ارتباطا (من حيث وظيفتها) مع حياة الطالب اليومية. على كل حال، فقد واجهت NCTM مقاومة من التربويين الذين يدعمون الاتجاه الاتجاهات التقليدية. من ناحية ثانية إن وثيقة معايير NCTM 2000 تعرض رؤية شمولية تتضمن هيكلا من الأفكار التي ستساهم في صياغة المنظور المستقبلي لتربويات الرياضيات في العقود القادمة.

في جميع الأحوال، سواء اعتنقت معايير NCTIM أو رفضت، فإن النقاشات والمناظرات المهنية ينبغي أن تستمر، وعلى مجالس المدارس المحلية، والمنتديات الاحترافية، ومجاميع العمل، وفرق تدريس الآباء، أن تستمر بفتح الحوار وتطوير عرف الممارسة الانعكاسية Reflective Practice.

إن طرائق التعليم والتعلم لرياضيات المدارس الثانوية هي عملية تغيير مستمر لارتباطها المباشر بالتقدم العلمي وبروز

حاجات اجتماعية مختلفة، وعليه فإن تطوير ممارسة الانعكاسية سيوفر عمقا بالبصيرة، ودليلا مرشدا، كما سيساعد على تسهيل التغيير النظامي- الإيجابي في تربويات الرياضيات، وفي غرف تدريس الرياضيات.

تمارين Exercise

1. صف، من خلال منظور مدرسة ثانوية، الفروق الأساسية بين معايير العمليات والمعايير الشاملة في ضوء مخطط NCTM الوارد في معايير ومبادئ رياضيات المدرسة.
2. وضح كيف يؤثر العامل الاجتماعي فيغير دور رياضيات المدرسة.
3. صف، كيف تستطيع بوصفك معلماً للرياضيات، أن تمكن الطلبة وتجهزهم لعالم الغد.
4. اختر موضوعا بالرياضيات، ولمرحلة دراسية ما، وبادر بكتابة الخطوط العريضة لمخطط درس يصف معايير NCTM العملياتية والمحتوى.
5. قم بتصميم مخطط درس الرياضيات الذي يدعم بيئة التعلم الفعال
6. إلى ماذا تتطلع في برنامج رياضيات أو منهاج دراسي نموذجي؟
7. صف ثلاث قضايا حرجة تعترض معلم الرياضيات في هذه الأيام.
8. صف درسا بالرياضيات يوظف التقنية بصورة مناسبة.
9. بناء على ما ورد في الدراسة العالمية الثالثة للرياضيات والعلوم (TIMMS) فإن طلبة الصف الثامن بالولايات المتحدة كانوا متوسطي التحصيل، وان مجموع نقاط طلبة الصف الثاني عشر كانت متدنية بشكل ملحوظ. فمن خلال ممارستك لمهام معلم رياضيات:
   أ. صف بعض المبررات الممكنة لحصول طلبة الصف الثاني عشر على نقاط متدنية.
   ب. صف بعض الحلول المحتملة التي تساعد على مواجهة هذه الإخفاقات.
10. تعاني الولايات المتحدة من شحة ملحوظة في المعلمين، حاول أن تصف ثلاثة حلول ممكنة تساعد في مواجهة هذه الظاهرة.
11. عدد، وصف باختصار، خمس خصائص مميزة للمدارس ذات التحققات المنخفضة والمرتفعة.
12. صف كيف يدعم برنامج/منهاج الرياضيات التوقعات المرتفعة لجميع الطلبة.
13. بناء على كونك معلم رياضيات، كيف يمكن أن تواجه مسألة قلق الرياضيات لدى الطالب؟
14. هناك طلبة قد يحتاجون دعما إضافيا بالرياضيات، وبناء على كونك معلم رياضيات، صف كيف ستهيئ هؤلاء الطلبة، علميا، بحيث يستطيعون الوصول إلى الطاقة الكامنة القصوى لديهم؟
15. صف باختصار، مع تسويغ خمسة أصناف من أنشطة التطوير المهني التي تدعم خبرات معلمي الرياضيات بالمدارس الثانوية، وتعمق تقنياتهم داخل غرفة التدريس.
16. ادرج وبادر إلى وصف خمسة موارد من المجتمع التي تستطيع تعميق محتوى منهاج الرياضيات العائد لك.
17. تتضمن المناظرات في دائرة تعليم الرياضيات منظورين أساسيين: النظرة التقليدية، والتي تدعم مبدأ الاتجاهات الإجرائية، وتتضمن الاستظهار عن ظهر قلب، والتنقيب وممارسة القواعد والتعريفات كطريق أمثل لتدريس الرياضيات وتعلمها، والتيار البنيوي الذي يتبنى الاعتقاد بأن على الطلبة استثمار قدراتهم الفطرية لصياغة خوارزمياتهم.
   أ. بصفتك معلماً في مدرسة ثانوية، حاول أن تصف اتجاهاتك التعليمية مع تضمين مبرراتك.
   ب. صف بإيجاز درسا لمادة الرياضيات توازن من خلاله كلي المنظورين.

SUGGESTED REFERENCES مراجع مقترحة

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Changing School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1981.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). Gender Differences in Achievement, IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), 2000.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS 1999-International Mathematics Report, 1999.

National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century. The Glenn Commission Report. Before It's Too Late. Jessup. MD: Education Publications Center, 2000.

The Ford Foundation. Solving the Main Problem. April, 1999.

ARC Center at COMAP. Inc. New Resources for School Mathematics, Lexington, MA: COMAP, Inc., 2001.

North Central Regional Educational Library. Active, Meaningful Mathematics Learning. A Guidebook, 1991.

Cozzens, Margaret B., Learning From. TIMSS-R about U.S. Mathematics Achievement. The Mathematical Association of America (MAA), May/June, 2001.

National Center for Educational Statistics (NCES). Pursuing Excellence: A Study of U. S. Twelfth Grade Mathematics and Science Achievement in International Context. U. S. Department of Education. (TIMSS), 1998.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 2000.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Curriculum and Evaluation Standards for Scool Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Professional Standards for Teaching Mathematics Reston, VA: NCTM, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. Learning Mathematics for a New Century: 2000 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Edited by Maurice J. Burke and Frances R. Curcio. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

For more:

The NRC report is at

www.nap.edu/books/0309069955/html.The NCTM Web site is http://www.nctm.org.

For an opposing view:

Schmidt, William H., Curtis C. McKnight, Senta A. Raizen. A Splintered Vision: An Investigation of U.S. Science and Mathematics Education, Boston: Kluwar Academic Publishers, 1997. (The Executive Summary of this publication is available at the following website: ustimss.msu.edu/splintrd.htm.)

http://nces.ed.gov/nationsreportcard/mathematics/results

2 التخطيط طويل المدى وقصير المدى
Long – Range and Short – Range

مثلما يركز الممثل تماما على النص والموسيقي على قطعة موسيقية، يركز المعلم على خطة الدرس. من أجل هذا تتطلب كل وحدة وكل درس يومي وجود خطة. وسواء أكانت تقدم مفهوما جديدا، أو تساعد الطلبة بالتمرين على اختبار مقبل، أو تراجع اختباراً تم حديثا، أو تمثل وتعزز مهارات لمن يحتاج ذلك، أو تقسم الصف إلى مجموعات عمل تعاونية متعددة، أو كنت تستخدم أية طريقة تعليم أخرى، فان من واجبك أن تخطط لأدائك الصفي. ويتعاقب هذا الأداء على مر التخطيط طويل المدى وقصير المدى.

و يتم تطوير كل دورة كاملة تعلمها من خلال سلسلة من خطط الوحدات وتعدّل كل خطة للوحدة أكثر لتكون خطط درس يومية. سنقدم في هذا الفصل والفصل الذي يليه، ضروبا من الخطط اليومية وخطط الوحدات المبنية على المعايير. ماذا يعني أن تكون مبنية على المعايير؟ يعني هذا أنه فضلا عن المفردات الموجودة بطبيعة الحال في خطة الدرس مثل الموضوع و ((افعل الآن)) أو التمرين الصفي، أو الفعالية التحفيزية، تستخدم خطة الدرس المبنية على المعايير مفاهيم مثل الاستكشافات، والربط، ثم التقويمات.

يجب أن يكون المعلم الناجح (خلال كل درس) قادرا على تبسيط وإيضاح كل ما هو معقد وغامض. كما يجب أن يكون المعلم مصدر إلهام لطلابه فضلا عن مقدرته على تخطيط، وتنظيم، وخلق أي نوع من الدرس والذي يناسب تطويريا صفا لطلاب شباب. كما يجب أن تكون نوعيات الأسئلة المطروحة من المعلم قد تم مراعاتها بدقة وأن تكون قد خطط لها سلفا، وأن تكون مصاغة لاستحصال المعلومات المرجوة من الطلاب من غير تخويفهم أو مفاجئتهم. وأخيرا، يتضمن التخطيط للدرس عموما الواجب البيتي، وهي الممارسة المقبولة غالبا عاليا والتي يعتبرها العديد من المعلمين امتدادا حقيقياً للدرس.

ونأمل أن نقدم لك عزيزي القارئ،في هذا الكتاب معلومات وافية لتكوين آرائك الخاصة وأساليبك في مباشرة الدروس، وسؤال الطلاب، وتحفيزهم، ولابتداع واجبات بيتية، والتي يفترض أن تنسجم جميعها مع الدرس وفق أسلوبك المرئي الخاص.

التخطيط طويل المدى
Long–Range Planning

بينما تكون الحركة والمرونة والتغييرات هي السمات البارزة للنشاطات الصفية اليومية، فقد تكون الدروس مخطط لها على مدى طويل خلال وحدة كاملة من العمل. وبطبيعة الحال، يندر احتمال اتباع أي درس حرفيا كما هو مكتوب، لذا عندما تكتب الخطط طويلة المدى ينبغي أن تجري التعديلات يوميا. ولا يجب أن يمتعض المعلمون من عمل التعديلات هذه لمجرد أن ترك الخطة الأصلية مكتوبة كما هي يعد أمراً أيسر.

ولا يمكن لدرس مفرد أن يعد في مكان مفرغ لان كل وحدة العمل هي مجموع دروسها المفردة. ويجب أن ينظر لكل درس يومي على أنه جزء من صورة أوسع، مع توفر القصد (أو النية) لتلبية الآمال طويلة المدى. ولنفترض بأنك تدرّس موضوع ((الجذور)) في الجبر. فبعد قراءة المساق المقرر للدراسة، والمادة الملائمة في الكتب المنهجية، وبعد البحث عن التوجيه من الزملاء ذوي الخبرة، عليك أن تتحدد بسلسلة من الدروس المرتبة منطقيا والتي ستشمل كل الموضوعات ذات الصلة فضلا عن مراجعة ودروس تقييم. وتعد العينات الآتية وحدات متوقعة:

وحدة عينية: الجذور Sample Unit: Radicals
دروس يومية مقترحة Suggested Daily Lessons

1. الأسس والجذور: تقويم الجذور باستخدام الحاسبة العلمية.
2. البرهنة الفيثاغورية؛ حل المعادلات من الدرجة الثانية الصيغة $x^2 = k$ حيث تكون k أو لا تكون عدد صحيح مربع تام.
3. تقريب الكسور العشرية.
4. تقدير القيمة تبسيط الجذور وتركيبها.
5. ضرب وقسمة الجذور.
6. حذف الجذور للمقامات ذات الحدين.
7. المعادلات الجذرية.
8. مراجعة عامة للصف.
9. امتحان مجموعة صغيرة (لأغراض التقييم)
10. تقويمات الطلاب التحريرية للوحدة (لأغراض التقييم).

وحدة عينية: التحليل Sample Unit: Factoring
دروس يومية مقترحة Suggested Daily Lessons

1. المعاني والتعاريف.
2. العوامل الأحادية المشتركة.
3. الفرق بين مربعين تامين.
4. ضرب متعددة الحدود.
5. ضرب فويل (FOIL)
6. قسمة متعددة الحدود.
7. القسمة المطولة بحد مفقود في لمقسوم.
8. تحليل ثلاثية الحدود للصيغة ax^2+bx+c
9. تعريف الدوال التربيعية.
10. حل المعادلات التربيعية.
11. مراجعة
12. تقييم.

وحدة عينية: الهندسة اللاأقليدية
Sample Unit: Non-Euclidean Geometry

إن هذه الوحدة مناسبة لإثراء منهج الهندسة. وتفترض معرفة مسبقة بالخطوط المتوازية، ومتوازي المستطيلات، ورباعيات الأضلاع الخاصة الأخرى. ويمكن تعليم هذه الوحدة الهندسية اللاأقليدية إما مباشرة بعد وحدة عن المتوازيات أو أي وقت آخر بعد ذلك. ويجب أن تتألف على الأقل من الدروس الثمانية المتتابعة الآتية مع ملاحظة أنها تحتوي على اقتراحات لمصادر في الانترنيت.

دروس يومية مقترحة Suggested Daily Lesson

1. مدخل إلى الهندسة اللاأقليدية– الزائدة المقطع والكروية.
2. رباعيات الأضلاع ساخيري – تعريف وخصائص متعددة.
3. مساحات التطابق المبنية على رباعيات ساخيري.
4. مجموع قياسات زوايا المثلث.
5. المثلثات المتشابهة: قطعة مستقيمة تصل منتصفي ضلعي مثلث في كل نوع من الهندسة.
6. استخدام اللاأقليدية (برامجيات مجال عام) – استكشاف Exploring.
7. أعمال الفنان الرياضي كليفورد سنجر.
8. ملخص.

تتزايد أهمية الهندسة اللا أقليدية في العلم والتقنية المعاصرين.

إن الهندسة اللا أقليدية معاكسة للحدس. وتساعد غرابتها الطلاب في إدراك أهمية النظام البديهي.

ويمكن للطلاب أن يستكشفوا بصورة تفاعلية المثلثات التي يرسمونها في الهندسة زائدة المقطع باستخدام اللاأقليدية المنطلقة من الموقع العنكبوتي (Website).
http://math.rich.edu/~joel/noneducalid/.

ولا يوجد كتاب منهجي قادر على هذا النوع من الاستكشاف التفاعلي.

ويستطيع الطلاب عبر الشبكة مشاهدة أعمال الفنان/ الرياضي المعاصر والذي يتأثر عمله (فنه) بالهندسة اللاأقليدية.

مصادر على الخط

http://math.rice.edu/~joel/NonEuclid/.
http://www.math.toronto.edu/mathnet/questionCorner/NonEucgeom.html.
http://forum.swarthmore.edu/dr.math/problems/Non-Euclidean.html
http://www.encylopedia.com/articles/09320.html

تقييم Assessment

بعد الدرس رقم 7، سيناقش الطلاب نتائج استكشافاتهم مع الصف الدراسي.

وبعد مشاهدة العمل الفني ذي الصلة، سيطلب من كل طالب اختيار عمل فني واحد وكتابة مقالة قصيرة حوله.

مصادر للمساعدة في التخطيط طويل المدى
Sources to Assist in Long-Range Planning

إذا كنت على علم مسبق (قبل سنة أو فصل كامل) بأنك سوف تقوم بتعليم مساق معين، فإن بعض أو كل الخطوات التالية ينصح بها لمساعدتك في إعداد نفسك. وعلى أية حال فإذا علمت بالموقف قبل أيام قلائل أو أسابيع فقط فيمكن إجراء تعديلات الاقتراحات المدرجة. وسوف تتنوع هذه التعديلات بالاعتماد على كمية وقت التحضير المتاح، وكذلك على حماسك، وخبرتك، وتوقعاتك عن أداء الطلاب.

مشاهدة معلم ذو خبرة
Observe and Experienced Teacher

ليست هناك خطوة مفيدة وعملية ومساعدة يمكن أن تقوم بها أكثر من مشاهدتك اليومية لمعلم كفءٍ ذو خبرة، يعلم حالياً المساق الذي تتوقع أن تعلمه. أولاً، خذ موافقة المعلم لمشاهدة تعلمه. فإذا ما وافق، راقبه بانتظام وسجل ملاحظاتك الدقيقة حول ما تشاهده وتسمعه. أكتب الأسئلة والملاحظات بل وحتى الدعابات كي يمكنك استخدامها مستقبلاً. لاحظ إدارة الواجبات البيتية وإجراءات الاختبار وإدارة الصف. ولاحظ بالأخص أساليب التحفيز والطرق الذكية لتطوير الموضوع. وحتى لو قررت تماماً (تحسين) أسلوبه/أسلوبها فلديك على الأقل أساسٌ متين لحكمك.

وسيكون من الأمور المساعدة إذا كان بمقدور المعلم الذي تشاهده لقاءك بانتظام لمناقشة المساق وأسباب استخدام أساليب تعليم معينة.

أحصل على عدة مخططات للمساق
Obtain Several Course Outline

قد يكون مشرفك قد أعطاك المخطط الرسمي لمدرسة، أو مساق دراسة أو منهجاً حكومياً مناسباً. ويمكنك بل وينبغي عليك تأمين مخططات مشابهة من مدارس أخرى أو أقسام تعليمية حكومية بمراسلتهم. وقد تتوفر البعض منها على الشبكة. ففضلاً عن تزويدك بسلسلة مقترحة من المواضيع في المساق، سيعطيك المخطط التمهيدي دليلاً جيداً أخذاً بالحسبان الكمية التقريبية للوقت الذي سيخصص لكل موضوع في المساق.

وتقدم بعض مناهج الولاية والمناهج المحلية الإرشادية سلسلة من خطط الدروس لاستخدامها في المساقات المنتظمة (المعيارية). ويجب أن تؤخذ هذه الخطط بعين لاعتبار. ولكن يجب استخدامها عند الضرورة كي لا يكون أسلوبك ((مقيداً)) بخططٍ مكتوبة من شخص آخر ولا تكون بالضرورة معدةً لاحتياجك. والمهم هو أن تجمع ما أمكن من المعلومات المنهجية حول المساق التي ستعلمه.

الاطلاع على كتب دراسية مختلفة
Examine Various Textbooks

من الحكمة قبل البدء بأي تخطيط وحداتي أن تطلع على كتب دراسية مختلفة التي تغطي المفاهيم التي تريد تعليمها. وتقدم الكتب الدراسية في الغالب مختلف المداخل إلى مواضيع معينة ومصدراً كبيراً للمسائل التي يمكن الاختيار من بينها. وينبغي أن يكون للمكتبات الجامعية أو لقسم الرياضيات في مدرستك طبعات متنوعة للطلاب أو للمعلمين من الكتب الدراسية. وإذا كنت تعلم أصلاً، فان الناشرين سيسعدون عموماً بتجهيزك بنسخ من الكتب الدراسية آملين بأن توصي بتبني كتبهم في صفوفك.

وعند حصولك على نسخة المعلم للكتاب الدراسي، راجع المادة التقديمية لتحدد المدخل الفلسفي ووجهة نظر المؤلف. ولاحظ الترتيب الذي تقدم به الموضوعات، لأنه يحتمل أن يؤثر ذلك على تقديمك لدرسك على مدار السنة الدراسية. وبطبيعة الحال، ستكون هناك بعض الموضوعات التي ستطورها بمعزل عن ترتيب الكتاب الدراسي، لذا عليك تجنب اختيار كتاب دراسي يختلف كثيراً عن مفهومك الخاص في تقديم الموضوع المناسب.

والأهم من ذلك، أن تختار كتباً دراسية تقدم طرقاً تدريسية تلبي أنماط تعلم طلابك وتلائم الخطوط العامة للمنهاج الحكومي والمحلي.

عوّد نفسك على مكتبة المدرسة ومركز الأعلام
Familiarize yourself with the School Library and Media center

قد يكون لمدرستك أو مكتبة قسمك/ مركز الأعلام كتباً

ومصادر شبكية (انترنيت) يجدها طلابك مفيدة. وقد تشمل هذه المصادر مساحة واسعة من المواد للطلاب لكل المستويات والقابليات. ويجب عليك وعلى طلابك كذلك أن تبدأوا جميعاً بمجموعات كتبكم الرياضية. وبالإضافة إلى المنتجات التجارية اللا محدودة، ينشر ——(NCTM) ويقدم وسائل مساعدة عديدة متوفرة.

أدرس خطط الدروس السابقة (القديمة)

Study Old lesson Plans

تذكر أن الدرس القديم يمكن أن يكون قد قدم بواسطة معلم محترف. ورغم أن أساليب التعليم قد تطورت عبر الزمن، فقد تكون خطط الدرس القديمة لا تزال مصدراً للتعلم فيما يخص الأسلوب، والطرائق التدريسية، وصياغة الأسئلة، والمعرفة وغيرها.

أكشف الأفكار على الشبكة Find Ideas Online

تعد الشبكة العالمية العنكبوتية مصدراً بارزاً لأفكار التعليم وخطط الدروس، والتي يمكن مطابقتها مع خطط الوحدات. إن عدد المواقع والارتباطات (Links) غير محدود عملياً. ويمكنك إيجاد المعلومات حول آخر النظريات التعليمية وخطط الدرس النموذجية، والبحوث المستمرة، وتقديمات مبدعة جديدة لمواضيع قديمة، وغرف مناقشة عن تربويات الرياضيات، والمزيد بمجرد دخولك على خط الاتصال بالشبكة.

وستصبح الأفكار الخاصة بمشاريع الطلاب، ولمختلف أنواع الدروس، والمصادر متعددة الأعلام إنما هي مجرد نقرة عابرة على زر الفأرة Mouse.

وتظهر أدناه بعض عناوين (مشتركي المصدر الموحد) URLs لموقع الشبكة، والتي توفر كمية ضخمة من المعلومات المفيدة للمعلمين على مختلف مستويات الخبرة والخلفيات، وكذلك الارتباطات (Links) لمواقع أخرى مفيدة. أشّر هذه وأية مواقع متوفرة تجدها بنفسك عند تشغيل الانترنيت.

htttp://www.pbs.org/teachersource/math.html
http://www.powertolearn.com/home/index.html
http://www.enc.org
http://www.swarthmore.edu/
http://lessonplanz.com/lesson_plans/mathmetics/grades_9-12/
http://www.louisville.edu/~npgnad01/mathfrontpage.html
http://ericir.syr.edu/

تعرّف إلى خلفيات الطلاب

Learn Student's Backgrounds

ما نوع الشباب الذين ستعلمهم؟ سيكون بعضهم أذكياء في الرياضيات وسيتميزون في صفك. وسيجد العديد منهم، رغم ذلك، أن الرياضيات موضوع مرعب ويثير التحدي. وللمساعدة في تحديد كيفية تلبية الاحتياجات الفردية لطلابك، فقد ترغب في الطلب منهم بكتابة مسح شامل يستوعب اهتماماتهم أو آرائهم في بداية السنة. أعطِ الطلاب سلسلة من الأسئلة من نوع ليكيرت (Likert) (الشكل 2–1) للتأكد من حماسهم أو عدمه بالمشاركة في درس الرياضيات. تأكد من معرفة فيما إذا كان الطلاب يعتبرون أنفسهم ضعافاً، أو أقوياء في مجالات معينة من الرياضيات. كذلك حاول أن تسأل عن نجاحات أو إخفاقات الطلاب السابقة في مساقات الرياضات أو مفاهيمها. فقد تساعد المعرفة في تحديد كيفية شعور الطلاب، أو اعتبار أنفسهم رياضيين وعلى تحديد أي من الطلاب هو بحاجة للمساعدة، ولتوفير فرص أكبر للتمرين بالتشكيلات، أو للتحسن في الاستيعاب الرياضي. وبذلك تتجنب المزيد من الإخفاقات الرياضية.

أحصل على وسائل وتجهيزات Obtain Supplies

إضافة لأدوات مهنة التعليم المعتادة، بصورة عامة، يحتاج معلم الرياضيات إلى بعض مصادر التعليم الخاصة. ويمكن أن تشمل هذه المصادر: فرجار سبورة، ومناقل، وجداول رسم، وأوراق رسم، وأشكال هندسية مرنة، وأشكال رباعية، وأشكال مضلعة أخرى، وتشكيلات محسوسة منها ذات بعدين يمكن تثبيتها على جهاز الإسقاط الضوئي (OHP)، وآلات حاسبة (بضمنها آلات حاسبة رسومية) وحواسيب وبرامج حاسوبية (الرئيس بينها للتعليم الهندسي هو The Geometer's Sketchpad). تحرى عن توفر هذه الأنواع من المواد عندما تكلف مباشرة بتعليم الصف. وإذا ما كانت الموارد المالية المدرسة محدودة، فيمكن أن تجد مجموعات من الناس قد تساعدك في شراء هذه المواد لسد حاجات صفك.

إدارة الصف Classroom Management

إن مراجعة مساقات إدارة صفك ستساعدك في صياغة وتحديد قائمة بقواعد الصف. تأكد من توصيل هذه القواعد إلى طلابك لكي يدركوا ويعرفوا كيف تأمل أن تكون مسيرة الصف يوماً بيوم. وقبل أن ينعقد درسك الأول، عليك أن تقرر كيفية معالجة أية المشاكل النظامية. ويجب عليك كذلك أن تناقش الخطة النظامية هذه مع معلمك المشرف قبل أن يبدأ العام الدراسي لكي تضمن إنك على خط واضح مع أنظمة وقواعد المنطقة التعليمية.

المتطلب المعرفي السابق Prerequisite Knowledge

سوف تعتمد خطة الوحدة التي ستقوم بتدريسها فعلاً تعتمد على دروس تعلم بتسلسل منطقي. ويسمح لك هذا التسلسل بتعريف الطلاب بالمفاهيم التي يرتكز الواحد منها على الآخر. وقد ترغب، قبل بداية دراسة أية وحدة، ترغب بالتعرف على معلومات الطلاب السابقة والتي ستساعدهم على إدراك المفاهيم التي تقدمها في الدروس الاستهلالية. ويمكن أن يحصل التعرف على معلومات الطلاب السابقة عن طريق الاختبارات الأولية. وهذه الاختبارات الأولية سواء كانت معدة من المدرس أو موجودة في الكتاب الدراسي هي تركز على معرفة فيما إذا كان الطلاب يمتلكون معرفة أساسية لتعلم مفاهيم جديدة مبنية على هذه المعرفة. فمثلاً، إذا كنت تخطط لوحدة عن العوامل فعليك أن تتأكد من أن الطلاب يفهمون معنى العامل، أولاً من خلال علاقته بالأرقام فقط (مثلاً، ما هي العوامل الأولية للعدد 30؟) وبعدها بالمصطلحات الجبرية (مثلاً، ما هي عوامل الـ $15\ x^2y$؟).

أسئلة عينية لمسح حول الآراء السائدة عن الرياضيات	أوافق بشدة	أوافق	غير متأكد	لا أوافق	لا أوافق بشدة
1 أجد ممارسة الرياضيات ممتعة جداً.					
2. حل مسائل الرياضيات يضايقني.					
3 أود أن أعمل في مجال الرياضيات بعد أنهي دراستي.					
4 أشعر بعدم الارتياح من المفاهيم الهندسية.					
5. أستمتع بتطبيقات الاحتمالات والإحصاء الموجودة في الجريدة اليومية.					
6 أشعر بتوتر الأعصاب عندما يتوجب علي أداء امتحان في الرياضيات.					
7. أستمتع لمساعدة الناس الآخرين في حل المسائل الرياضية.					
8. لا أشعر بالأمان عندما يتوجب علي حل مسألة رياضية بطريقة جبرية.					
9 أعتقد أن الرياضيات هو أحد أهم المواضيع التي أدرسها.					
10. إن مهارات التحصيل تعزز بدراسة الرياضيات.					

لاحظ أن بعض العبارات إيجابية والأخرى سلبية وهذا يمنع المجيب من إعطاء نوع واحد للإجابة على كل الأسئلة.

شكل 2-1 نماذج أسئلة لتحريات الاتجاهات الرياضية

التخطيط قصير المدى Short Range Planning

يجب أن يخط لكل تفصيل صغير أو كبير لفعاليات صفك بصورة دقيقة. وسوف تختلف كمية التفاصيل التي تضعها في خطة درس مكتوبة مقارنة بالتفاصيل التي تحتفظ بها في ذاكرتك تبعاً لسنوات خبرتك وكذلك مع عدد المرات التي تعلم بها مساقاً معيناً. ولكي تضيف شعوراً من الثقة ولتضمن أنك تغطي كل المواضيع بدقة، ابدأ بالتخطيط لدروسك اليومية وفي ذهنك ما يلي:

1. اقرأ دليل المنهاج أو خطته. وسوف يزودك مشرفك التعليمي أو رئيس دائرتك بهذه الوثيقة كي تتمكن من البدء في فهم الأهداف التعليمية، والتي سوف تكون مسئولاً عنها في نهاية السنة الدراسية.
2. حاول أن تعرف متى يتم إعطاء التقييمات الشاملة للطلبة بالمدرسة كل سنة، ومتى سيتم اختبارهم. تحقق، إن أمكن ذلك، من حصص أو نسب التقويمات هذه التي سوف تكون ذات صلة مباشرة بالمفاهيم التي ستكون مسئولاً عن تعليمها.
3. قم بمراجعة المواد المتوفرة للاستخدام عندما تقوم بالتعليم. هل إنك ستشارك هذه المواد مع معلمين آخرين؟ هل ستحتاج لإرجاء وادخار بعض الوقت في سبيل استخدام هذه المواد؟ ما هي المواد التي يكون الطالب مسؤولاً عن شرائها؟ هل هناك خطة بمنح بمساعدة مالية للطلاب الذين ليس بمقدورهم شراء مواد بذاتها؟.
4. حاول أن تطّلع على الكتب الدراسية التي اشترتها إدارة المدرسة، وخذها إلى البيت واقرأها. ما هي تلبيتها

لاحتياجات دليل المنهج الدراسي؟. وعندما تقوم بمراجعة فصول معينة لتطوير خطة درسك اليومية، ضع في حساباتك ما ستحتاجه لدعم الدروس لتلبية احتياجات الطلاب البارزين والموهوبين كيف ستقسم دروس الكتاب الدراسي إلى مقاطع أصغر لكي تناسب المتعلمين غير المتأهبين الدراسي لكل مفهوم يعلم فيه؟. هل هناك فرصة كافية مصممة في درس الكتاب كي يُسمح للطلاب بالتمرين على ما تعلموه ؟ خذ باعتبارك كيف ستلبي هذه الحاجة

5 راجع قائمة طلاب صفك. هل هناك أي طلاب لديهم أموراً استثنائية؟ إن كان الأمر كذلك، هل هناك معلم خاص سيساعدك في تعليمهم؟ ما هي طرق تمرينهم على الدرس أو ما هي المعدات التي سوف تلبي وتسد حاجات عوقهم؟ هل لديك معرفة بكتابة أهداف خطط التعليم الفردية (IEPs)؟ فإن لم تكن كذلك، فعليك تعلم كيفية كتابة مثل هذه الأهداف، وتعلم المزيد عن القواعد (الأكاديمية) الوظيفية المطلوبة للتعليم الانتقالي من خطة وكالة التعليم الخاص وضع لنظام مدرستك.

خطة الدرس اليومية The Daily Lesson Plan

تشمل خطة الدرس اليومية المفصلة جميع ما ستفعله،وما تتوقع أن يفعله الطلاب خلال فترة الدرس المفترضة. ولابتداع خطط درس يومية. يجب أن تفكر من خلال بنية الدرس، والواجبات ذات العلاقة والتي سيشترك الطلاب فيها، وأية مصاعب يمكن أن يواجهها طلابك. وينصح عند المباشرة بكتابة خطط الدروس أن تضمنها تفاصيل عديدة بصياغة محددة ستستعملها لكل ناحية من نواحي الدرس. وسوف تساعدك الممارسة الميدانية على كتابة كل تفاصيل الدرس وبتسهيل نجاحك كمعلم مبتدئ، ليس لأن من السهل نسيان تفاصيل الدرس فقط، بل كذلك لأنها ستساعدك على رؤية فيما إذا تذكرت تضمين كل خطوة منطقية في الدرس.

ومثلما يقضي ممارس ناجح وقتاً طويلاً بالتدريب على الأداء، يحتاج المعلم تمريناً مكثفاً على الدرس. ولكن الطريقة العملية للمعلم في التمرين هي التخطيط الفكري والبدني على (أداء) (الدرس) على الورق. وستجبرك كتابة خطة الدرس الجيدة على الخوض بـ (ذخيرة غير حية عقلياً) للدرس. ولا تسمح لك هذه الفعالية ببلورة أفكارك فقط وإنما في توقع الهفوات المحتملة كذلك في الدرس الحقيقي.

ويجب أن تكتب النسخ الأقصر للدروس في (دفتر الخطط) لكي يكون لديك سجل يومي منظم لدروسك على مدار الفصل الدراسي. ويمكن أن يخدمك هذا الدفتر كدليل في المستقبل أو كسجل لمشرفيك أو للآباء وكمساعد لأي معلم بديل.

ومع هذا ينصح بكتابة خطط جديدة كل مرة تعلم فيها مساقاً. مما سيعطيك الحرية في تفصيل كل درس حسب الحاجات المعينة للصف الذي يعلم.

إن الدروس تكتب لإتباع شكل معين لا يختلف عن النص الذي يستخدمه المثل مع تغيير الاتصالات مناسبة تحددها طبيعة الأداء نفسه. ورغم أن خطة درس المعلم تتبع شكلاً أساسياً معيناً، فإن هذه الخطط تختلف نوعاً ما طبقاً لطبيعة الدرس الذي تم التخطيط له.

ويظهر في الشكل الآتي صفحة 43 خطة مقترحة لخطة درس. وليس هناك ثمة ضرورة ملحة لإدراج كل الأجزاء لهذا الترتيب في كل درس. وفيما يلي توضيحات لمكونات درس معين.

الموضوع Topic

بكتابة الموضوع في بداية خطة كل درس فإنك توضح تركيزك وأنت تخطط للدرس وكذلك عندما تكتبه ببساطة للاستخدام المستقبلي.

المعرفة المسبقة Prior Knowledge

يتطلب هذا الفصل إدراج المادة التي تم تعلمها سابقاً وتلك المطلوبة للدرس الحالي والتي سيكون الطلاب مسؤولين عنها. ورغم أن المعلم ذو الخبرة قد يحذف مراراً هذا الفصل، فإنه ضروري المدرس المبتدئ.

أهداف الأداء Performance Objectives

تحدد أهداف الأداء، الأهداف التعلمية لكل درس. وسوف يساعدك تحديد أهداف الأداء بتكوين الدرس المكتوب لكي تضمن استكشافاً مناسباً وفعاليات تقييمية. أن أهداف الأداء المكتوبة شكلياً: (1). تسمي الفعالية التدريسية التي سيقوم بها الطلاب؛ (2). تحدد الظروف التي في ظلها سيقوم الطلاب بالفعالية؛ (3). تبين كيف سيقيم الطلاب لضمان نجاحهم.

أمثلة على أهداف الأداء
Examples of Performance Objectives

الموضـــوع	سيقوم الطـــلاب بـ
إيجاد مساحة أي مثلث	جد المساحة إلى أقرب عشر، لثلاثة مثلثات: منفرج، وحاد، وقائم الزاوية
رسوم لدوال مثلثية أساسية	خطط رسوم الدوال المثلثية الأساسية: جا، جتا، ظا، عند تحديد سعة وتردد ودورة كل منها.
حل تخطيطي لتباينات القيمة المطلقة	ارسم على خط الأعداد، أربعة ((و)) و((أو)) متباينات قيمة مطلقة محلولة جبرياً
مقطع دائرة	جد مساحة وطول القوس لمقطع معروف لدائرة
تقاطعات خطية	استخدم حاسبة تخطيطية لتحديد عدد النقاط للتقاطع لكل واحد من ثلاثة قطوع مخروطية بخطوط مستقيمة.
حالة غامضة	استخدم قانون الجيوب لتحديد فيما إذا كانت المثلثات 0, 1, 2 يمكن أن تنشأ من خمس مجموعات من البيانات.
القياس الدائري	حوِّل من القياس الدائري إلى القياس بالدرجات وبالعكس للزاوية المعطاة.

الشكل التدريسي Instructional Format

يشير الشكل التدريسي إلى مجموعة تدريسية صغيرة أو كبيرة، وتدريس النظراء، ومناقشات الصف بكامله، والاستكشاف الفردي، وعمل المشروع، والبحث المستقل، وتقييم التعلم.

قد تشمل دروس المجموعة الصغيرة مراجعة الواجب البيتي. والتحليل، ومناقشة الواجبات الصفية، والملخصات الوسطية والنهائية. ويعين ممثل الصف في الغالب ليعيد إلقاء التقارير لكل الصف. ويمكن كذلك الإجابة عن الأسئلة أو الاختيارات تعاونياً من قبل مجموعات صغيرة من الطلاب على أن يجيب ويشارك كل طالب في كل العملية.

وتتناسب المجموعات الكبيرة عموماً مع الدرس التطوري أو (الاستكشافي) والمقدمة من المعلم بالعروض التي تشمل الفيديو، أو الأفلام، أو المتحدثين الضيوف، والعروض المتميزة، أو التجمعات الرياضية. وتعد الشفافيات المحضرة، بالجداول، واللوحات، تجعل من جهاز الإسقاط العلوي (OHP) وسيلة مثالية للتواصل مع المجموعات الكبيرة.

الفعالية التحفيزية Motivational Activity

قد تكون الفعالية التحفيزية الأولية للدرس على شكل تمرين (أفعل الآن)، ويمكن كتابتها في نفس الفصل على اللوحة الطباشيرية، يومياً، قبل البداية الرسمية للدرس. وتساعد اللوحة على استقرار الطلاب في بداية الحصة بإعطائهم واجباً يفعلونه عند دخولهم الصف. وستسهم حقاً في تنظيم النبرة التعلمية والسلوكية للحصة بغض النظر عن الشكل التدريسي، ومن أجل ذلك تعد أسلوب قيماً للإدارة.

أمثلة على الفعاليات التحفيزية:

1. قد تتكون من مسألة معدة من المعلم، أو مأخوذة من الكتاب. وقد تكون فصلاً نصياً يدرس انفرادياً قبل التحليل بواسطة أي مجموعة صغيرة أو كبيرة.
2. قد تكون واجباً للطلاب في مكان معين من الصف. مثلاً، يمكن سؤال مجموعة صغيرة في الاستمرار على كتابة واجبات سابقة أو مراجعة واجب ما، أو مناقشة مثال يثير التحدي. وهناك المزيد حول الفعاليات التحفيزية في (صفحة 82).

الاستكشاف Exploration

إن قدرة المعلم على خلق جو تعلم فاعل يوفر مناخاً مناسباً يشجع الطلاب على الاستكشاف والتقصي والافتراض واشتقاق النتائج أمر حاسم في تطور الدرس. وكما هو الحال في دروس التلوين الشكلي، حيث يستطيع المرء تعلم أساليب وتقنيات التلوين كذلك الحال في مساقات التربية يستطيع المرء تعلم أساليب وتقنيات التعليم. وفي كلتا الحالتين لن تتعلم أن تكون (فناناً)، إذ أنه بعد التمرين المتلقي في هذه المساقات فقط تسود موهبتك. وبعد كل هذا، تكون سنواتك الاثنتان الأولى أو الثلاث الأولى كمعلم هي اللبنة الأساسية التي تشكل نموك المهني.

يجب أن تنظر إلى الواجبات الاستكشافية بوصفها إبداعاتك المرئية الخلاقة، والتي سترقى بالمفاهيم الجديدة والمهارات والمعرفة والآراء الإيجابية بين طلابك. وستكون اقتراحات المعلمين الآخرين، وكتب المنهج المتنوعة، ومجلات NCTM:

مثل معلم الرياضيات وتعليم الرياضيات في المدرسة المتوسطة وتعليم الأطفال الرياضيات (اسمها الرسم معلم الحساب) كلها قيمة جداً في مساعدتك على إيجاد فعاليات صفية مناسبة. أضف إلى ذلك. أن حس الإثارة والتحدي سيجعل من نبرة أدائك مستقرة، وستحقق النتائج الإيجابية الموجودة في السنوات المقبلة.

وكما سيحصل استكشاف الأفكار عندما تطلق تعليقات مفتوحة النهاية، ومحفزة، تجعل الطلاب يفكرون ويتكلمون، يوافقون أو لا يوافقون، ومتعطشين لمزيد من المعرفة، وتمكنهم من التخمين أو التحزر. ويمكن أن تستخدم جداول، ورسوم، وأشكال، ونماذج مادية، ومقارنات لتطوير المهام الاستكشافية المناسبة. وسيحصل المزيد من الاستكشاف الفكري عندما تمنح الطلاب فرصاً لتسجيل أفكارهم الرياضية في منشورات ومجلات.

أنشطة تدريب Practice Activities

إن أنشطة التدريب والتي تأتي بعد الاستكشافات الصفية تكون حيث تؤدي النظرية إلى التطبيق. وتوجه الدروس إلى هذه النقطة وتُشكّل نماذج مسائل/حلول ويتبعها تمرين جماعي تعاوني صغير أو فردي. ويجب أن تحدد التمارين التطبيقية الأولية في مفاهيم وموضوعات باعتبارها جديدة. ويمكن أن تتضمن التمارين اللاحقة والتي تربط فروعاً رياضية أخرى، مدىً واسعاً من الموضوعات الرياضية ومجالات للموضوع المطروق.

الملخص الوسيط Medial Summary

إن الملخص الوسيط هو مراجعة موجزة وسطية للخصائص المهمة للموضوع الذي تم تطويره لحد ما. وقد يحصل في أية نقطة أو نقاط خلال الدرس ولكن قبل الخاتمة. ومن بين الوظائف العديدة التي يؤديها هذا الملخص هو إعطاء فرصة للطالب الذي لم يتأكد من هدف الدرس، أو من طبيعة ما تم تطويره، وأهميته، أو الذي كان ببساطة شارد الذهن في بداية الدرس، وفاتته الأمور الرئيسة وهو تائه بالوقت الحاضر، ليفهم ويلحق ببقية الصف ويستفيد مما تبقى من الدرس.

الترابطات Connections

والآن وبما أن كل واحد، كما هو المأمول، قد فهم الجزء المناسب من الدرس، وكانت له فرصة للتمرين باستخدام المفهوم الجديد، أو الموضوع بتمارين بسيطة فإن هذا الفصل سينهض بأعباء التطبيقات والتمارين التي تربط المفهوم أو الموضوع الجديد مع تلك التي تم تعلمها سابقاً. إن هذه التمرينات والتطبيقات ستكون أكثر تعقيداً، وأكثر تداخلاً في موضوعات أخرى من المجموعة الأولى للتمرينات. ومن الطبيعي أن تحدد طبيعة الموضوع الخاصة المقصودة نوع المسائل المتضمنة أو المشتملة في تمرين هذا الفصل أو غيره.

الملخص النهائي Final Summary

إن الملخص النهائي هو مراجعة موجزة للنقاط الرئيسة للدرس. ويجب أن يربط المعلم هنا سوية كل أجزاء الدرس. وكما هو الحال مع الإيجازات السابقة يمكن تكوين هذا الموجز من الطلاب حين أجابتهم على الأسئلة الموجهة، أو قد يكون على شكل جمل بسيطة أو قد يكون مزيجاً من كلا النوعين. وفي بعض الأحيان، قد يستنبط سؤال بسيط موجه إلى الصف كالذي سيلي ملخصاً:

(افترض أن زميلك كان غائباً واتصل بك بالهاتف ليسألك عن ماذا كان يدور درس اليوم. ما ستقول عن الدرس بحيث يأخذ زميلك فكرة واضحة عن المواضيع التي فاتته؟)

تقييم Assessment

لا يحتاج بناء الثقة أن يكون محدوداً بالطلاب. فيجب أن يتأكد المعلمون كذلك، أنه مهما كانت الشكلية التدريسية فإن أهداف تحفيز حب الاستطلاع وجعل الطلاب يفهمون ويتقنون الدرس قد تحققت. ويتم الحصول على هذا الأمر من خلال أساليب تقويم الدرس مثل مراقبة تفاعل الصف، والتناغم، والمشاركة في النقاشات، وتقويم الطلاب من خلال الطرائق المتعددة، وبحسبان الآراء المكتوبة، وعمل حلقات النقاش مع الطلاب، وإعطاء الاختبارات الجماعية والفردية المكتوبة. وخلال هذه التقييمات يجب أن يكون المعلم متلقياً حساساً ومتفهماً لخلفيات الطلاب المختلفة وآرائهم. ولا يمكن أحياناً توقع ردود الأفعال خصوصاً عندما يكون المعلم محفزاً ومثيراً.

التمارين Exercises

بما أن هذا الفصل مهم جداً، فهناك مجاميع من التمارين في الملحق A يمكن استخدامها خلال الفصل، لمناقشتها فيه.

الواجبات البيتية Homework Assignment

ينصح دائماً أن يتم الاختيار والتخطيط لإعطاء الواجبات البيتية وإدراجها في خطة الدرس بعناية وحذر. ويجب أن يصمم الواجب لمساعدة الطلاب في تنقية مهاراتهم الجديدة المكتسبة، وتعزيز الاستقلالية والاعتماد الذاتي، وتطوير رد الفعل ومهارات التفكير الإبداعي. وكوسيلة لبلوغ هذه الغايات، من المتوقع لكل واجب مكتمل أن يكون دقيقاً منظماً مرتباً وتاماً كما قدر الإمكان.

الخطوط المقترحة لخطة الدرس اليومي

Suggested Outline for Daily Lesson Plan

الصف: ____________ التاريخ: ____________

الموضوع TOPIC:

المعرفة القبلية PRIOR KNOWLEDGE:

أهداف الأداء PERFORMANCE OBJECTIVES:

الشكل التدريسي INSTRUNCTIONAL FORMAT:

الأنشطة المحفزة MOTIVATIONAL ACTIVITY:

الاستكشاف EXPLORATION:

أنشطة التدريب PRACTICE ACTIVITIES:

الخلاصة المتوسطة MEDIAL SUMMARY:

الارتباطات CONNECTIONS:

الخلاصة النهائية FINAL SUMMARY:

التقييم ASSESSMENT:

الواجب البيتي HOMEWORK ASSIGNMENT:

أدوات خاصة لأغراض الاستخدام SPECIAL EQUIPMENT TO BE USED:

يجب أن يناقش الواجب البيتي في الصف باليوم التالي، ويمكن مراجعته كفعالية لمجموعة صغيرة أو كبيرة ويجمع ليقرأه المعلم ويحلله. إن تحليلات المجموعة الصغيرة أو كل الصف مناسبة لمختلف أنواع الواجبات ويجب أن يقوم المعلم بالاختيار. فليس هناك صيغة ثابتة لأحسن الطرق. إن طبيعة الواجبات البيتية ستناقش لاحقاً في هذا الفصل.

تشمل الواجبات الأسبوعية، أو طويلة المدى، عادة مشاريع تتطلب شكليات خاصة يحددها المعلم. وتتطلب أوراق الواجبات اليومية (التي توزع سلفاً) تخطيطاً كثيراً، ومن المحتمل أنها ستحتاج بعض التعديل خلال مساق الفصل الدراسي. أنظر الملحق B لمزيد من النقاش العميق حول تخصيص الواجبات البيتية.

أدوات خاصة للاستخدام

Special Equipment to be Used

يمكن إدراج المعدات الخاصة للاستخدام خلال الدرس في الخطة. وتشمل هذه المعدات مواداً مثل فرجار سبورة، والجداول الخطية، والأشكال الهندسية، وجهاز الإسقاط العلوي (OHP)، وحواسيب، ووحدات عرض لهذه— الخ. وتفيد هذه القائمة في تذكيرك لما يتوجب توفيره من مواد أو لتحضيرها سلفاً قبل بداية الدرس.

واجبات أومشاريع خاصة

Special Tasks or Projects

يمكن أن يزين الدرس الحالي (أو الدرس المستقبلي غير البعيد) بشكل كبير ببعض الأعمال التحضيرية التي تنجز إما فردياً أو جماعياً من قبل الطلاب. ويمكن لهذا المشروع أن ينجز على شكل استقصاء، أو تعرين جمع البيانات، أو تقرير تأريخي. أو ربما على شكل دراسة مستقلة حول موضوع ذي صلة. ويمكن أن تظهر مثل هذه الأنشطة على شكل تقرير أو بحث قصير أو لوحة أو تقرير شفوي جماعي أو مزيج من هذه الأشكال جميعاً.

التمعن القريب في مكونات الدرس

Examining Lesson Components More Closely

نظراً لوجود أهمية خاصة بكل جزء من الدرس، سوف نقضي بعض الوقت في هذا الفصل مركزين على أنواع معينة من التخطيط والتي قد تصادفك أثناء كتابة الخطة. من الضروري أولاً أن نأخذ بعين الاعتبار أهداف الدرس، لذا سوف نبدأ بمساعدتك على فهم مبادئ كتابة أهداف الأداء.

أهداف الأداء Performance Objective

إن أهداف الأداء هي عبارات تحدد قابليات معينة للمتعلم (تعرف بـ ((سلوك الطالب المشاهد))، عندما يصل أو تصل إلى نهاية نشاط تعلمي معين، سوية مع أية شروط أو تحديدات معطاة. وتشمل كذلك كتابة لعملية التقويم (المعروفة بـ (الحد الأدنى من الأداء المقبول)). وبعبارة أخرى يجب أن تسمي عبارة هدف الأداء في الواقع السلوك الذي سيشاهد عليه الطالب مؤديه بنجاح، تحت ظروف معينة معطاة عند إكمال أو قبل إكمال الدرس.

كيف تكتب أهداف الأداء

How to Write Performance Objectives

تم تقديم خطة وحدة حول الجذور في بداية الفصل. وسندرس الآن كيف يمكن تطوير مجموعة من أهداف الأداء باستخدام هذه الوحدة كنموذج. وللتمرين على كتابة أهداف الأداء في تحضير وحدة عمل، أو خطة درس يومية أبدأ بـ:

1. اختيار الوحدة (أو الموضوع) المراد تعليمه.
2. دراسة المقرر والنصوص ذات العلاقة لإيجاد أمثلة مناسبة للدرس.
3. إدراج الصيغ والنظريات والمفاهيم الرئيسة وما شابه ذلك، والتي يغطيها الدرس.
4. تحديد الفرض الرئيس للدرس.

والآن، أنت مستعد لكتابة هدف أداء لكل من المهارات التي يراد تعليمها.

وبعد أن يكتب كل هدف، قارنه بقابليات طلابك. أي، هل أنك تطلب من طلبتك ما لا يطيقون، أو أقل بكثير مما يستطيعون؟ هل أن أهدافك واقعية لنوع الطلاب الذين تعلمهم؟ (قد تؤشر هذه كمستوى (عالي) أو (منخفض) من الأهداف) تذكر أن تكتب أهدافاً واقعية، ولكن شريطة أن لا تجعل آمالك في إنجاز الطلاب منخفضة جداً لكي تتأكد فقط من أن الأهداف سيتم تلبيتها. تذكر كذلك أن الأهداف يجب أن تكون مكتوبة بشكل مناسب للطلاب على كل المستويات.

إن النموذج التالي يحتوي على بعض أهداف الأداء الممكنة لوحدة في الجذور. وكتبت هذه في شكل عملي وليس في شكل مثالي، لأنه لو أن المعلم قام بتحضير كل هدف في شكله المثالي، فإن الأهداف ستكون مطولة ومزعجة في كتابتها لكل درس.

نموذج موضوعات الأداء لوحدة عن الجذور

1. الأسس والجذور ***Powers and Roots***

سيقوم الطلبة بتسمية الأساس، والأس، والقوى لأي صيغة بالصيغة التالية A^b (مستوى منخفض).

وسيعمد الطلبة إلى تقدير أربع صيغ مثل: 5^3، 16^2، $\sqrt{9}$، $\sqrt[3]{8}$.

سيستخدم التلاميذ آلة حاسبة لاحتساب قيم أربع صيغ مثل $\sqrt{576}$ (مستوى عالي).

2. نظرية فيثاغورث ومعادلات تربيعية ***Quadratic*** بالصيغة الآتية: $x^2=9$، $x^2=3$.

سيقوم الطلبة بعرض نظرية فيثاغورث (مستوى منخفض).

سيقوم الطلبة بإيجاد طول أحد أضلاع المثلث قائم الزاوية بعد إعطائهم طولي الضلعين الآخرين، مقربين إلى اقرب مرتبة عشرية (سيجدون الآلة الحاسبة متوفرة).

سيجد الطلبة جذر الصحيح الموجب Positive Integral Root لكل من المعادلات الثلاثة مثل: $x^2=9$.

سيجد الطلبة الجذور الموجبة لكل من المعادلات الثلاث مثل $x^2=12$، إما بالإبقاء على الإجابات بشكل جذري، أو بتقريبهم إلى اقرب رقم عشري. (يمكن استخدام الآلة الحاسبة).

3. تبسيط الجذور ***Simplifying Roots***:

سيقوم الطلبة بكتابة ثلاث صيغ مثل: $\sqrt{9x^2}$، $\sqrt{27a^4}$، $\sqrt{20y^5}$ بأبسط صيغة جذرية.

4. جمع وطرح الجذور ***Adding And Subtracting Radicals***:

سيعمد الطلبة إلى ربط الجذور بثلاث صيغ مثل: $2\sqrt{3}+\sqrt{27}$ وعرض النتيجة بأبسط صيغة جذرية ممكنة.

وسيعمد الطلبة إلى ربط الجذور بثلاث صيغ مثل: $3\sqrt{18C^3}-5C\sqrt{2C}$ وكتابة الأجوبة بأبسط صيغة جذرية ممكنة. (مستوى عالي)

5. ضرب الجذور ***Multiplying Radicals***:

سيقوم الطلبة بإيجاد قيمة لصيغتين مثل $\sqrt{3}.\sqrt{12}$ بدون استخدام جداول الجذور التربيعية Square Root Tables، أو الآلة الحاسبة، أو خوارزميات الجذور التربيعية.

سيقوم الطلبة بإيجاد القيمة، وتقريبها إلى اقرب مرتبة عشرية، لكل من الصيغتين مثل: $\sqrt{5}.\sqrt{6}$ باستخدام آلة حاسبة لمرة واحدة فقط.

6. قسمة الجذور ***Dividing Radicals***:

سيقوم الطلبة بإيجاد القيمة لثلاث من الصيغ مثل: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ بدون استخدام جدول الجذور التربيعية، أو آلة حاسبة، أو خوارزمية الجذور التربيعية.

7. حذف مقامات الكسور ***Rationalizing Denominations***:

سيقوم الطلبة بالتعبير عن كل من الكسرين مثل $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ككسر مكافئ Equivalent fraction مع مقام الكسر القياسي.

سيقوم الطلبة بالتعبير عن كل من الكسرين مثل $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ككسر مكافئ مع مقام الكسر القياسي.

سيقوم الطلبة بالتعبير عن كل من الكسرين مثل $\frac{2}{\sqrt{3}-2}$ ككسر مكافئ مع مقام الكسر القياسي.

8. حل المعادلات الجذرية ***Solving Radical Equations***:

سيقوم الطلبة بحل معادلتين مثل: $\sqrt{x} - 3 = 5, \sqrt{x-1} = 2$ وفحص الأجوبة بأسلوب التعويض.

سيقوم الطلبة بحل معادلتين مثل $\sqrt{x-1} - 1 = 3$ وفحص الأجوبة بأسلوب التعويض.

9. مراجعة ***Review***:

ينبغي على الطلبة الإجابة بصورة صحيحة على عشرة من الأسئلة الاثني عشر الآتية (كحد أدنى، وخلال أربعين دقيقة:

أ. احسب 3^3، 14^2، $\sqrt{25}$ ، $3\sqrt{27}$.

ب. جد الجذر الموجب للمعادلة $x^2=21$ وقربه إلى اقرب مرتبة عشرية.

ج. لديك مثلث قائم الزاوية بساق طوله 8، ووتر طوله 17. جد طول الضلع الآخر.

د. استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد الجذر الموجب للمعادلة $2x^2=10$ وقرّب النتيجة إلى اقرب مرتبة مئات.

هـ. حل المعادلة الآتية للمتغير x بدلالة a: $x^2 = 9a^4$

و؛ حل المعادلة الآتية للمتغير x وضع الإجابة بأبسط صيغة جذرية ممكنة: $x^2=24$.

ز. صف ما يلي بأبسط صيغة جذرية: $\sqrt{8y^4}$ ، $\sqrt{18a^5}$ وتأكد من النتيجة بتربيع الإجابة.

ح. اربط وعبِّر بأبسط صيغة جذرية $5\sqrt{2} - \sqrt{8}$.

ط. ركب وعبر بأبسط صيغة جذرية $3a\sqrt{2a} + \sqrt{8a^3}$.

ي. بدون استخدام الآلة الحاسبة، جد قيمة $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ، $\sqrt{12}.\sqrt{3}$.

ك. عبر عن $\frac{3}{\sqrt{2}+1}$ بكسر قياسي المقام.

ل. حل المعادلة وتحقق بواسطة التعويض $\sqrt{x-2}=3$.

10- تقييم ***Assessment***:

سيعكس هذا الأمر أهداف المراجعة المدرجة في الفقرة 9 عن طريق طرح مجموعة أسئلة تظهر بان كل هدف قد تم الوصول إليه.

تماريـــن Exercises

1. افترض أن مشرفاً زارك في صفك وسأل إذا كانت أهداف أداء طلابك المتوقع إحرازها خلال الأسابيع الماضية. سيختار عندها بصورة عشوائية طلاباً لاختيارهم طبقاً للأهداف.
   أ. هل أن هذه الطريقة عادلة في قياس فعاليتك؟
   ب. هل ستختار أهدافاً منخفضة المستوى من الآن فصاعداً لتضمن فرصة أفضل في إظهار نجاح طلابك؟
   ج. هل تعتقد أن معرفة ما يفعله مشرفك دورياً سيجعل منك معلماً أكثر فعالية؟. علل جوابك!
2. اكتب قائمة باثنتي عشر فعلاً غامضاً جداً وغير واضح لغرض استخدامها في كتابة هدف الأداء. أكتب أثني عشر آخرين ولكنها واضحة يمكن استخدامها في كتابة أهداف الأداء بوضوح.
3. فيما يلي أربعة أهداف أدائية (ليس بالضرورة أن تكون جيدة). أكتب سؤالين يختبران كل هدف لتحديد فيما إذا كان قد تحقق أم لا. أكتب كذلك إن كان كل هدف قد تم تصميمه بشكل جيد.
   أ. سيكتب الطلاب منطلق ومدى الدالة بإعطائهم رسم الدالة.

ب. سيفهم الطلاب كيفية حل معادلة تربيعية بـأسلوب (إكمال المربع)
ج. سوف يعرف الطلاب متوازي الأضلاع، والمستطيل، والمربع، والمعين.
د. سوف يقدر الطلاب (التعليل غير المباشر) في الهندسة.

الأشكال التدريسية Instructional Format

يتطلب التعليم صنع قرار حول الشكل التدريسي الأكثر ملائمة لتعليم دروس معينة. يحتمل أنك قد تعلمت الفروقات بين مختلف الأشكال التدريسية من ضمنه التدريس المباشر، والمحاضرات، والمناقشات التي تعقب المحاضرة، والاكتشاف أو التعليم التساؤلي.

ولأننا ندرك بأن لديك الأساس في هذه الطرائق من مساقات منهاجك فإننا سوف لن نراجعها جميعاً. وعلى أية حال، هناك مدخل تعليمي واحد– التعليم التعاوني– والذي هو فعال خصوصاً لدروس الرياضيات. وبصورة عامة يشجع التعاون والتفاعل الاجتماعي بين المجموعات الطلاب لدعم تعليم أحدهم الآخر. سيتحدث الطلاب في النشاطات الجماعية التعاونية جيدة التنظيم وسوف يتحدثون ويستمعون إلى أفكار بعضهم البعض عن الرياضيات، ويدققون فهمهم، ويساعد أحدهم الآخر على الاستمرار بالواجب، ويقدمون الدعم للمن يعاني من الفهم البطيء أو نقص الفهم. فضلاً عن ذلك، ينجح التجمع التعاوني في تنمية المهارات الاجتماعية، وقبول الاختلاف في القدرات (العوق)، والإنجاز، والانتماء، والجنس.

ما هو التعليم التعاوني؟
What is cooperative learning ?

يتعدى التعليم التعاوني إلى ما وراء مجرد وضع الطلاب معاً في مجموعات صغيرة وإعطائهم واجباً. فهناك عناصر معينة ضرورية لضمان أن الطلاب عندما يعملون في مجموعة فإنهم يعملون بتعاون.في البداية،يجب أن يدرك أعضاء المجموعة الصغيرة بأنهم جزء من فريق ولكل منهم هدف مشترك واحد. ثانياً، يجب أن يدرك أعضاء المجموعة أن المسألة التي هم بصدد حلها هي مسألة تخص المجموعة وأن النجاح أو الفشل في حلها يشمل كل الأعضاء. ثالثاً، لتحقيق هدف المجموعة يجب أن يتحدث الأعضاء جميعاً مع بعضهم ويندمجون في النقاش حول كل المسائل. وأخيراً يجب أن يكون واضحاً بأن عمل كل عضو له تأثير مباشر على نجاح المجموعة. من أجل هذا يمتاز العمل الفرقي بأهمية قصوى.

لا يعد جلوس الطلبة سوية في مجاميع جواً تعاونياً وهم يعملون على المسائل انفرادياً، أو يتركون شخصاً واحداً ينهض بأعباء العمل بكامله. يتطلب التعاون الصحيح في عملية التعليم إرشاد المعلم والذي يستطيع مساعدة الطلاب على فهم آلية المجموعة ويسعى في تطوير المهارات التعاونية التي يحتاجونها ويتعلمون الرياضيات من خلال العمل في مجموعات.

ويفيد التعليم التعاوني بوجود الأقران من الطلاب ويشجع التفاعل بين الطالب وزميله، ويبني علاقات تكافلية بين أعضاء المجموعة. ويتعلم الطلاب في المجاميع الفاعلة كيف ينصتون لآراء الغير، وكيف يناقشون ويرفضون، وكيف يقدمون، ويقبلون النقد البناء من زملائهم، وكيفية الشعور بالراحة وعدم الخوف من الوقوع في الخطأ.

كيفية تكوين وتشكيل مجموعات تعلمية صغيرة
How To Structure Small Learning Groups

يمكن تشكيل المجموعات التعليمية الصغيرة بعدة طرائق. وتُعطى أدبيات الموضوعات العديد من الأساليب التي درسها وطورها الباحثون والمعلمون وقد صممت كل واحدة من هذه الطرائق لضمان وجود اعتماد إيجابي داخل كل مجموعة، والتزام فردي، وتخاطب كلامي وجهاً لوجه، وتفاعل اجتماعي إيجابي. وتتوجه الأساليب إلى أربع محاور وهي: تشكيل المجموعة، وتصميم الواجبات (المهام)، وأساليب المكافأة، والمعالجة الجماعية.

تكوين المجموعة Group Formation

يدرك ذوو الخبرة في مجال مجموعات التعلم الصغيرة أن تشكيل المجموعة مسألة مهمة لفعاليتها– ولغرض زيادة الفائدة من هذا التعلم فإن العضوية يجب تكون متنوعة فيها سواء فيما يخص القدرات أو الخصائص الفردية. ويجب أن تبقى المجموعة ما يكفي من الوقت لتطوير التماسك أو التعاضد. إن المجموعة الناجحة ستكون صغيرة ما يكفي لكل واحد حسب حاجته لها، وكبيرة ما يكفي للسماح بتنوع الأفكار والمهارات.

إن الطريقة الأكثر فاعلية في ضمان التنوع هي تنظيم المعلم للمجموعات. بصورة عامة يعد المعلمون أكثر الأشخاص معرفة بطلابهم،ويمكن أن يضعوا الذين يذاكرون مع الذين لا يذاكرون، والطلاب ذوي التوجه التمريني مع غيرهم من ذوي عدم التوجه التمريني، والطلاب ذوي القابليات العالية مع المتوسطة والمنخفضة، والأغلبية مع القلة، ومتحدثي الإنكليزية

مع غير متحدثيها، والمعاقين مع غير المعاقين، والإناث مع الذكور. كما ويمكن سؤال الطلاب حول رغبتهم في الانضمام مع من يحبون من الزملاء. ويمكن المعلم أن يأخذ هذا بعين الاعتبار عند تشكيل المجاميع. ومن الضروري جداً أن يكون الطلاب مرتاحين ومسرورين في مجموعاتهم إذا ما أريد لهم العمل بشكل جيد.

ومن إحدى مقاييس نجاح المجموعات استمرارها. ويأخذ التماسك وقتاً ليتطور في المجموعة. وعندما يعلم الطلاب أنهم سيبقون في المجموعة سوياً لبعض الوقت فإنهم يدركون أن عليهم تحسين مهاراتهم المرئية المتبادلة لكي يستطيعون العمل بشكل فعال. وقد تبنى مجموعات التعلم الصغيرة سوية خلال وحدة عمل كاملة، أو فصل، أو سنة. ورغم أن من الضروري بقاء المجموعات سوية، وتعلمهم كيفية العمل بشكل إنتاجي متناغم. فإن التغييرات يجب أن تجرى إذا لم تعمل بعض المجموعات بشكل جيد. وعندما يكون الطلاب غير راضين أو مرتاحين مع أعضاء مجموعاتهم فمن غير المحتمل إمكانية مشاركتهم في التعبير الحر واستكشاف الأفكار. لذا من الضروري أن يبقى المعلم على علم بسلوك ومواصفات كل عضو في المجموعة. وإحدى الطرائق لتحقيق ذلك ستكون بمراقبة تفاعل الطلاب مع بعضهم في المجموعة.

وقد تبدو المجموعة وكأنها تعمل بصورة جيدة ولكن المشاهدة قد تكون خادعة أحياناً. فقد لا تكون المجموعة تعمل بصورة جيدة كما يبدو. ويمكن أن يطلب من الطلاب استخدام المجلات (النشرات) لتبادل شعورهم حول مجموعاتهم والطريقة التي يعملون بها داخلها. يجب أن يعلقوا على المساعدة التي تلقوها أو التي أبدوها داخل المجموعة. ويجب أن يقرر الطلاب والمعلم معاً متى وفيما إذا كان يجب استبدال تشكيلات المجموعة.

ويؤثر حجم المجموعة على قابليتها كي تكون منتجة. وقد أظهرت التجربة أن المجموعات المتكونة من ثلاثة إلى خمسة طلاب تعمل جيداً. ولا يجب أن تكون المجموعة التعلمية كبيرة جداً. فلو كان عدد المجموعة كبيراً عندها يصبح عملها بصورة فعالة أمرٌ صعب. ويميل الطالب الأعلى صوتاً للسيطرة ويتراجع الهادئون إلى الخلف. ويكون من الصعب في المجموعة الكبيرة لكل طالب أن يطلق أفكاره. فضلاً عن أنه من الصعب على المجموعة الكبيرة أن تكون منظمة لتنسيق عملها وإفرادها للوصول إلى حالة التناغم.

ولزيادة الشعور بالصداقة الحميمة، فقد تطلق المجموعة على نفسها اسماً. وفي حالات استقرار المجاميع، فيمكن أن تؤخذ صور للمجموعات، ويدعى الطلاب إلى وضعها على ورقة ترتبها المجموعة بنفسها ومن ثم توضع على لوحة النشرة. وسوف يسهم هذا الأمر في إضافة الدفء والمتعة لكونهم جزءاً من مجموعة تعلمية واحدة.

تصميمات المهمة Task Designs

لنجاح المجموعة التعلمية الصغيرة، يجب على الطلاب أن يتصوروا أنفسهم وكأنهم يعتمدون على بعضهم البعض، وأن يتواصلوا ,وان يكونوا مسؤولين عن العمل بشكل فردي. ولزيادة فرص تواجد مثل هذه الظروف، يجب أن تصمم مهام (واجبات) المجموعة بعد تفكير عميق.

ويتقاسم أعضاء المجموعات الأخرى المسؤولية في تعلم كل فرد. ويتوقع من أعضاء المجموعة أن يساندوا ويشجعوا بعضهم البعض. ويكون التأكيد على العمل والتعلم معاً. مع ذلك، يبقى الأفراد مسئولون عن تعلمهم ومساهماتهم الفردية في المجموعة. وهكذا يكون كل فرد في المجموعة مسئولاً عن إجادة المادة. ويكون الأعضاء مسئولون بشكل فردي، ويتوقع تعلمهم، وكذلك مشاركتهم في عمل المجموعة.

إن إحدى الطرق التي تضمن مشاركة جميع طلاب المجموعة في الواجب تكمن في تقسيم المهام الوظيفية بطريقة يكون فيها كل طالب مسئول عن عمل أو أداء جزء واحد من العمل، وبحيث لا يمكن أن يكتمل واجب المجموعة إلا بمشاركة كل طالب بجزء من الواجب المناط بها.

ولتحقيق هدف المجموعة، أو إكمال مهمتها يجب أن يتحمل كل فرد مسؤولية البقية لتعلم المفاهيم والمهارات. ويجب أن تصمم واجبات المجموعة التعاونية كي تكون سلماً يخدم التعلم. ويجب أن تفهم العمليات والإجراءات بوضوح من بعض الأعضاء من كل مجموعة لكي يستطيعوا المساعدة في تعلم الآخرين. كما ويحتاج أعضاء المجموعة للتمرين على ما تعلموه.

ويعتمد التعاون على التبادلية، ويتطلب استمرار علاقات العمل المؤثرة بين أعضاء المجموعة من كل طالب أن يقدر قيمة تبادل المعلومات، كما ويجب أن يكون كل طالب مستعداً للعطاء مثلما يأخذ.

أساليب المكافأة Reward Structures

توفر أساليب المكافأة والذي صمم بصورة جيدة حوافز إضافية للسلوك التعلمي لدى المجموعة الصغيرة بين الطلاب. فمثلاً، بعد أن تسلم المجموعات واجباتها، يتم تقويم ناتج كل مجموعة من لدن المعلم والطلاب، ويسجل إنجاز كل مجموعة على لوحة يراها جميع الطلاب. ولضمان المسؤولية الفردية،

تنال المجموعة درجة كاملة على نتائجها، فقط، إذا ما استطاع طالب يتم انتخابه عشوائياً من إيضاح الحلول بصورة كفوءة. وهناك عدة طرائق لتسجيل واحتساب ما تنتجه المجموعة، بناءاً على طبيعة الواجبات. ويمكن أن يشتمل التسجيل احتساب عدد الحلول الصحيحة، أو التقويم الكمي لاستراتيجية الحل مع درجة بحرف، أو تصنيف العمل من كل مجموعة. ويمكن أن تتنافس المجموعات فيما بينها أو تجاهد لتلبية مقياس معين موضوع سلفاً. ويجب الانتباه لئلا تؤدي هذه المنافسات إلى رجوع الأعضاء الضعاف إلى (المقاعد الخلفية) أو الأدوار السلبية، بل يجب أن يكونوا فعالين أكثر من الطلبة المشاركين.

ويكون الطلاب العاملون في مثل هذا التركيب متلهفون على الدوام لفحص أحدهم الآخر للتأكد من أن كل فرد في المجموعة يفهم المادة ويتوافق مع النتائج والاستخلاصات، وهو قادر على تمثيل المجموعة، بأن يكون المتحدث عنهم. ويطلب الطلاب المساعدة من بعضهم البعض في التوضيح، ويسألون الأسئلة ويجيبون عليها. إن نوع التفاعل الكلامي هو عامل مهم في نجاح المجموعة.

إن الطريقة (الإستراتيجية) المحفزة الأخرى هي فِرَق الطلاب – تقسيمات الأداء (STAD). يقدم المعلم درساً، وبعدها يلتقي الطلاب في فرق من أربعة أو خمسة لإكمال مجموعة من أوراق التمارين حول الدرس. ويؤدي في حينها كل طالب امتحاناً عن المادة. وتعتمد تسجيلات أداء الطلاب المشاركين عن فرقهم على الدرجة التي طوروا فيها دوراتهم الفردية الماضية. وهناك طريقة أخرى وهي فِرق –الألعاب– المنافسة (TGT) وهي تشبه الـ STAD ولكن بدلاً من أداء الامتحانات السريعة يلعب الطلاب ألعاباً رياضية كممثلين عن فرقهم. ويتنافسون مع بقية الطلاب الذين لهم نفس مستوى الأداء.

وبهذه الأنواع من أساليب المكافأة يشجع الطلاب لا ليهتموا بأنفسهم فقط وإنما ببقية أعضاء المجموعة أيضاً. ويشترك الطلاب في التعليم الرديف (الأقراني) لأنهم سيعترفون بأن كل عضو في المجموعة يجب أن يفهم المادة. ويدرك كل طالب أن المجموعة تتوقع من كل عضو إكمال الواجب المقرر وأن يسهم في المجموعة. ويساعد الطلاب أحدهم الآخر. ويوضح أحد الطلاب مفهوماً صعباً لطالب آخر بطريقته الخاصة. ويتشارك أعضاء المجموعة المراجع والمصادر، ويعملون كمرجع لأحدهم الآخر، ويشجع بعضهم البعض للمشاركة. وحتى أولئك الذين يكونون عادة صامتين سيشعرون أن المجموعة تعتمد عليهم بالمشاركة في فعالياتها. أنها مسألة (الكل للفرد والفرد للكل) لأن هذا ما يجعل نجاح المجموعة ممكناً. وفضلاً عن المكافآت الأساسية التي يمارسها أعضاء المجموعات التعاونية الناجحة، يمكن تقديم حوافز إضافية. فيمكن أن يمنح أعضاء المجموعات الناجحة شهادات. كذلك يمكن وضع أسماء المجموعات الناجحة للشهر على لوحة النشرة. ويكون الطلاب متحفزين دائماً لتحسين درجاتهم، ولكن مكافئة الطلاب بهذه الطريقة يجب أن تتم بعناية. إن إحدى الوسائل الفعالة هي تثمين (التعاون) كنسبة مئوية لدرجاتهم النهائية. عندها يمكن أن يمنح أعضاء الفريق نقاط (تعاونية) إضافية.

المعالجة الفرقية Group Processing

على المعلم مساعدة الطلاب ليدركوا أن المجموعة كي تعمل بصورة جيدة، لا بد للأعضاء أن يشعروا بالحرية في التعبير عن آراءهم والسؤال وتوضيح الاختلافات. وهكذا، لا بد أن يتمتع كل شخص بالصبر وضبط النفس. ومتى ما تمت مناقشة كل الأفكار، حينها لا بد أن يرغب أعضاء المجموعة بالموازنة–تكامل مختلف النواحي في حل مجموعة فرد مقبول للكل. إن الاتفاق قد يكون صعباً وليس غالباً ما يتحقق بسبب تجارب الطلاب التعليمية السابقة.

وليس غريباً أن تنشأ الاختلافات والتباينات حتى ولو كانت المجموعة تعمل بشكل تعاوني. ويحتاج أعضاء المجموعة إلى المهارات لمعالجة مثل هذه النزاعات. كما ويجب على المعلمين مساعدة الطلاب في فهم حقيقة أن أعضاء المجموعة ينبغي أن يكونوا ناقدين للأفكار وليس للناس. وعليهم أن يفهموا أن النزاع أو الاختلاف يقوي الفهم ويساعد المجموعة في الوصول إلى الإجماع. كما ينبغي كذلك أن يتعلموا أهمية الإنصات لما يقوله أعضاء المجموعات الأخرى، وفهم الأفكار التي لا يتفقون معها. إن مثل هذه المهارات في إدارة الخلافات مهمة جداً لعمل أية مجموعة.

وعلى المعلمين أن يراقبوا المجموعات في تقدمها ويقدموا النصح والإرشاد متى كان ذلك ضرورياً. وعندما يكون أداء المجموعة ضعيفاً، فيجب أن يتدخل المعلم لمساعدة الطلاب بالمهارات التي يحتاجونها. ومتى ما تم تشخيص هذه المهارات ومناقشتها، عندها سيرى المعلم كيفية أداء المجموعة وفيما إذا كانت تعمل بفاعلية أكبر. ويجب أن يوفر المعلم التغذية الراجعة لكي يعلم الطلاب مدى إجادة أدائهم. ويمكن أن يطلب المعلم من المجموعة أن تراقب أدائها بنفسها من خلال

الإجابة على الأسئلة التي تتعلق بسلوك وعمل المجموعة. هل أن كل عضو يشارك في العمل؟ وهل أن الطلاب يتعاونون فيما بينهم؟ وهل إنهم يديرون ويعالجون الخلافات بصورة جيدة؟

دور المعلم في إدارة تعلم المجموعة الصغيرة
The Teachers Role in Managing Small-Group Learning

يلعب المعلم دوراً حيوياً في تحقيق تعليم المجموعة الصغيرة الفاعل. وقبل أن يطلب من الطلاب العمل في مجموعات، يجب أن يعطى المعلم توضيحاً حول الواجب، والوقت المخصص للنشاط، والتطلعات التعليمية للمجموعة، والسلوكيات التعاونية المرجوة، والخطوات التي يجب اتباعها، وبيان نجاح المجموعة.

وعلى المعلم، كمدير للصف، أن ينتبه إلى أن الصف منظم بطريقة تضمن تقارب أعضاء المجموعة بما يكفي للعمل سوية وبراحة تامة. ويجب أن تكون المجموعات منفصلة عن بعضها كي لا تتداخل فيما بينها.

وخلال عمل المجموعة يصعب في الغالب اجتذاب انتباه الطلاب. ومن الطرق التي لا تستدعي رفع الصوت هي أن يرفع المعلم يده ويطلب من الطالب الذي يلاحظ اليد المرفوعة أن يفعل الشيء نفسه ويتوقف عن الكلام. بعدها يجب أن يفعل كل طالب الشيء نفسه حينما يرى يد طالب آخر مرفوعة. ويتوقف هذا التفاعل المتسلسل عندما يرفع الجميع أياديهم ويصبح الصف هادئاً ومستعداً للانتباه للمعلم. يجب أن تنفذ هذه الطريقة بحذر وبعد تفكير عميق كي لا تبدو صبيانية جداً للصفوف الثانوية العليا.

وعندما يحس المعلمون أنهم أصبحوا مرتاحين من طريقة تعلم المجموعة الصغيرة، يمكن بعدها أن يقرروا بأنفسهم ما هو الأفضل لتسهيل العملية وما يلي بعض الاقتراحات لطرق بسيطة للبدء.

كيفية دمج تعلم المجموعة الصغيرة بدرس الرياضيات
How to Incorporate Small Group Learning into Mathematics Class

اختبار تمهيدي/مراجعة

يناسب تركيب المجموعة الطلاب لمساعدة بعضهم البعض للتحضير للاختبار. ويمكن تخصيص اختبار عينة للواجب البيتي. عندها يلتقي الطلاب في مجموعات ليناقشوا الاختبار العينة ويعمقوا فهمهم للمفاهيم والأساليب التي سيختبرون بها. وبالعمل على الاختبار العيني بشكل فردي، يأتي كل طالب إلى نقاش المجموعة بصورة دقيقة عن فهمه. إن الطلاب قادرون على تحضير أنفسه وأعضاء المجموعة الآخرون للاختبار القادم. ومرة أخرى، تتفق كل مجموعة على الحلول للمسائل ويسلمون ورقة مجموعة واحدة. ويعطي المعلم ما يكفي من الوقت لكل الصف لمناقشة تلك النواحي التي تحتاج للإيضاح.

ومن الضروري كذلك أن يحدث التعلم بعد أن يرجع الاختبار! ويستطيع أعضاء المجموعة أن يساعدوا بعضهم البعض لفهم وتصحيح أخطاءه. وقد يمنح الطلاب الفرصة كذلك لإعادة تسليم المسائل التي حدث فيها الخطأ، بشرط أن يحلوا كل مسألة بصورة صحيحة، وأن يوضحوا لم كانت حلولهم الأصلية خاطئة، وأن يعطوا تبريرات لحلهم الجديد بإعطائهم إيضاحاً مكتوباً للعمليات الفكرية التي استخدموها. يمكن لهذا الأسلوب أن يوازن التفاعل الطبيعي للعديد من الطلاب، والذين كانوا سيقبلون الخطأ الماضي،فقط للتحرك قدماً للمهمة المقبلة، حيث تنتظرهم (مهمة نظيفة). يمكن حينها أخذ الاختبارات بالحسبان وأن تكون درجة نهائية بأخذ معدل متوازن لدرجات الاختبار الأول والثاني. وربما يمكن استخدام الاختبار الأول كثلث الدرجة والثاني كثلثين.

الدرس الموجه بالواجب
The Task-Oriented Lesson

في الدرس الموجه بالواجب، تنشأ مفاهيم جديدة وأساليب أو تعميمات خلال مسيرة مهام ما قبل الواجب (الدرس). ويقدم المعلم بصورة نموذجية تقديماً، وبعدها يطلب من الطلاب أن يطبقوا معرفته الجديدة بتطبيقات مشابهة تخصهم. ويعين المدرس تطبيقات بالأسلوب المعتاد مانحاً الطلاب الوقت للعمل عليها بشكل فردي. وبدلاً من دعوة الطلاب جميعاً إلى الصف للمراجعة الجماعية لما قدموه، يلتقي الطلاب في مجموعات للمناقشة والموافقة على العمل المخصص لهم. وتكون كل مجموعة مسئولة عن تسليم نسخة واحدة من الحلول المتفق عليها. وبعد أن يسلم العمل، يدير المعلم نقاشاً لتلك التطبيقات التي تحتاج إلى توضيح وكواجب إضافي، وقد يطلب من المجموعة الإجابة على سؤالين: (ماذا تعلمنا اليوم مما لم نكن نعلمه سابقاً؟)، و (وماذا أردنا أن نعرف كنتيجة لعمل اليوم؟). وتعطي الأسئلة المقترحة الفرصة لكل مجموعة لتلخيص الدرس، كما وتزود المعلم بتغذية راجعة للتخطيط المستقبلي. ويعطي سؤال المجموعات بكتابة جملة أو اثنتين حول ما تعلموه في يوم معين الفرصة للطلاب للإظهار، وللمعلم لتقييم أثر الدرس.

الإثراء Enrichment

يعد العمل الجماعي طريقة ممتازة لدمج خبرات الإثراء في درس الرياضيات، ولتحفيز اهتمام الطالب في موضوع جديد، يمكن أن تبحث مجموعات تعلمية صغيرة في التطورات التاريخية للموضوع. ويجب على أعضاء المجموعة تقسيم العمل بينهم. فمثلاً يمكن أن يبحث أحد الطلاب في تاريخ بداية الموضوع، ويكون الآخر مسؤولاً عن بيان الرياضيين الذين كان لهم دور فاعل في تطور الموضوع. وربما تحتاج المجموعة لشخص يبحث في النوادر والحوادث التي لها علاقة بالموضوع وأخيراً، قد يكون ممتعاً لأحد الأعضاء أن يبحث في كيفية تأثير معرفة هذا الموضوع على العالم. ويمكن وضع المشروع هذا على اللوحة الجدارية الدورية.

ويمكن للمجموعات التعلمية الصغيرة الاندماج في الرياضيات الإبداعية والتي تتحدى الطلاب بحل المسائل بصورة إبداعية. (انظر الفصل الرابع في حل المسألة)

فمثلاً يمكن أن ينظم العمل في طرائق مختلفة، أو يمكن أن تعطى مسألة للمجموعات والتي يجب أن تحل في نهاية الأسبوع. وفي نهاية الأسبوع، تقدم المجموعات التي تدعي أنها حلت المسألة حلولها. ويختار المعلم متحدثاً عن كل مجموعة يقدم الحل بصورة فرضية قبل أن تحصل على درجة لحلها المسألة.

ولحل المسائل الجماعي فوائد عديدة. ويشترك أعضاء المجموعة في ما يسمى (العصف الذهني) وهي فعالية تمكن كل الأعضاء من المشاركة في طرح الآراء الحرة. وهنا يمتلك الطالب الضعيف في حل المسائل الفرصة للمشاركة في عملية حل المسائل مع بقية الأقران القادرين على ذلك. لا يتعلم كل الطلاب كيفية حل المسائل فحسب، وإنما يشاركون كذلك في المتعة التي تحظى بها المجموعة عندما تحل المسألة.

نموذج درس لعمل مجموعة تعاونية

Sample Lesson for Cooperation Group Work

حل معادلات جذرية Solving Radical Equations

يمكن أن يدرس أي درس ضمن مجموعة. وكما نوقش سابقا، فان هناك اكثر من سبب مختلف وراء اقتراح درس بتعلم تعاوني. سنقوم في هذا المقام بتناول درس رقم (7) من مقترحنا بخصوص مخطط وحدة حول موضوع الجذور مع اقتراح مخطط درس يستخدم التعلم التعاوني. لهذا السبب، فعند حل المعادلات الجذرية، اقترحنا مجاميع تتألف كل منها من خمسة طلبة.

إن تقسيم طلبة الصف إلى مجاميع غير متجانسة Heterogeneous سيتيح فرصة التواصل المختلفة دون الحاجة إلى التعويل على قادة الصف لاستبعاد البقية. وبعد تنظيم الصف وتقسيمه إلى مجاميع غير متجانسة، قم بتوزيع نسخة واحدة من ورقة العمل الآتية لكل مسجل مجموعة. رتبت المسائل لتمكين الطلبة من إيجاد الإجراءات المطلوبة كحل المعادلات الجذرية.

لكل مما يأتي، قم بحل، وفحص، وعرض مجموعة الحل، مع بيان كل خطوة من خطواتها.

1. $\sqrt{x}=5$
2. $\sqrt{x+1}=5$
3. $\sqrt{x+1}=-5$
4. $\sqrt{x+1}-1=5$
5. $\sqrt{x+1}+5=1$
6. $x=1+\sqrt{x+5}$
7. $\sqrt{3x-1}=2\sqrt{8-2x}$
8. $\sqrt[3]{4x+5}=3$

تلميحات: بالنسبة للمسألتين 4 و5 قم بفرز الجذور.

الأسئلة:

أية معادلة ينتج عنها جذور غريبة Extraneous Roots.

وضح سبب كون الجذور غريبة.

دعوة للتحدي:

$$\sqrt{x+1}=1-\sqrt{2x}$$

تمارين Exercises

1. يلاحظ المعلم أن بعض المجموعات التعلمية التعاونية في الصف: يقوم الطلاب الأذكى بكل العمل. ما هي بعض الطرائق التي يمكن للمعلم استخدامها لمنع حدوث ذلك؟
2. تتلقى مكالمة هاتفية من والد غاضب لأحد الطلاب اللامعين في صفك. يتذمر الوالد من إلزام ولده بمساعدة الطالب الضعيف في مجموعته. كيف سترد على هذا الوالد؟
3. يلاحظ المعلم أن أحد من الطالبات ضعيفي القابلية لا تشارك في مجموعتها. كيف سيعالج المعلم هذا الموقف؟
4. صمم درس استكشاف تعلمي تعاوني يمكن الطلاب من التخمين آخذين بالحساب العلاقة بين زوايا المثلث الثلاث.
5. يدرك المعلم أن العديد من المجموعات التعاونية في صفه لا تعمل بشكل فاعل، لذا يقرر تغيير تركيب المجموعات في نهاية الوحدة التعليمية. ما هي الإجراءات التي يمكن أن يستخدمها لإعادة تنظيم المجموعات في أحسن أسلوب ممكن.
6. صف ثلاث مميزات طلابية والتي يجب أن يأخذها العلم بالاعتبار عند تشكيل المجموعات غير المتجانسة.
7. لماذا يحتاج أعضاء المجموعة التعلمية التعاونية الفاعلة إلى مهارات إدارة النزاعات؟
8. ترفع طالبة تقريراً بان مجموعتها تعمل بصورة جيدة، وليس هناك خلافات أو نزاعات. رغم ذلك لا تصل الإنجازات إلى الحد المطلوب أو كما يجب. كيف ستعالج هذا الموقف؟
9. صف بعض الطرائق التي يمكن بواسطتها أن يراقب المدرس تطور المجموعات التعلمية التعاونية.
10. صمم درساً يمكن أعضاء المجموعات التعلمية التعاونية من اكتشاف أن مجموع الجذور لمعادلة من الطراز ax2+bx+c=o هو ‎-b/a‎ وأن ناتج ضرب الجذور هو c/a. افترض أن الطلاب يستطيعون حل مثل هذه المعادلة من الدرجة الثانية بالعوامل أو بالقانون.

نماذج دروس Sample Lessons

في اصطلاحات "المعايير"، يتألف جوهر المنهج الدراسي من بضع سنوات من متطلبات دراسة الرياضيات التي تظهر بوضوح طبيعة التغييرات واتساع معالجة الموضوعات والتطبيقات.

وعلى هذا الأساس، فان جميع الطلبة – و بصرف النظر عن مستوى قابلياتهم – سوف يختبرون كافة موضوعات المنهاج الدراسي. وعليه، فإن الطلبة الذين تم اختيارهم سابقا لمضمار عام أو عملي، مع منهاجه الدراسي المتخصص، سوف يتم الآن تعريضهم إلى نفس المادة الدراسية مثل حدود الكلية، بالرغم من كونهم على مستوى مختلف من الاستعداد.

إن الدروس الجوهرية التالية تظهر بوضوح كيف ان نفس المحتوى يمكن عرضه بمستويات مختلفة من التجريد، بالرغم من اختلاف استراتيجيات التعليم في ضوء مستويات اهتمامات الطالب، والمهارات، والأهداف.

النموذج الأول لدرس جوهري

First Sample Core Lesson

تأمل الرسم البياني للقطع المكافئ $y=x^2+x-6$ (Parabola)

المستوى الأول FIRST LEVEL

ينبغي أن يكون قد طور الطلبة مهاراتهم في حساب الصياغات الجبرية التي تحتوي على أسس لكل من قيم المتغير x الموجبة أو السالبة. كذلك ينبغي أن يهيأ الطلبة لرسم النقاط في نظام الإحداثيات المستطيلة الشكل.

على جميع الطلبة إكمال الجدول الآتي، ورسم النقاط على شبكة الإحداثيات Coordinate Grid، ووصلهم عن طريق رسم منحنى مستمر أملس – انظر شكل رقم (1).

إن الخواص المنعكسة للقطع المكافئ (شكل رقم 2) ينبغي الإشارة إليها مع استخداماتها في الهوائي Antenna والمصابيح الأمامية للسيارات Head lights.

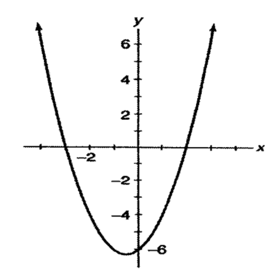
المستوى الثاني SECOND LEVEL

سيستخدم الطلبة آلة حاسبة رسومية إعداد رسم بياني للمعادلة $y=x^2+x-6$ واحتساب قيم اصفاره. سيظهر القطع المكافئ كما في شكل 1، وستكون قيم اصفاره في تقاطعاته مع المحور السيني x-axis عند في (3- و 2).

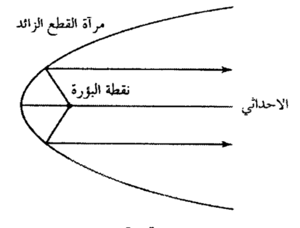
المستوى الثالث THIRD LEVEL

سيقوم الطلبة برسم خط التناظر Line of Symmetry في الرسم البياني الذي تم إعداده للمستويين 1، 2. سيدرك الطلبة بأن خط التناظر هذا، والذي يعرف أيضا بمحور التناظر Axis of Symmetry، يقع في منتصف المسافة بين القيم الصفرية للدالة، (2، 3−).

x	y
−4	6
−3	0
−2	−4
−1	−6
0	−6
1	−4
2	0
3	6



شكل رقم (1)



شكل رقم (2)

سيقومون بتعميم مبدأ بان محور التناظر يمر خلال نقطة منتصف القطعة المستقيمة على المحور السيني والذي يصل بين نقطتي الصفرين.

وفي هذا المثال، فان معادلة محور التناظر تبدو بأنها ستكون $x = \frac{-1}{2}$. وسيزيد الطلبة من التعميم عندما يدركون بان نقطة المنتصف تمثل معدل القيمة بين نقطتي الصفرين.

من المعادلة التي تم تعلمها سابقا حول مجموع جذور المعادلة التربيعية، المجموع $\frac{-b}{a}$، فان معادلة محور التناظر للمعادلة العامة $y=ax^2+bx+c$ ستكون في ضوء ذلك: $x = \frac{-b}{2a}$

يستطيع الطلبة بسهولة، فيما بعد، إنشاء جداول مرتبة تناظريا والتي سوف تعطي قطوع متكافئة–متناظرة، تبدأ بمحور التناظر ثم اختيار نفس العدد من النقاط على الجانبين.

المستوى الرابع FOURTH LEVEL

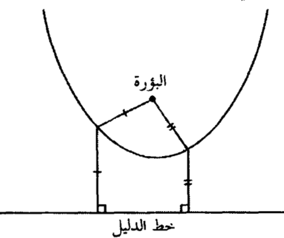
بعد إكمال المستويات الثلاثة الأولى، سيستخدم الطلبة منهج المحل الهندسي Locus Approach لرسم القطع المكافئ. بداية ينبغي تقديم تعريف المحل الهندسي للقطع المكافئ وهو: "القطع المكافئ هو مجموعة النقاط في مستوى يبعد مسافات متساوية عن مستقيم ثابت (خط الدليل Directrex) ونقطة ثاباتة (البؤرة Focus) والتي لا تقع على المستقيم الثابت".

ينبغي أن يتم إعداد الرسم العام بحيث تعكس بوضوح تعريف هذا المحل الهندسي، مع أمثلة محددة حول القطع المكافئ بالصيغة $y = ax^2$، أو $x = ay^2$. ينبغي أن يكلف الطلبة باحتساب إحداثيات البؤرة، ومعادلة خط الدليل (Directrex) التي تصاحبه. يتألف العمل اليدوي من نقطة محددة (دبوس) وقطعة من الخيط أو (السلك) لإيضاح مفهوم التعريف (شكل 3).

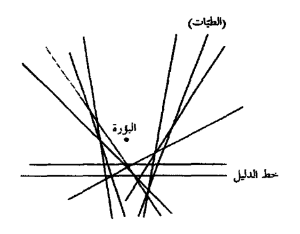
يصف شكل (4) القطع المكافئ الذي تم تشكيله من غلاف Envelope تم إنشاؤه بواسطة ثنيات المماس لقطعة من الورق العامل بالشمع Waxed Paper. (إن أساس هذا الهيكل هو تعريف القطع المكافئ الذي تم عرضه سابقا. وإن التقانة البارعة التي استخدمت في ثني الورقة كانت كما يلي: خذ قطعة كبيرة من الورق العامل بالشمع، واشر نقطة لتكون بؤرة، ثم ارسم خطا مستقيما ليكون خط الدليل. قم بطي الورق العامل بالشمع بضعة مرات بحيث تضع البؤرة على خط الدليل في كل مرة، ثم اعمد إلى تجعيد Crease كل طية. سينشأ عن التجعيدات غلافا للقطع المكافئ).

إن أغلفة الأجزاء المتبقية من القطوع المخروطية Conic Sections يمكن أن تعرض الآن مع مقدمة عن فن (الأسلاك) والخيوط. وقد يكون فن (الأسلاك) والخيوط مناسبا في مستويات أخرى، أيضا (انظر الفصل الثالث كمرجع لهيكليات فن الأسلاك والخيوط).

قد تتضمن الدروس العملية قطوعاً متكافئة متناظرة بدلالة المحور الصادي y-axis أو المحور السيني x-axis، أو مع المحاور التي تدور بأية زاوية.



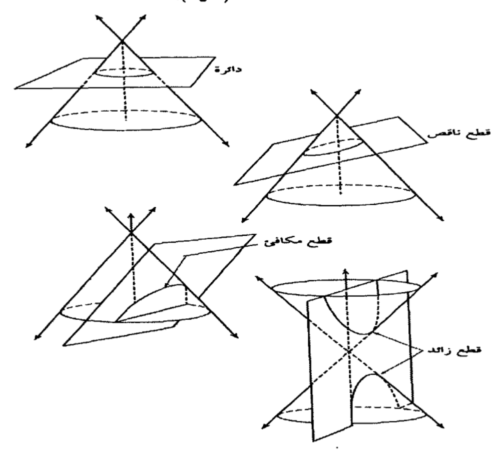
شكل (3) القطع المكافئ كمحل هندسي



شكل (4) غلاف القطع المكافئ

المستوى الخامس FIFTH LEVEL

في هذا المستوى سيتعلم الطلبة الذين ينوون الالتحاق بالكلية College bound بأن القطع المكافئ هو مقطع من مخروط أنشئ من شريحة موازية لأحد عناصره. ويمكن توسيع هذا الأنموذج Model ليتضمن البراهين التي تظهر بان عملية تقطيع الشرائح Slicing باتجاهات أخرى سينشأ عنها شكل دائرة، إذا كان المخروط دائريا، أو شكل قطع ناقص Ellipse، أو شكل قطع زائد Hyperbola، أو حتى مستقيمان متقاطعان (شكل 5).



شكل رقم (5)

إن تمريننا إثرائياً يحمل طابع التحدي للمستوى الخامس سوف يبرهن على ما يأتي: إن السلك المنتظم الذي يتدلى بحرية وبتأثير وزنه، يأخذ شكل سلسلة Catenary.

ولكنه سوف يعلق على شكل قطع مكافئ عندما يتم وزنه (تدلّيه) بطريقة ما بحيث أن وزنه الصافي لكل قدم أفقي يكون ثابتا.

إن الطلبة الذي ينوون الالتحاق بالكلية وبقدراتهم الرياضية المتميزة سيكونون قادرين على استخدام هندسة المتجه Vector Geometry للبرهنة على هذه الحقائق.

النموذج الثاني لدرس جوهري

Second Sample Core Lesson

فكر مليا في التعريف التالي بميدان الهندسة الافتراضية Postulational Geometry "إن مساحة أي سطح مستوى تكافئ عدد الوحدات المربعة التي يحتويها".

المستوى الأول FIRST LEVEL

سيقوم المعلم بتعريف وتوضيح المصطلحات والعبارات غير المألوفة من خلال العبارات الأربع الآتية مقرون برسم، وقطع، وإعادة ترتيب أشياء واقعية ملموسة.

(الأرقام الحسابية التي تستخدم لوصف الأبعاد يمكن أن تكون أعداداً: صحيحة، كسرية Fractional، أو عشرية Decimal، في ضوء ما يناسب بيئة الدرس). يمكن أن تتضمن التطبيقات دوائر للمستوى الأول، ولكنها ستكون غير ذات علاقة وزائدة للمستويات العليا لأنها لا تتناسب مع المعالجة الافتراضية المقبلة.

إن قيمة π سوف تحتسب على أساس 3.14 أو $\frac{22}{7}$.

وبالنسبة للطلبة الأكثر تقدما يمكن للمعلم أن يوضح التعابير الأربعة بواسطة وصف الأبعاد عن طريق صياغات جبرية بدلا من الأرقام الحسابية.

1. مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طول قاعدته في الارتفاع.
2. مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب طول أحد أضلاعه في الارتفاع الذي تم رسمه على ذلك الضلع.
3. مساحة المثلث تساوي نصف حاصل ضرب طول أحد الأضلاع في الارتفاع المقام على ذلك الضلع.
4. مساحة شبه المنحرف تساوي نصف حاصل ضرب الارتفاع في مجموع أطوال قاعدتيه.

المستوى الثاني SECOND LEVEL

سيقوم المعلم بافتراض التعبير الأول ويتبعه ببراهين هندسية تتألف من السياقات التالية من المبرهنات والقضايا، حيث يستند كل برهان إلى القضايا التي تقدمت عليه:

$(2) \rightarrow (3) \rightarrow (4)$

ملاحظة: الأعداد المستخدمة لوصف أبعاد الأشكال قد تكون قياسية أو غير قياسية Irrational.

المستوى الثالث THIRD LEVEL

سيكتسب الطلبة منظورا تاريخيا لتطور النظم الافتراضية (البديهية) Postulational Systems عن طريق الرجوع إلى كتاب "الأصول" لإقليدس Euclid's Elements وفرضياته الهندسية الخمس. إن مناقشة الفرضية الاقليدية الخامسة، فرضية بلاي فير(*)، ورباعي ساخيري Saccheri هي امتدادات إضافية تؤدي إلى إظهار الهندسة اللا اقليدية، وهي إنجاز كبير في تاريخ الرياضيات.

يتضمن الموضوع الإثرائي المقترح دراسة الأشكال الكروية، والمجسم المكافئ، والزائدي وفق المفاهيم السائدة في الهندسة اللا اقليدية.

ينبغي كذلك مناقشة موضوعات: إنشاءات الفرجار Compass، والمسطرة العدلة Straightedge والإنشاء بأدوات أخرى، .وتقسيم زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية، واستنساخ نسخة مطابقة لمكعب، ستمهد إلى مناقشة Galois (**) ونظرية الزمر (Theory of groups).

المستوى الرابع FOURTH LEVEL

سيطلب من الطلبة إنشاء نظم فرضيات شخصية محدود Minipostulational Systems من أي ميدان آخر في الرياضيات، أو من موقف في الحياة الواقعية. إن دراسة المنطق الرمزي، والقياس المنطقي، وجداول الصدق Truth Tables، سوف تساهم بدعم الطلبة في جهودهم الحثيثة لإنشاء نظم متسقة.

النموذج الثالث لدرس جوهري

Third Sample Core Lesson

إن نظرية فيثاغورث المعروفة والتي تعالج المثلث قائم الزاوية Right Triangle $a^2+b^2=c^2$، تعد الحجر الأساس للقياسات الخطية في الهندسة.

(*) جون بلاي فير (1748-1819) رياضي وجيولوجي سكوتلندي، لديه مؤلفات كثيرة، أهمها عناصر الهندسة Elements of Geometry (1795).

(**) رياضي فرنسي من القرن الثامن عشر.

وتلعب هذه المبرهنة دورا فاعلا، وتمتلك تأثيرا ملموسا في ميدان المواقف الهندسية ثنائية وثلاثية الأبعاد. بيد أن القياسات الخطية، هي بالتأكيد، ليست الأمر المهم الوحيد في نظرية فيثاغورث.

إن تعميم هذه المبرهنة، والمعروف بالنظرية الأخيرة لفيرمات Fermat قد تركت أثرا ملحوظا على نظرية الأعداد.

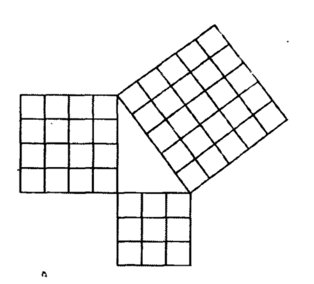
المستوى الأول FIRST LEVEL

سيقوم المعلم بعرض أنموذج علمي لمثلث قائم الزاوية أضلاعه (3-4-5) مع وحدات مربعة-بلاستيكية، يمكن ترتيبها لتكوين مربع على كل ضلع، لبيان أن مجموع مساحات المربعات على ساقي المثلث تساوي مساحة المربع المقام على وتر الزاوية القائمة. (شكل 6).

إن الثلاثيات الفيثاغورية المشهورة فضلا عن 3-4-5 وهي: 5,12,13، 8,15,17، 7,24,25 وكذلك مضاعفاتها وأجزاؤها، سيمكن استخدامها في وصف المواقف العملية السائدة في الحياة الواقعية.

سيتعلم الطلبة الأساليب الجبرية لاحتساب الضلع الثالث لأي مثلث قائم الزاوية، بعد إعطائهم أبعاد الضلعين الآخرين.

. وسيتعلم الطلبة , في الواقع، كيفية حل المعادلات ذات الصيغة $x^2=k$. وسيتضمن هذا الأمر استخدام الآلة الحاسبة، أعداد قياسية وأخرى غير قياسية، وإجابات غير مألوفة، والتقريب، والتقدير.



شكل رقم (6)

أنموذج بلاستيكي لثلاثية فيثاغورث 3-4-5

المستوى الثاني SECOND LEVEL

بعد تطوير نظريات معدل الكميات المتناسبة – الثلاث التي تنتج عن رسم ارتفاع إلى وتر المثلث ذي الزاوية القائمة، سيتهيأ الطلبة لملء الفراغات على أوراق الرسم البياني للإجابة على الأسئلة السبعة في أنموذج مخطط الدرس المعروض في مكان قريب.

يتبع ذلك سبعة أسئلة ممارسة وتحد، وننصح بان تحل هذه الأسئلة السبعة بوصفها جزءا من مناقشة مجموعة صغيرة. بعد أن يعاد جمع طلبة الصف وتوحيدهم على شكل مجموعة كبيرة، يمكن أن يطلب من الطلبة مناقشة ملخص الأسئلة الختامي. في هذه النقطة ينبغي تحديد الواجب البيتي. وإذا توفرت الرغبة الكافية، يمكن إضافة مسألة التحدي المشار إليها إلى الواجب البيتي المحدد. ويمكن مناقشة كليهما ضمن مجاميع صغيرة في اليوم التالي.

يمكن تقديم حساب مثلثات المثلث قائم الزاوية في هذا المقام، مع استخدام الآلات الحاسبة لحساب الدوال المثلثية Trigonometric functions لأية زاوية حادة.

المستوى الثالث THIRD LEVEL

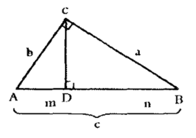
سيستخدم الطلبة هندسة الإحداثيات Coordinate Geometry لرسم نقاط ينشأ عنها مثلثات قائمة الزوايا في مجموعة من أشكال المستويات. وسيقومون باشتقاق صيغة المسافة Distance formula للأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.

إن التطبيقات في هندسة المستويات أو الإحداثيات تعد مناسبة، مثل إيجاد وتر المكعب الذي طول ضلعه 2، أو منشور المستطيل والذي أبعاده 2، 3 ،4.

كذلك فان من المناسب لهذا المستوى فتح باب مناقشة براهين غير مباشرة في الرياضيات، مثل تلك التي تبرهن على عكس نظرية فيثاغورث.

إن قانون جيوب التمام Cosines، وقانون الجيوب Sines لأي مثلث، ينبغي توضيحها بتفصيل في كل من صياغات هندسة الإحداثيات والهندسة التركيبية Synthetic Geometry في هذا المستوى.

من المناسب أيضا معالجة تطبيقات شاملة بميدان حل المسائل، وباستخدام آلات حاسبة، نظرا لطبيعة الارتباطات القائمة بينها وبين حلول المثلثات. وإن حلول هذه الأسئلة سوف تمهد الطريق أمام توضيح تفصيلي للتعاريف الخاصة بمعكوسات دوال المثلثات Inverse Trigonometric functions.

أنموذج مخطط درس Model Lesson Plan	تعليقات Comments
الموضوع: درس على نظرية فيثاغورث.	لمساق هندسة في المدرسة الثانوية
الهدف: تقديم، وبرهنة، وتطبيق نظرية فيثاغورث.	
النشاط المحفز: في الشكل، $\overline{CD}$ هو ارتفاع المثلث القائم الزاوية ΔABC في النقطة C. وقد تم تأشير أطوال أضلاع المثلث. أنجز ما يأتي بالرجوع إلى الشكل أدناه:	هذه المجموعة من التمارين سيتم نسخها وتوزيعها على الصف.
	لاحظ أيضا بأن هذه التمارين تستعرض نظرية المتوسط التناسبي Mean Proportional Theorem مع إتاحتها، في نفس الوقت، للطالب فرصة للبرهنة على نظرية فيثاغورث. وبالرغم من أن بعض الطلبة قد يعجز عن إدراك هذا الأمر في البداية، ستتوفر لهم فرصة لرؤية ذلك خلال مراحل هذا الدرس.
1- الضلع AC هو المتوسط التناسبي بين $\underline{AB}$ و $\underline{AD}$. 2- إذن $\frac{c}{(b)}=\frac{b}{(m)}$ أو $b^2=\underline{(cm)}$. لماذا؟ 3- الضلع $\underline{(BC)}$ هو المتوسط التناسبي بين AB، BD. 4- إذن $\frac{(c)}{a}=\frac{(a)}{n}$ أو $a^2=(cn)$. لماذا؟ 5- بإضافة نتائج الفقرة 2، إلى نتائج الفقرة 4 ستحصل على $a^2+b^2=\underline{(cm)}+\underline{(cn)}=\underline{(c)}\ (m+n)$. 6- لكن $m+n=\underline{(c)}$. 7- إذن $a^2+\underline{(b^2)}=\underline{(c^2)}$. ملاحظة: إن الأقواس تعني إجابات صحيحة للطلبة، والتي ينبغي عدم وجودها على الصفحة الأصلية لورقة العمل.	
الاستكشاف	
1- اسأل الطلبة (اخترع قصة ما) فيما إذا كانوا يستطيعون إدخال سطح منضدة قطرها 5 أقدام من باب ارتفاعه 8 أقدام وعرضه 6 أقدام فقط.	لا تتعجل عندما تقص قصتك، بهدف الحصول على الغاية من روايتها وبعكسه سيزول التأثير المتوقع لهذا الأسلوب
2- استخدم الأوراق الشفافة لجهاز العرض العلوي Overhead لاستعراض تمرين "النشاط التحفيزي" مع طلبة الصف.	ينبغي تهيئة الورق الشفاف بحيث نسخة مستنسخة عن ورقة العمل الخاصة بالتمرين الذي زود بها الطلبة. ينبغي استعراض الموضوع بعناية بحيث نصل إلى افضل فائدة مرجوة من هذا التمرين.
3- وضح لطلبة الصف أهمية هذا التمرين، وبأنهم قد برهنوا الآن على نظرية فيثاغورث	يجب أن يعرض بعناية للحصول على ما يهدف للوصول إليه من هذا التمرين.
الارتباطات	
1. اسأل الصف عن الصفات المشتركة بين كل من اقليدس Euclid، والرئيس جيمس جارفيلد James A.Garfield.	كلاهما يبرهن على نظرية فيثاغورث
وابدأ الآن بإعطاء الطلبة نبذة تاريخية عن نظرية فيثاغورث (مثل "المصريين الذين يشدون الحبال" أو البراهين + 360). (انظر: E.S. Loonis, the Pythagorean Properties, Washington D.C.: NCTM, 1968).	هذه المناقشة المختصرة سوف تولد اهتماما اكبر بهذا الموضوع.

أنموذج مخطط درس Model Lesson Plan	تعليقات Comments

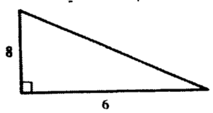
2. ناقش تطبيق نظرية فيثاغورث مع طلبة الصف.

الأداء المساعدة المرئية سوف تكون مفيدة في هذا المقام.

أنشطة الممارسة

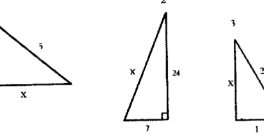
1. جد طول وتر الثلث القائم الزاوية التالي:

(هذه تطبيقات بسيطة ويجب القيام بها في الصف)



2. جد قيمة المتغير x فيما يلي (أرسل الطلبة إلى السبورة Chalk board)

هذه تمارين بسيطة التي تنطبق فقط على نظرية فيثاغورث ولا تتطلب معرفة مسبقة بغيرها.



سيطلب من الطلبة كتابة إجاباتهم الصحيحة على السبورة. وسيتابع المعلم هذه الإجابات المعلم أثناء تنقله داخل الصف، بينما يستمر الطلبة بالعمل على حل هذه التمارين.

الخلاصة المتوسطة (اطرح الأسئلة التالية):

1. انطق نظرية فيثاغورث.
2. ما هي طبيعة استخدامات نظرية فيثاغورث؟
3. هل يمكن تطبيق نظرية فيثاغورث على أي مثلث إذا تم إعطاء أطوال ضلعين من أضلاعه؟

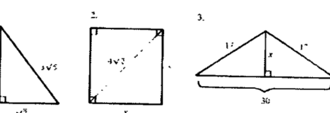
ستظهر هذه الأسئلة،للعيان، الموضوعات الرئيسية بالقسم السابق من الدرس وستكون مختصرا إلى هذه النقطة من الدرس.

التحدي:

جد قيمة المتغير x فيما يأتي (أرسل الطلبة إلى السبورة عند تعيين المسائل للصف).

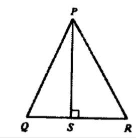
ينبغي تكليف الطلبة بأداء عملهم على اللوحة الطباشيرية مباشرة، بدلاً من حل المسائل أولا في مقاعدهم ثم نسخها على اللوحة.

سيتعلم الطلبة من الأخطاء كما سيتعلمون من الحلول الصحيحة.



4. إذا كان $\overline{PS}$ هو ارتفاع المثلث PQR

برهن: $PQ^2-RP^2 = QS^2-SR^2$



أنموذج مخطط درس Model Lesson Plan	تعليقات Comments

التقييم الختامي

1. انطق نظرية فيثاغورث بكلمات مختصرة.
2. كيف تساعدنا نظرية فيثاغورث في إيجاد طول الوتر بمستطيل ما، إذا توفر لنا أطوال ضلعين من أضلاعه؟
3. هل يمكن تطبيق نظرية فيثاغورث على أي مثلث تتوفر لدينا أطوال ضلعين من أضلاعه؟
4. ماذا تخمن أن يكون صحيحا حول مثلث أضلاعه 3,4,5 على التوالي؟
5. هل استطعنا البرهنة على طبيعة حالتك إزاء سؤال 3؟

تم تصميم هذا التقييم لاستعراض موضوع هذا الدرس وإتاحة الفرصة للطلبة بإظهار طبيعة فهمهم له وطبيعة تطبيقاته. الأسئلة 3-5 ستمهد للدرس القادم حول عكس نظرية فيثاغورث.

تحديد الواجب البيتي

1. أربعة تمارين مشابهة لتلك في الجزء التطبيقي من مخطط الدرس.
2. برهان واحد يتضمن نظرية فيثاغورث.
3. تمرين واحد حول استخدام مبرهنة المتوسط التناسبي.
4. تمرين واحد حول مثلثات مشابهة.

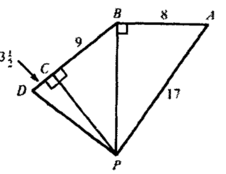
إن تحديد هذا الواجب البيتي هو أسلوب تحديد حلزوني يستعرض المواد التي تم تعلمها في مراحل سابقة، إضافة إلى الموضوعات المطروحة حاليا (انظر المناقشة حول تحديد الواجب البيتي في بداية هذا الفصل).

مشروع خاص

(ناقش مسألة التحدي التالية مع طلبة الصف).

في الشكل $\overline{PC}\perp\overline{BD}$ في نقطة C و $\overline{PB}\perp\overline{AB}$ ، AP=17، AB=8، BC=9 و $CD=3\frac{1}{2}$ جد قيمة PD.

$(12\frac{1}{2})$



هذه المسألة تتضمن مجموعة تطبيقات حول نظرية فيثاغورث، وتعد نقلة موضوعية من التطبيقات البسيطة-السابقة.

معدات وأدوات خاصة

مجموعة نسخ من الأنشطة المحفزة بالإضافة إلى نسخ شفافة منها، جهاز عرض علوي ، وطباشير ملون، ومسطرة. (أو نوعه ما من مسطرة السبورة).

المستوى الرابع FOURTH LEVEL

في الوقت الحاضر، سيهيأ الطلبة، لفهم الهندسة الكروية Spherical Geometry وتعريف الزوايا القائمة في الجسم الكروي. إن درسا تمهيديا بموضوع الهندسة اللاأقليدية سينجم عنه انقلاب مفاهيمي ملموس في تاريخ الهندسة، وبالخصوص، النتائج والمضامين التي تنشأ عن التباين مع المسلمة الاقليدية الخامسة.

إن الخصائص الطوبولوجية Topological للأنموذج اللااقليدي، مثل الكرة والقطع المكافئ الزائدي hyperbolic paraboloid، يمكن أن تطرح للعرض والمناقشة جنبا إلى جنب مع التحويلات في هندسة صفيحة المطاط Rubber Sheet Geometry. وعلى أعقاب نظرية فيثاغورث تأتي المبرهنة المعروفة بمبرهنة فيرمات الأخيرة. كتب فيرمات على هامش احد الكتب الموجودة في مكتبته ملاحظته الشهيرة : المعادلة $z^n = y^n + x^n$ لا يمكن أن تحل بإعداد موجبة صحيحة x,y,z لقيمة ...... n=3,4,5.

إن المحاولات العقيمة على برهنة هذا الحدس الرياضي قد نشأ عنها المزيد من الإنتاج العلمي الرياضي لفترة امتدت لأكثر من 350 عاما، بيد أنه لم يظهر على ساحة المجتمع الرياضي من يمتلك القدرة على تدقيق النظر بهذا الحدس الرياضي!

إن البحث عن برهان صحيح قد توج بالبرهان الرياضي للدكتور اندرو ويلس Dr. Andrew Wiles من جامعة برنستون في حزيران 1993 (مع تعديل قام به بعد ذلك العام). أن التحليل الأكثر عمقا لمبرهنة فيرمات سيفتح أفاقا جديدة أمام مناقشات لإيجاد حلول لمعادلات دايوفانتين Diophantine Equations(*)، وبالخصوص ذات الدرجة الأولى (مثل إيجاد جميع أزواج الأعداد الصحيحة للمتغيرين x,y التي تحقق المعادلة ax+by=n، حيث ان a,b,n هي أعداد صحيحة معطاه)

سيتعلم الطلبة في هذا المستوى، معنى ودلالة العدد الأولي النسبي Relatively Prime وربما تقوده إلى اكتشاف طريقة لتوليد الثلاثي الفيثاغوري الأولي Primitive Pythagorean Triples.

عينة دروس "المعايير"
Sample Standards Lessons

إن الدروس المعدة لتدريس مجاميع صغيرة أو كبيرة، والتي تتضمن التشكيلات ، والآلات الحاسبة، والحواسيب، والأسئلة المقترحة، والمهام التي تحمل طابع التحدي، وحقائب عينة عمل الطالب الصفي، وجوانب أخرى من الأنشطة الصفية، قد تم اقتراحها بواسطة "المعايير" سيشار إليها على أنها دروس المعايير STANDARDS LESSONS.

بالرغم من أن الخطوط العامة لمخطط الدرس اليومي صفحة (46) كان الأساس الذي ارتكزت إليه أربعة نماذج لدروس "المعايير" قد تم إعدادها لهذا القسم، إلا أن من الضروري أن تكون منتبها إلى الحقائق الآتية:

1. إن المخطط للدرس اليومي هو صيغة ينصح بها فحسب، ولا يقصد بذلك انه المخطط الوحيد.
2. إن تحليلك القبلي لدروس المعايير صفحة (72-79) سوف يوفر لك فهما اعمق بما يتوقع من الدروس التي تستخدم استراتيجيات المعايير.
3. أن درس المطالعة الذي سيشار إليه لاحقا يعرض برهانا هندسيا منهجيا قد كتب بصيغة فقرات بناء على الأسلوب الذي تقترحه المعايير لكتابة البراهين الرياضية، بدلا من اعتماد صيغة العمودين التي لا تزال شائعة الاستعمال بالوقت الراهن.

(*) هي عبارة عن معادلة متعددة الحدود بحيث أن معاملاتها لا تساوي صفرا، كما أن قيمة معامل n تكون عددا صحيحا موجبا.

عينة درس تطبيقي بنموذج المعايير

الموضوع: درس تمهيدي حول تحليل ثلاثي الحدود بصيغة ax^2+bx+c إلى حاصل ضرب ثنائي الحدود.

المعرفة القبلية: يستطيع الطلبة ضرب ثنائية الحدود بالتخمين.

صيغة التدريس: كل من المجاميع الصغيرة والكبيرة.

النشاط المحفز: تعين مجاميع صغيرة من الطلبة لتحديد الإجابات لكل من المجموعات الآتية، واقترح بان تقوم كل مجموعة باختيار ممثل عنها يقوم بتقديم تقرير عن مقترحات المجموعة لطلبة الصف بعد إعادة لم شملهم.

المجموعة 1	المجموعة 2	المجموعة 3	المجموعة4
(x+3) (x+2)	(x+5) (x-2)	(x-3) (x+2)	(x-3) (x-5)
(x+1) (x+7)	(x-3) (x+5)	(x+1) (x-6)	(x-1) (x-8)
(x+4) (x+3)	(x+5) (x-1)	(x-4) (x+2)	(x-7) (x-2)

الاستكشاف: بعد اكتمال لم شمل طلبة الصف، ادع كل ممثل مجموعة لإنجاز ما يأتي:

1 مناقشة أنماط كل مجموعة اكتشفها الطلبة.

2 قم بتوضيح كيفية استخدام الأنماط للعمل باتجاه العوامل، وباستخدام الناتج $x^2 + 8x + 15$ كبيان لذلك. ثم ابدأ باستبدال الإشارة الموجبة (+) بالإشارة السالبة (–) أمام المتغير 8x واستمر بتطبيق الإجراء لكل مجموعة.

أ. يؤكد المعلم على ضرورة البدء دائما بالأقواس (   ) (   ).

ب. ملاحظات المعلم: حلل العامل الثابت بحيث يكون مجموع العوامل مساوية لمعامل Coefficient الحد الأوسط التعبير Middle Term.

التدريب: (عد ثانية إلى المجاميع الصغيرة وباستخدام تمارين تطبيقية مستنسخة أو تمارين تدريب محددة من كتب دراسية.

1. $x^2 + 7x + 10$	6. $x^2 - x - 20$	11. $x^2 - 81$
2. $x^2 - 5x + 6$	7. $x^2 + 3x - 40$	12. $49 - x^2$
3. $x^2 - 7x + 6$	8. $x^2 - 6x + 9$	13. $x^2 - 25 / 36$
4. $x^2 - 2x - 15$	9. $x^2 - 64$	
5. $x^2 + 5x - 14$	10. $x^2 + 4x - 12$	

تحديد الواجب البيتي: قم بتوزيع أوراق إضافية من التمارين التطبيقية لجميع الطلبة، وناقش حلول الواجب البيتي في مجاميع صغيرة بالصف خلال اليوم التالي. استمر بتحديد واجب – يومي إضافي حول نفس الموضوع متضمنا التوسيع لتضمين ثلاثية الحدود وبمعامل ابتدائي اكبر من 1.

التقييم: بعد بضعة أيام، قم بجمع وتقويم عمل الطالب، والتي ستحوي حلول الواجب البيتي، والامتحانات الموجزة، والاختبارات.

عينة "المعايير" درس قراءة الرياضيات

الموضوع: برهن القضية: إذا كان قطر الدائرة عموديا على الوتر فانه ينصف الوتر وقوسيه arcs.

المعرفة القبلية: ينبغي أن يمتلك الطلبة معرفة مناسبة لبرهنة النظرية.

الصيغة التدريسية: استكشاف فردي من خلال قراءة الرياضيات.

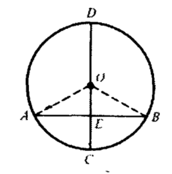
النشاط المحفز: اقرأ برهان القضية وبادر إلى توضيحها بصيغة فقرات. وتهيأ لإجابة الأسئلة التي تنشأ عن تلك القراءة، وتهيأ أيضا إلى اقتراح أسئلتك الخاصة.

الفرضية: في الدائرة O يكون القطر $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ في النقطة E

الاستنتاج $\overline{AE} \cong \overline{EB}$

$\overset{\frown}{CB} \cong \overset{\frown}{AC}$

$\overset{\frown}{DB} \cong \overset{\frown}{DB}$



للبرهنة على أن $\overline{AE} \cong \overline{EB}$ ، ينبغي أن نبرهن أولا بأن $\Delta AOE \cong \Delta OBE$ وبما أن أنصاف الأقطار $\overline{AO}$ و$\overline{OB}$ متطابقان، وأن $\overline{OE}$ هو الساق المشترك للمثلثين قائمي الزاوية OAE,OBE، فينتج عن ذلك بان المثلثين يتطابقان في ساق – وتر المثلث ذي الزاوي القائمة ≅ (نظرية ساق – وتر المثلث).

إن تطابق المثلثين ينتج عنه تطابق الزوايا المتناظرة AOE وBOE أيضا. وبما أن الزوايا AOE وBOE هي زوايا مركزية للدائرة، وبالتالي فانهما يقطعان القوسين المتطابقين AC وBC.

ونحن نعلم بان قطر الدائرة يقسمها إلى قوسين متطابقين، وبالتالي:

القوس CAD ≅ القوس CBD

ينتج عن عملية الطرح بأن القوس AD والقوس DB متطابقان.

بعد أن يكون الطالب قد قرأ ودرس برهان النظرية، بادر إلى استخراج أجوبتهم على الأسئلة الآتية:

1 عندما رسم هذا الشكل، ماذا رسم منه أولا؟
2 ماذا رسم لاحقا؟
3. ماذا رسم أيضا؟
4 كيف رسم قطر الدائرة؟
5 ماذا رسم بعد ذلك؟
6 لماذا تظهر الحاجة إلى أنصاف الأقطار $\overline{AO}$ و$\overline{OB}$ في الشكل؟
7 ما هي المعلومات التي نستطيع الحصول عليها من المثلثين؟
8. لماذا يتطابق القوسان AC وCB؟
9. ماذا ينتج عن حقيقة كون القوس CDA ≅ القوس CBD؟

الارتباطات: تستخدم الرموز والعبارات الرياضية في تمرين القراءة لتقييم الإدراك. يستمر الحديث حيث يمتحن الطلبة بدقة بأسئلة واستجابات إضافية، مثل: كيف تجد مركز العجلة المكسور واربط هذا الموضوع مع مفهوم المحل الهندسي في الهندسة.

ملخص ختامي: إن من المناسب طرح السؤال القديم – البديل Old Standly Question: كيف ستوضح ماذا تعلمت بالصف، من خلال محادثة هاتفية، لصديق لا يمتلك كتابا دراسيا؟

التقييم: اطلب من الطلبة صياغة آرائهم حول قراءة دروس في الرياضيات الصفية. وقم بإعداد نص تعلم مبرمج أو الحصول عليه ليرشد الطلبة إلى تعلم معارف جديدة أو البحث عن مهارات جديدة.

الواجب البيتي: تطبيقات الكتاب المدرسي البرية والهندسية منهجية في الجبر والهندسة.

عينة درس – فن حديث Sample Lesson - Modern Art

عرضنا، في بداية هذا الفصل، وحدة مقترحة حول الهندسة اللااقليدية تم من خلالها إعداد ثمانية دروس مختلفة. وسنحاول في هذه الصفحات التوسع اتجاه الدرس السابع من الوحدة: أعمال الفنان – الرياضي كليفوريد سنجر Clifford Singer. سنعرض في هذا المقام تفاصيل إضافية، واقتراحات محددة بخصوص هذا الدرس.

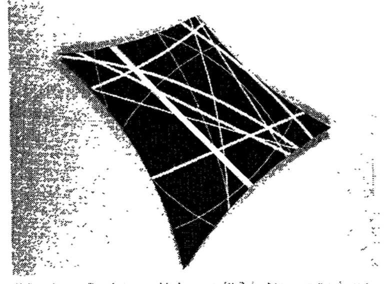
الموضوع: الهندسة اللااقليدية والفن الحديث.

مستوى المرحلة: الصف العاشر / الهندسة.

الوصف: سيستعرض الطلبة أعمالا فنية بمنظور لا أقليدي لفنان ورياضي معاصر. وسيعمد كل طالب إلى التقاط قطعة من الأعمال الفنية، فيكتب مقالاً عنها، ثم يرسل بالمقال إلى الفنان عبر البريد الإلكتروني.

موضوعات الأداء:

سيدرك الطلبة أن هناك أعمالا فنية تتضمن الهندسة اللاأقليدية بوصفها موضوعا رئيسياً سائدا في مادتها الفنية. وسيستخدمون مهارات التواصل في مساق الرياضيات الدراسي عن طريق كتابة مقال حول قطعة فنية، وسيستخدمون مهاراتهم التقنية عبر إرسالها إلى الفنان.



Clifford Singe , [illegible]
40 - 45 [illegible]

المعايير الموجهة:

الهندسة.

التواصل

الارتباطات:

العرض

الاستكشاف: سيدرك الطلبة أهمية الرياضيات بوصفها أداة للفن. وسيستخدمون الأفكار الهندسية لحل المسائل ، يكتسبون عمق بالبصيرة فيها، في اتجاهات وميادين أخرى مثل الفن والعمارة (NCTM, 2000).

وسيثري الطلبة مهاراتهم الكتابية باستخدام المصطلحات الرياضية والارتباطات.

المواد والمعدات: حواسيب مع تسهيلات الدخول إلى الانترنيت، وحساب بريد إلكتروني خاص بالصف أو المعلم، وبرمجيات معالج النصوص Word Processing.

عناوين المواقع الإلكترونية URLS:

http://math.rice.edu/ ~joel/NonEuclid/
http://math.rice.edu/ ~joel/noneuclid/singer/singer.html

الارتباطات: كمتابعة للدروس السابقة حول الهندسة اللاأقليدية، سيستعرض الطلبة الأعمال الفنية لكليفورد سنجر، الفنان / الرياضي المعاصر الذي يقيم في قرية كرينفج Greenwich بمدينة نيويورك. وسيقومون بعدها بكتابة مقال حول عمله ويقومون بإرساله إليه عن طريق البريد الإلكتروني.

أنشطة الانترنيت Internet Activities: سيقوم الطلبة باستعراض عمل الفنان سنجر بالمنظور اللاأقليدي مباشرة على شبكة الانترنيت Online.

الأنشطة خارج دائرة الانترنيت Non-Internet Activities: سيستخدم الطلبة برنامج معالجة النصوص لكتابة مقالاتهم، وإذا توفرت الفرصة لكل طالب بالحصول على حاسوب خارج الصف، ينبغي إعطاء المقالة بوصفها واجبا بيتيا. أما في حالة وجود طلبة لا

يستطيعون الدخول إلى الحاسوب، ينبغي انذاك اعتماد مبدأ كتابة المقال ة داخل غرفة الدرس.

يقوم الطلبة بتبادل مقالاتهم في الدرس.

الوقت الصفي اللازم Class Time Required: درس واحد أو درسين.

المشاكل التي قد تظهر والحلول Problem/Issues That May Be Encountered And Solutions

قد لا تعمل الحواسيب، أو قد يكون مجهز خدمة الانترنيت ISP متوقفا عن العمل، أو قد تكون المواقع متوقفة، أو قد يصعب الدخول إلى بعض المواقع على شبكة الانترنيت بسبب زحمة المرور المعلوماتي.

تعد الشفافيات – مسبقا – للعمل الفني تمهيدا لاستخدام جهاز عرض الشفافيات في حالة عدم إمكانية الدخول إلى مواقع الانترنيت. وتطبع نسخ من العمل الفني على طابعة ملونة.

التقييم الختامي Summative Assessment: سيقوم الطلبة بكتابة مقالات ومناقشة أفكارهم مع الصف.

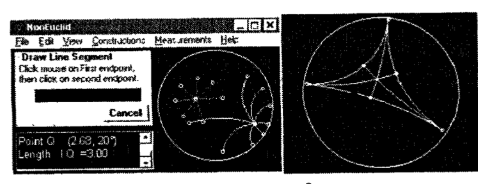
مهام خاصة Special Tasks: سيقوم الطلبة باستكشاف Explore مواقع المتاحف على شبكة الانترنيت وعرض أعمال الفنان سنجر، وتحديد أعمال فنية ذات طابع رياضي إضافية. وسيحاول الطلبة تعيين مواقع أعمال فنية أخرى على الشبكة العنكبوتية العالمية World-Wide Web والتي تعرض مادة الرياضيات كموضوع أساسي.

عينة درس–استخدام الهندسة اللا اقليدية
Sample Lesson-Using Non-Euclidean Geometry

الموضوع: الهندسة اللااقليدية: استخدام برنامج لا اقليدي –تفاعلي على الشبكة.

مستوى المرحلة: الصف العاشر / الهندسة.

الوصف: سيستخدم الطلبة، بصورة مباشرة، برنامج الهندسة اللااقليدية الديناميكي على الشبكة لاستكشاف مبرهنة هندسة القطع الزائدة Hyperbolic Geometry



الحافز: سيختبر الطلبة مثلثات بمجموع زوايا تقل عن 180°، وسيرون عالما بصور مغايرة، بيد ان الكلمات والمعاني لم تتغير بعد.

المعايير الموجهة:

الإعداد والعمليات. الهندسة.

القياس. حل المسائل.

التعليل والبرهان. التواصل.

الارتباطات: فهم نظام البديهيات من خلال فحص ومقارنة الهندسات الاقليدية واللااقليدية.

أهداف الأداء: سيستخدم الطلبة مهاراتهم في كل من مادتي الجبر والهندسة لإنشاء مثلثات–لا اقليدية، وإيجاد مجموع زواياها، وأطوال أضلاعها، ومساحاتها. وسيتعلمون أهمية الكلمات والتعاريف.

الموارد والمعدات Materials And Equipment: حاسوب مع إمكانية الدخول على شبكة الانترنيت.

عناوين المواقع الإلكترونية (URLS):

http://math.rice.edu/~joe/NonEuclid/
http://math.rice.edu/~joe/NonEuclid/why.html
http://math.rice.edu/~joe/NonEuclid/traingle.html

الارتباطات: كمتابعة الدروس الماضية في وحدة الهندسة اللااقليدية سيعمل الطلبة في مجاميع صغيرة وبالاستخدام المباشر لبرنامج لا اقليدي – تفاعلي ديناميكي وذلك لإنشاء مثلثات زائدية. وسيقومون باحتساب مجموع قياسات الزوايا، وأطوال الأضلاع، ومساحات هذه المثلثات.

ثم سيقوم الطلبة بمناقشة عملهم داخل حدود المجموعة، ومحاولة التنبؤ بالمسار التقريبي للخطوط الزائدية المستقيمة، والتي تمر من خلال نقطتين معروفتين، بالإضافة إلى فحص علاقات أخرى في هندسة القطع الزائدي.

أنشطة خارج دائرة الانترنيت Non- Internet Activities: سيناقش الطلبة نتائج استكشافاتهم مع الصف، وسيقومون بإعداد لوحات جدارية لعملهم على هندسة القطع الزائدي.

الوقت اللازم للصف Class Time Required: درس أو درسين.

المشاكل التي قد تظهر والحلول Problems/Issues That May Be Encountered And Solutions: قد لا تعمل الحواسيب، أو قد يكون مجهز خدمة الانترنيت ISP متوقفا عن العمل، أو قد تكون المواقع متوقفة، أو قد يصعب الدخول إلى بعض المواقع على شبكة الانترنيت بسبب زحمة المرور المعلوماتي.

تعد الشفافيات – مسبقا – من بعض المواقع تمهيدا لاستخدام جهاز عرض الشفافيات في حالة عدم إمكانية الدخول إلى مواقع الانترنيت، وتطبع نسخ من العمل على طابعة ملونة.

التقييم الختامي Summative Assessment: سيطلب من التلاميذ مناقشة نتائج استكشافاتهم المباشرة على شبكة الانترنيت حول المثلثات الزائدية.

مهام خاصة **Special Tasks:** سيستكشف الطلبة مواقع الانترنيت التي يمكن من خلالها معرفة المزيد حول موضوعات الهندسة اللا اقليدية، والهندسة الكروية.

سيبحث الطلبة في التطبيقات المعاصرة للهندسة اللا اقليدية.

عينة درس – استخدام الصحائف المتدة
Sample Lesson- Using Spreadsheets

الموضوع: القيمة العظمى / القيمة الصغرى باستخدام الصحائف المتدة.

مستوى المرحلة: جبر الصف 9-12 بالاعتماد على درجة تعقيد الدرس.

الوصف: سيقوم الطلبة باحتساب الحجم الأقصى Maximum Volume لصندوق عن طريق حل المسألة على صحيفة. باستخدام الجبر، ثم سيقومون بوصف طول المقطع بالرمزx، فتكون الأبعاد الناتجة (x-2x) (14-2x) (8.5-2x). وسيتم احتساب الحجم عن طريق استثمار الخصائص الأولية للصحيفة.

المعايير الموجهة:

الأعمار والعمليات.

الجبر

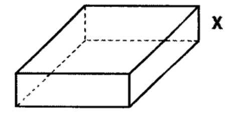
الهندسة

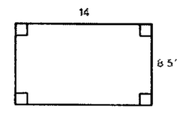
القياس

حل المسائل

التقديم

أهداف الأداء: تحل المسائل المتشابهة في موضوعات القيمة / القيمة العظمى – الصغرى سابقا، في دروس التفاضل والتكامل، بيد أن ظهور الصحائف الإلكترونية نقل حلول هذا النوع من المسائل إلى دائرة الجبر الأولي Elementary Algebra.





الاستكشاف: سيتم توفر صحيفة بقياس محدد للطلبة (8.5 في 14 إنش). اطرح المسألة الآتية، ينبغي عليك أن تقطع نفس مساحة المربع من الزوايا الأربع لصحيفتك قبل طيها لعمل صندوق. كم يجب أن يكون طول كل ضلع من أضلاع المربع بحيث يكون حجم صندوقك بقيمته العظمى؟.

المواد والمعدات Materials And Equipment: صحيفة بقياس ثابت ("14 × "8.5) لكل طالب، ومقص، وحاسوب يحتوي على برنامج صحائف ممتدة.

الارتباطات Connections: سيتم تعميق موضوع الحجوم فضلا عن المفاهيم الهندسية بأن قيم الأبعاد لا تكون بقيم سالبة، مع مناقشة دقة وأهمية الأشكال.

التقييم الختامي Summative Assessment: ما هو أكبر حجم ممكن لكل حافة من حافات مربعك؟ ولماذا؟ وهل ستغير إجابتك إذا كانت الدقة المطلوبة بأجزاء من المئات؟ أو الألوف؟.

عينة درس – نظرية فيثاغورث
Sample Lesson – Pythagorean Theorem

الموضوع Topic: برهنة نظرية فيثاغورث وتطبيقها.

مستوى الصف Grade Level: الصف التاسع ، العاشر أو الحادي عشر وبما يتناسب معها.

الوصف: سيستخدم الطلبة، أولا، كتبهم الدراسية لإعداد أحد البراهين التقليدية لنظرية فيثاغورث، ثم سيقومون بإيجاد براهين أخرى لهذه المبرهنة الشهيرة من شبكة الانترنيت.

موضوعات الأداء Performance objectives:

سيتعلم الطلبة كيفية البرهنة على نظرية فيثاغورث بأكثر من طريقة.

المعايير الموجهة Standards addressed:

الجبر.

الهندسة

القياس.

حل المسائل.

التفكير والبرهنة.

التواصل.

الارتباطات.

الاستكشاف Exploration: سيوظف الطلبة مهاراتهم في كل من الجبر والهندسة لبرهنة نظرية فيثاغورث وتطبيقها بواسطة كتبهم

الدراسية. وسيعملون في مجاميع صغيرة على توسيع برهان لنظرية فيثاغورث بوصفها متابعة للمبرهنات حول الارتفاع المرسوم إلى وتر المثلث قائم الزاوية. وسيستخدمون النتائج التي توصلوا إليها لحل بضعة مسائل جبريا. بعدها، سيتوجهون مباشرة إلى المواقع المدرجة أدناه للاطلاع على براهين أخرى مقترحة، تتضمن ذلك الذي يعود إلى الرئيس جيمس أ. جارفيلد.

ويؤمل أن يعمدوا إلى التحقق من الخطوات في البراهين التي استعرضوها عبر شبكة الانترنيت.

المواد والمعدات Materials And Equipment: مواد صفية تقليدية: أوراق وأقلام، وحواسيب ترتبط بشبكة الانترنيت.

عناوين المواقع الإلكترونية URLS:

http://jwilson.coe.uga.edu/EMT669/Student.Folders/Huberty.Greg/Pythagorean.html
http://eame.ethics.ubc.ca/users/rikblok/pythag/indexhtml
http://jwilson.coe.uga.edu/EMT669/Student.Folders/Carlisle.Jody/pt/pt
http://www.mcn.net/~jomloy/pythag.html

أنشطة الإنترنت Internet Activities: سيطلع الطلبة على البراهين الأخرى لنظرية فيثاغورث الموجودة في الإنترنت. سيبررون كل خطوات كل برهان.

أنشطة خارج الانترنيت Non-Internet Activities: سيحاول الطلبة استخدام العمل الحالي من المساق الدراسي لاكتشاف براهينهم المرئية لنظرية فيثاغورث، وسيعرضون مهاراتهم: الجبرية، والهندسية، وفي مضمار حل المسائل عند تطبيقهم لهذه المبرهنة.

الوقت الصفي اللازم Classtime Required: درسان.

المشاكل التي قد تظهر والحلول Problems/Issues That May Be Encountered And Solutions: قد لا تعمل الحواسيب، أو قد يكون مجهز خدمة الانترنيت ISP متوقفا عن العمل، أو قد تكون المواقع المتوقفة، أو قد يصعب الدخول إلى بعض المواقع على شبكة الانترنيت بسبب زحمة المرور المعلوماتي.

تعد الشفافيات – مسبقا– للمواقع الإلكترونية تمهيدا لاستخدام جهاز عرض الشفافيات.

في حالة عدم توفر إمكانية الدخول إلى مواقع الانترنيت، وتطبع نسخ من المواقع على أوراق ملونة.

التقييم الختامي Summative Assessment: سيكلف الطلبة ببيان وبرهنة عكس نظرية فيثاغورث، وسيعملون على حل المسائل الجبرية والهندسية باستخدام عكس النظرية. وسيناقش الطلبة الامتدادات الممكنة لنظرية فيثاغورث بميدان حلول المثلثات المائلة Oblique Triangles (هذا هو قانون الجيوب).

مهام خاصة Special Tasks: سيقوم الطلبة بتهيئة الخطوط العامة لبراهين أخرى لنظرية فيثاغورث. وسيظهر الطلبة تنافسا جبريا عند تطبيق المبرهنة بحلول المسائل اللفظية (Word Problems).

عينة "المعايير" درس تطبيقي
Sample Standards Practice Lesson

يعد التطبيق بأسلوب الإعادة من التقانات المهمة في تعليم الرياضيات، لكونها تعمق المهارات التي تم تعلمها في مراحل سابقة، بينما يتم تطوير التقانات الجديدة من خلال الفوارق الدقيقة التي تظهر نتيجة إنجاز مجموعة كبيرة من الأمثلة المختارة.الأمر الذي يؤدي إلى فهم افضل للأسس المبرهنة التي تكمن وراءها. وقد تستمر كل من تطبيقات دروس المجاميع الصغيرة والكبيرة جميع الفترة المخصصة أو قد تكون ملحقة بدرس توجيه المهام Task –Oriented Lesson خلال مدة محددة من الفترة المخصصة.

ولتوضيح هذا الأمر، عمدنا إلى عرض درس في مادة الجبر بموضوع التحليل للمقدار ثلاثي الحدود Trinomial إلى حاصل ضرب مقداري ثنائي الحدود Binomials والتي تتعاقب بين المجاميع الصغيرة والكبيرة. إن الأنماط المستحدثة والمطبقة، في كل مجموعة صغيرة، سيعاد النظر فيها مرة ثانية خلال المجاميع الكبيرة، ولكن عبر معالجة مفاهيمية إضافية يمارسها المعلم مع طلبة آخرين.

يقوم المعلم بتسهيل حركة الطلبة، وتنسيق الملخصات، تحديد الواجب البيتي ويوجه دفة تقييم الدرس.

عينة "المعايير" دارسة قراءة الرياضيات
Sample Standards Mathematics Reading Lesson

إن المبادرة الفردية تأخذ جملة من الأشكال والهيئات، ويحاول هذا الدرس توظيف مبدأ "الرياضيات من خلال القراءة".

كما أن كل من يؤدي عملا لا يستمتع بأداء نفس الدور يوميا، فكذلك الحال بالنسبة للطلبة الذي لا يستمتعون بالجلوس وتلقي نفسها الدرس كل يوم. لأن العمل الروتيني يميت المبادرة، ويبلّد ملكة الخيال.

وقد يحمل تأثيرا على المعلم الذي، على سبيل المثال، يستخدم صيغة التدريس بمجاميع صغيرة كل يوم. إن التغيير والتنوع هو الذي يضفي على عملية التعلم فضلا عن الجوانب التعليمية لتلك العملية، مذاقا مقبولا.

وعليه فان المناقشات الشاملة لطلبة الصف، والتدريس الرفاقي، والاستكشاف الفردي، ومحاضرات الضيوف، وعروض الفيديو، ينبغي أن تصبح جزءا لا يتجزأ من ذخيرة معلم الرياضيات.

وينبغي أن يحتوي كل درس على بعض خصائص المهام الموجهة – على الأقل – مثل أنشطة التحدي، واستخدام الآلات الحاسبة، والحواسيب، أو التشكيلات عندما تكون مناسبة، ومثيرة والأسئلة المفتوحة باستمرار كلما أردت أن تخطط وحدة عمل، أو درس يومي، أو استراتيجية للتقييم، حاول أن تعدها باهتمام بالغ مع توظيف الخيال الإبداعي في صياغة مفرداتها.

ستجد أن هناك وفرة من الخيارات أمامك لكي تختار منها ما تشاء، لذا حاول أن تختار بحكمة، وحاول تجربة استخدام أكثر من وطريقة، بقدر المستطاع، خلال الفصل الدراسي.

تمارين: عينة دروس Exercises: Sample Lessons

إن الخطط الخمس القادمة تصف دروسا واقعية من سجلات مجموعة معلمين. وإذا قمت بالدراسة، والتحليل، والمناقشة، والتعليق حول هذه الدروس، ستتوفر لديك فرصة مناسبة لتعلم ما هو صحيح لدى الجيدين، وما هو خطأ لدى الضعفاء منهم.

إن المعلمين المتدربين حديثا سيتولد لديهم باعث ملهم بواسطة فلسفة "المعايير"، بيد أن كون معظم هؤلاء قد تلقنوا أثناء تعلمهم في مدارسهم الثانوية بالأيام الماضية طرائق مقبولة، ونظر لكونها لا زالت عالقة في أذهانهم، فقد عرضنا خمس خطط من سنين سابقة للمعلمين المستمرين بالتدريب على مساقات للارتقاء إلى مرتبة "المعايير". نحن نعتقد أن هذه هي الطريقة المثلى للمعلمين الجدد على بداية طريقهم المهني بسجل جديد.

عندما تقرأ عينة الدروس الآتية، تفكر بالمهام والأسئلة:

1. كيف تستطيع إجراء تحسينات على أهداف الأداء المكتوبة؟
2. كيف تضمن توظيف رياضات "المعايير" في الدرس (انظر الموقع الإلكتروني http://www.nctm.org كمورد مساعد).
3. استخدم ملصقات وأنشطة محددة لبيان طبيعة الاختلاف بين تطوير المهام الموجهة عن تلك التي تم عرضها.
4. بين تلك المواضع في الدرس والتي تطور أنشطة التواصل.
5. كيف تستطيع تعميق الفهم من خلال الارتباطات المقيمة مع الرياضيات الأخرى، ومع موضوعات بعلوم أخرى؟
6. كيف يمكن للآلات الحاسبة والحواسيب أن تلعب دورا فاعلا في هذا الدرس؟.
7. إلى أي حد يمكن لمجموعة درس صغيرة ان تؤلف استراتيجية مفيدة لهذا الدرس؟ نفس السؤال يطرح بصدد المجموعة الكبيرة.
8. أين تظهر أهمية العمل اليدوي، وأين يصبح ضروريا؟
9. إلى أي حد يمكن تكون الأسئلة محرضة؟ مفتوحة؟ Openended؟
10. ما هي إستراتيجيات التقييم التي عمدت لتوظيفها في غضون المساق وفي خاتمته؟

تذكر الدروس القديمة التي قد تم تعلمها بواسطة معلمين مهرة. وبالرغم من حصول تغيير كبير في الأدوار التي يتبوؤها المعلم بالوقت الراهن، فإن خططهم ما زالت مثقلة بالخبرة والثقافة من حيث: الأسلوب، والتكنيك، والإستراتيجية، والمساءلة، والمعرفة، وأمور أخرى يصعب حصرها.

لاحظ بأن قسم التعليق قد تم تضمينه لمساعدتك في استعراض مبرر المعلم بخصوص مفردات الدرس. ولست بحاجة إلى إدراج تعليقاتك المرئية حول الدرس. وبدلاً عنه يمكن أن يدخر هذا القسم كتغذية راجعة من أقرانك.

إن مخطط الدرس 3 مخصص للمدارس المتوسطة أو الطلبة حديثي العهد بالمدارس الثانوية.

خطة درس Lesson Plan 1

الهدف AIM: لتمييز المعادلات التربيعية ولتعلم كيفية حلها بالأسلوب التحليل إلى عوامل Factoring.

أنجز – الآن Do-Now: إذا كان حاصل ضرب عدد ما بعدد آخر يزيد عليه بـ 3 يساوي صفرا. جد هذا العدد.

العدد = x

العدد الذي يزيد عليه بـ 3 = $x+3$

$x(x+3) = 0$

دعنا نتوقف قليلا من الوقت لنرى هل نستطيع اكتشاف أمر ما يساعدنا على حل هذه المعادلة. كل منا يفكر بالعددين اللذين يساوي حاصل ضربهما صفرا (اكتب إجابات على اللوحة).

ماذا لاحظت حول كل زوج من الأعداد؟

كيف تستطيع التعبير بكلمات عما لاحظته الآن؟ (اكتب على اللوحة إذا $ab = 0$ إذن $a=0$ أو $b=0$).

الآن. دعنا توظيف هذه الحقيقة لحل معادلتنا:

X	(x+3)
$x = 0$	$x+3 = 0$ $x = -3$

كيف ستستخدم الحقيقة ذاتها لحل: $x(x+4) = 0$

كيف ستحل المعادلة: $x^2+4x = 0$ (استنبط "التحليل إلى العوامل")

ماذا حول هذه المعادلة $x^2+5x+6 = 0$؟

كيف ستحل المعادلة التالية: $x^2-4 = 0$؟

إن معاودة النظر إلى المعادلة التي قمنا بحلها الآن، كيف يمكنك إخبارنا بالخطوات التي استخدمتها في الحل؟

(استنبط ما يلي)

(اكتب على السبورة)

1. قم بالتحليل إلى العوامل.
2. اجعل قيمة كل عامل تساوي صفرا.
3. قم بحل كل من المعادلات الخطية.

والآن استخدم هذه الخطوات لحل ما يأتي:

أ. $x^2 = 0$ ب. $x^2+6x+8 = 0$

ج. $x^2-16 = 0$

(راجع الحلول).

بماذا تختلف هذه المعادلات عن تلك التي تعلمت حلها قبل اليوم؟

(الدرجة 2، جوابان، ...الخ).

هذه المعادلات يطلق عليها المعادلات التربيعية Quadratic Equations (أو معادلات من الدرجة الثانية)

أي مما يأتي تعد معادلات تربيعية؟

تعليقات Comments

هذه هي الأسئلة التي يتوقع المعلم استنباطها عندما يستعرض أنجز – الآن.

هذه هي أهم الأسئلة والتعليقات كتبت بنفس الترتيب الذي سئلت به بواسطة المعلم.

هذا السؤال لم يطرح لأن المعلم قد رأى بأن الدرس اصبح طويلا جدا، فأراد أن يقتطع جزءا من الدرس المعد.

إن تطوير الخطوات المستخدمة في حل المعادلات التربيعية يعد ملخصا متوسطا.

المثال (ج) قد اقتطع من العرض الصفي لتوفير وقت إضافي.

سؤال محوري يقارن المعرفة الجديدة للطلبة مع المعرفة السابقة.

يكتب المعلم على السبورة الهدف من الدرس: كيفية حل معادلات الدرجة الثانية

أ. $x^2+7x+12 = 0$ ب. $x^2-2x = 0$
ج. $x^2 = 2x$ د. $x^2 + 7x = -12$
هـ. $X+3 = 0$
قارن بين (أ،د)، (ب،ج).

من منكم يلخص لنا كيف نسلك بحل المعادلات التربيعية؟
(لاحظ: الخطوة الإضافية لجمع لوضع العوامل على جهة واحدة واحد وبتدرج تنازلي للقوى Powers).

تحديد الواجب البيتي Homework assignment:
ادرس الصفحات 157. 158.
حل الأمثلة 3، 5. 7. 13، 17، 19

يطلب من الطلبة قراءة شرح النص الخاص بالموضوع وحل نماذج تطبيقية. ملاحظة 1: تحديد الواجب البيتي لم يكن لولبيا. ملاحظة 2: بالرغم من كتابة الواجب البيتي أخيرا في المخطط، فقد كتبها المعلم على السبورة. وفي نهاية الفترة المخصصة، قام المعلم بتغيير الواجب البيتي عبر إزالة الأمثلة التي لم تتم مناقشتها.

راجع الواجب البيتي هذا اليوم. الصفحات 140/ 2 ,3 ,4 ,6
إذا توفر وقت IF TIME:
قم بحل المعادلات التربيعية الآتية:
أ. $x^2+8x+15 = 0$
ب. $x^2-64 = 0$
ج. $a^2 = 7a$
د. $b^2+6b = -8$

لا يتم إنجاز ذلك داخل الصف بسبب عدم توفر وقت كاف لذلك.
هذه أيضا لا تنجز داخل الصف.

العمل على اللوحة Board Work

لوح I

$x(x+3) = 0$
$x(x+4) = 0$
$x^2+4x = 0$
$x^2+5x+6 = 0$
$x^2-4 = 0$

لوح II

1. إذا كان ab=0، a=0 أو b=0
2. الخطوات لحل المعادلات التربيعية:
أ. قم بتجميع العوامل في جهة واحدة، واجعل قيمتها مساوية للصفر.
ب. قم بتحليل العوامل.
ج. ساوي كل عامل بالصفر.
د. قم بحل المعادلات الخطية.
3. حقائق حول المعادلات:
أ. الدرجة ثانية.
ب. جوابان.
ملاحظة: الواجب على اللوحة الجانبية

لوح III

حل المعادلات:
$x^2+5x = 0$
$x^2+6x+8 = 0$
$x^2-16 = 0$
أي من المعادلات التالية تربيعية؟
$x^2+7x+12 = 0$
$x^2-2x = 0$
$x^2 = 2x$
$x^2+7x = -12$
$x+3 = 0$

يحتوي الصف على ثلاثة لوحات أمامية، ويخطط المعلم المواقع التي سيكتب عليها كل جزء من أجزاء العمل.

Lesson Plan 2 خطة درس

الموضوع Topic: درس تمهيدي حول خصائص متوازي الأضلاع Parallelogram.

الهدف AIM:

(أ). لمعرفة خواص متوازي الأضلاع وبرهنتها.

(ب). إجراء بعض العمليات الجبرية التطبيقية – المبسطة على هذه الخصائص.

ما تم تعلمه سابقا Previously learned:

أ. خصائص الزوايا الناتجة عن قطع مستقيمين متوازيين بقاطع Transversal.

ب. طرائق البرهنة على تطابق المثلثات.

ج. تعاريف الشكل الرباعي والخط القطري Diagonal.

أنجز الآن Do Now:

المعطى Given: الشكل الرباعي ABCD

$\overleftrightarrow{AB} \backslash\backslash \overleftrightarrow{CD}; \overleftrightarrow{AD} \backslash\backslash \overleftrightarrow{BC}$

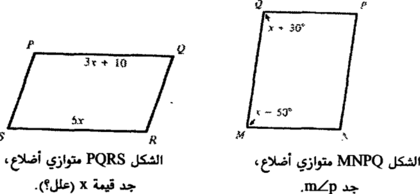
السؤال Question: ما هي العلاقات القائمة بين $\angle A$ و $\angle B$ ؟ ولماذا؟

التطوير والطرائق Development and methods:

(لا يسمح للطلبة بالكتابة في دفاتر الملاحظات حتى يسمح لهم المعلم بذلك، وسيتم إنجاز جميع براهين النظريات التي أثيرت خلال الدرس شفويا. قم بتدوين جميع الاستجابات بالشكل الجدولي كالهيئة الموضحة في نهاية المخطط).

1. عرف متوازي الأضلاع (ضع عنوانا للجدول" في متوازي الأضلاع" وحاول إثارة الهدف من الدرس).
2. ناقش فقرة "أنجز – الآن" (اثر موضوع "الزوايا المتعاقبة Consecutive Angle تكون متكاملة Supplementary"، وبرهن ذلك).
3. سؤال: ماذا يكون صحيحا حول $\angle A$ و $\angle C$ ؟ ولماذا؟ اثر موضوع وبرهان "الزوايا المتقابلة تكون متطابقة").
4. ارسم المستقيم $\overline{BD}$.
5. سؤال: ما هي الأشياء الجديدة التي تراها في المخطط نتيجة لرسم المستقيم $\overline{BD}$؟ (اثر موضوع وبرهن: "تم إنشاء مثلثين متطابقين، وأن الأضلاع المتقابلة متطابقة").
6. قم بإلغاء المستقيم $\overline{BC}$ وارسم المستقيم $\overline{AC}$ بدلا منه.
7. سؤال: هل نتج عن رسمنا للمستقيم $\overline{AC}$ أمر جديد نستطيع البرهنة عليه؟
8. مختصر متوسط Medial Summary: على الطلبة قراءة القائمة التي أعدت سابقا وتوضيحها، ونسخها في دفاتر ملاحظاتهم.

تدريب عقلي DRILL:



الشكل MNPQ متوازي أضلاع، جد $m\angle p$.

الشكل PQRS متوازي أضلاع، جد قيمة x (علل؟).

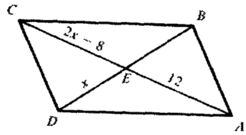
الشكل ABCD متوازي أضلاع ، جد قيمة x (علل؟).

التطوير Development:

9. ارسم قطري متوازي الأضلاع.
10. سؤال: عبر عن الاستنتاج الذي ستتوصل إليه حول القطرين اللذين يظهران على المخطط وبرهنه (الجواب: "القطران ينصف أحدهما الآخر").

تدريب عقلي DRILL:

ABCD هو متوازي أضلاع.
جد قيمة DE



الملخص Summary: قم بإلغاء الجدول من على اللوحة واطلب منهم "أن يدرجوا في دفاتر الملاحظات عباراتهم التعريفية لخصائص متوازي الأضلاع التي قمنا بمناقشتها سابقا".

واجب بيتي Homework:

1. ستة أمثلة الكتاب المدرسي، مشابهة للتدريب العقلي المنجز في الصف.
2. بضعة أمثلة أخرى من الموضوع السابق.

إذا توفر وقت IF TIME: إكثر من طرح أمثلة حول الموضوع بقدر ما يتيحه الوقت المخصص للدرس (ينبغي إدراج أمثلة محددة في هذا الموضع).

جدول (على جانب اللوحة الأمامية)

في متوازي الأضلاع IN PARALLELOGRAM
(تعريف): 1. الأضلاع المتقابلة متوازية.
(نظرية): 2. الزوايا المتتابعة متكاملة.
(نظرية): 3. الزوايا المتقابلة متطابقة.
(نظرية): 4. القطران يقسمانه إلى مثلثين متطابقين.
(نظرية): 5. الأضلاع المتقابلة متطابقة.
(نظرية): 6. القطران ينصف أحدهما الآخر.

خطة درس 3 Lesson Plan

الموضوع Topic: جمع كسور حسابية–بسيطة

المعرفة القبلية Prior knowledge:

1. يكون موضوع المبادئ الأساسية للكسور مألوفا لدى الطلبة.
2 قد درس الطلبة موضوع ضرب الكسور البسيطة وتبسيطها.

تعليقات Comments

يشير هذا إلى موضوعات تم تعلمها سابقا وتتعلق بموضوع هذا الدرس. وهي من التفاصيل التي يتم استبقاؤها في ذهن المعلم بدلا من إدراجها في المخطط.

أنجز الآن Do now : استخدم هذا المخطط



كم جزءا قد تم تظليله؟ (4)

غير مظلل؟ (8)

ما هو المجموع الكلي للأجزاء؟ (12)

الأسئلة المتوقعة قد أحيطت بقوسين.

اكتب الكسور التالية

المظلل / الكل = $\left(\frac{4}{12}\right)$

غير المظلل / الكل = $\left(\frac{8}{12}\right)$

اختصر كل كسر إلى ابسط صيغة ممكنة :

$$\frac{4}{12}=\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{8}{12}=\left(\frac{2}{3}\right)$$

استعرض إجراء تبسيط الكسور:

$$\frac{4}{12}=\frac{\not{2}\times\not{2}}{\not{2}\times\not{2}\times 3}=\frac{1}{3}$$

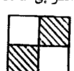
$$\frac{8}{12}=\frac{\not{2}\times\not{2}\times 2}{\not{2}\times\not{2}\times 3}=\frac{2}{3}$$

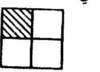
تحد Challenge: ماذا ينبغي أن يساوي = $\frac{8}{12}+\frac{4}{12}$ ولماذا؟

استخدم مخططا لتوضيح الإجابة .

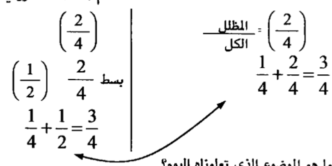
ماذا ينبغي أن يساوي؟ = $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ ولماذا؟

انظر إلى المخطط الآتي:





قم بتسمية الكسور في كل مخطط

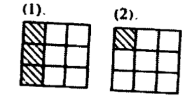


ما هو الموضوع الذي تعلمناه اليوم؟

اكتب write : جمع الكسور على اللوحة

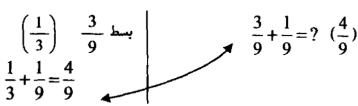
إن الغاية من الدرس قد أثيرت هنا، وقد تم كتابتها على اللوحة أثناء الدرس.

تحدي CHALLENGE:



قم بتسمية الكسور في كل مخطط

$\left(\frac{1}{9}\right)$ و $\left(\frac{3}{9}\right)$



انظر إلى المثالين:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{3}{9}+\frac{1}{4}=\frac{4}{9}$$

ما الذي سيكون صادقا حول مقامات الكسور عندما نضيف؟ (نفسه)

تدريب Practice:

$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}$ هل أن مقامات الكسور متشابهة أم مختلفة؟

قم بتسمية المقام المشترك: (10)

$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ لماذا؟ $\left(\frac{3\times2}{5\times2}=\frac{6}{10}\right)$

$$\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

يشرح المدرس (مستعينا بالأمثلة) إضافة الكسور بصورة عمودية بالإضافة إلى ترتيبها أفقيا.

تدريب إضافي More Practice:

$$\frac{4}{7}+\frac{1}{21}=?$$

أسئلة تحدي Challenge Questions:

$\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$ ما هو المقام المشترك؟

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}$$

هذه الأمثلة هي بالواقع أسئلة "إذا توفر وقت"، وبالحقيقة فإن الأول قد أنجز فقط.

مختصر ختامي Final Summary: ماذا تعلمنا اليوم؟

واجب بيتي Homework: الصفحة 157، الأمثلة: 2، 3، 5، 7، 9، 11، 12، 13، 15، 18.

خطط الدروس 4، 5 تمتاز بكونها أقل تفصيلا من الخطة السابقة. وقد كتبها معلمون يمتلكون خبرة قبل "المعايير"، وثقة بقدراتهم على التفكير وهم واقفون في أمام الصف.

خطة درس 4 Lesson Plan

واجب بيتي Homework:

الصفحة 2/212، الصفحة 8/208، 11.

أنجز الآن DO-NOW:

المعين ABCD

AC=10

BD= 8

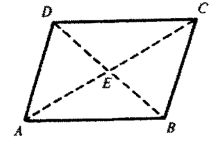
(1). ما نوع الزاوية AEB؟ ولماذا؟

(2). جد مساحة المثلث AEB.

(3). جد المساحة الكلية للمعين.

بعدئذ، ليكن x =AC، BD = y

اظهر بأن المساحة = ½ y.x.



تدريب عقلي DRILL: الصفحات 212/ 3، 5، 6.

مراجعة الواجب البيتي.

تعليقات COMMENTS

هدف الدرس كان لاشتقاق صيغة لمساحة المعين بدلالة قطرية.

سينتج عن فقرة "أنجز الآن" عمل جديد، وهذا هو التطور.

يقوم المدرس بعرض المثال الأول على اللوحة. أما المثالان الباقيان فيقوم الطلبة بإنجازها وهم جلوس على مقاعدهم ويقوم المدرس بمراجعتهما. تم تحديد الأمثلة لكي تكتب على اللوحة عندما يعمل الطلبة على فقرة "أنجز الآن".

"إذا توفر وقت" غير موجودة.

خطة درس 5 Lesson Plan

اختبار عودة

اذكر النظرية حول خط مستقيم موازي لضلع من أضلاع المثلث.

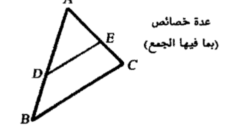
نظرية Theorem:

إذا كان خط مستقيم موازي لضلع من أضلاع المثلث يقطع الضلعيين الأخريين، فإنه يقطعهما بنسبة هذين الضلعين.

نظرية Theorem: إذا قطع المستقيم ضلعي مثلث، وكانت قطعتا هذين المستقيمين تتناسب بنسبة طول هذين الضلعين، فان المستقيم يوازي الضلع الثالث.

عدة خصائص

(بما فيها الجمع)



تعليقات Comments

تم استعراض الاختبار مسبقا ويتم تذكير الطلبة بالمواد التي درست سابقا.

هذه هي المبرهنة التي استرجعت.

نوقش عكس النظرية أعلاه وتم توضيحه بيد انه لا يوجد أي مؤشر حول أسلوب إنجازها

"الإضافة" تشير إلى:

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ وهذا يدل ضمنيا على:

$$\frac{AD+DB}{DB}=\frac{AE+EC}{EC}$$

يقوم المدرس بتحديد تمرينين تطبيقيين.

نظرية **Theorem**: المنصف لزاوية مثلث يقسم الضلعين المقابلين إلى قطعتي مستقيم تتناسب أطوالهما بنسبة طول الضلعين المتجاورين.

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{CA}$$

A

B D C

الصفحة: 193/ الأمثلة 1، 3، 4.

إذا توفر وقت IF TIME: الصفحة: 192/ الأمثلة 17، 18.

واجب بيتي **Homework**:

الصفحة: 192، الأمثلة: 11، 12. 15، 16.

الصفحة: 193، الأمثلة: 5، 6.

تطبيقان جبريان:

كان المدرس على معرفة أكيدة ببرهان المبرهنة ولم يجد أن كتابتها مفيدة أو ذات جدوى في المخطط.

ثلاثة أمثلة تدريب عقلي، جبرية وهندسية.

Suggested References مراجع مقترحة

Artzt, Alice. and Claire M. Newman. How to Use Cooperative Learning in the Mathematics Class. Reston, VA: National Coucil of Teachers of Mathematics, 1997.

Artzt, Alice F.. and Claire M. Newman. "Implementing the Stands Cooperative Learning" Mathematics Teacher 83,no.6 (Sept. 1990): 448-452.

Brown, Cheryil. "Whole Concept Mathematics: A Whole Language Application." Educational Horizons 69, no.3 (Spring,1991):159-163.

Burrill, Gail, Jhon C. Burrill, Pamela Coffield, Gretchen Davis, Jan de Lange, Diance Resnick and Murray Siegel. Curriculum and Evaluation Standards for school Mathematics: Data Analysis and Statistics Across the Curriculum, Addenda Series, Grades 9-12. Reston, VA: NCTM, 1992.

Cater, John, and Dorothy Carter. The Write Equation: Writing in the mathematics Classroom. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1994.

Clark, H. Clifford, and Marvin N. Nelson. "Improving Mathematics Evaluation through Cooperative Learning Strategies." Middle School Journal 24, no. 3 (Jan. 1993): 15-18.

Committee on Mathematical Sciences in the Year 2000. EVERYBODY COUNTS: A Report to the Nation on the Future of Mathematical Education. NRC, Washington, DC: National Academic Press, 1989.

Cooney, Thomas J., ed. Teaching and Learning Mathematics in the 1990's: 1990 Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1990.

Cox, Arthur F. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics: Geometry from Multiple Perspectives, Addenda Series, Grades 9-12. Reston, VA: NCTM, 1992.

Erickson, Tim, ed. Get It Together: Math Problems for Groups Grades 4 to 12. Berkeley, CA. EQUALS. 1989.

Frazer, Don. Sports Math. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Froelich, Gray W. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics Addenda Series, Grades 9-12. Reston, VA: NCTM, 1991.

Grouws, Douglas A., ed. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992.

Grouws, Douglas, Thomas Cooney, and Doglas Jones, (eds.). Perspective on Research on Effective Mathematics Teaching, Vol. 1. Reston, VA: NCTM, 1988.

Halpern, Diane F. Enhancing Thinking Akills in Science and Mathematics. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1992.

Higbee, Jeanne L., and Particia L. Dwinell, eds. "Sharing Teaching Ideas." Mathematics Teacher 83, no.9 (Dec. 1990): 721-724.

Kastner, Bernice, ed. Space Mathematics. Washington, DC: U. S. Government Printing Office.

Keeler, Carolyn M., and others. "Cooperative Learning in Statistics." Teaching Statistics 16, no.3 (Fall 1994): 81-84.

Kulm, Gerald. Mathematics Assessment: What Works in the Classroom. Washington, DC: MAA, 1994.

Leikin, Roza, and Orit Zaslavsky. "Facilitating Student Interactions in Mathematics in a Cooperative Learning Setting." Journal for Research in Mathematics Education 28, no. 3 (May 1997): 331-354.

Lesh, Richard and Susan J. Lamon. Assessment of Authentic Performance in School Mathematics. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science, 1992.

Mathematical Sciences Educations Supporting Mathematical Teaching Standards. NRC, Washington, DC: National Academy Press, 1991.

Milgram, Roberta M., ed. Teaching Gifted and Talented Learners in Regular Classrooms. Springfield. Il: Charles C. Thomas, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics. Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1991.

_____. Principles and Standards for School Mathematics Reston, VA: NCTM 2000.

_____. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics-Addenda Series. Reston, VA: NCTM 1991-1992.

_____. Teaching and Learning Mathematics in the 1990's, NCTM 1990 Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1990.

_____. Discrete Mathematics Across the Curriculum. K-12. NCTM 1991 Yourbook. Reston, VA: NCTM, 1991.

Owens. Douglas T., ed. Research Ideas for the Classroom: Volume II: Middle Grades Mathematics New Yourk. NY. Macmillian Publishing Company. 1993.

Peigten, Heinz Otto, Evan Maletsky. Hartmut Jurgens.Terry Perciante, Dietmar Saupe and Lee Yunker. Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volums One and Two. New Yourk: Springer Verlag/NCTM, 1991.

Perl, Teri. Women and Numbers: Lives(Women Mathematicians Puls Discovery Activties. San Carlos, CA: Wide World Publishing/Tetra House. 1993.

Posmentier, Afred S., Hope Hartman and Constanze Kaiser. Tips for the Mathematics Teacher: Research. Based Strategies to Help Studient Learn. Thousand Oaks CA: Corwin Press, 1998.

Quinn, Robert J. "Modelling Statistics Lessons with Preservice and inservice Teachers." Cleaning House 6. No. 4 (Mar-Apr. 1996): 246-248.

Roueche, Suanne D. ed. "Innovation Abstracts, Volume XV, 1993." Innovation Abstracts 15, no. 1-30 (Jan.-Dec, 1993).

Rubenstein, Rheta N. and Denisse R. Thompson. "Learning Mathematical Symbolism: Challenges and Instrunctios. Strategies." Mathematics Teacher, 94 No. 4 (April 2001), 265-271.

Slavin, Robert E. and others. "Cooperative Learning Models for the 3 R's. Educational Leadership 47, no. (Dec., Jan. 1989, 1990): 22-28.

Spikell, Mark A. Teaching Mathematics with Manipulative: A Resourse of Activities for the K-12 Teachers. Needhar Heights. MA: Allyn and Bacon, 1993.

Steen, Lynn A., ed. Heeding the Call for Change: Suggestions for Curricular Action. Washington, DC: MAA, 1992.

Steen, Lynn A., ed. On the Shoulders of GIANTS: New Approaches to Numeracy: NRC. Washington, DC: National Academy Press, 1990.

Stenmark, Jean Kerr, ed. Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions. Reston, VA, NCTM,1991.

Stewart, lan. Nature's Numbers: The Unreal Reality of Mathematics, New York: Basic Books, 1995.

Sutton, Gail Obertholtzer. "Cooperative Learning Works in Mathematics" Mathematics Teacher 85, no. 1 Uan 1992, 63-66.

Sved, Martha. Journey Into Geometries. Washington, DC: MAA, 1991.

Tietze, Martha. "A Core Curriculum in Geometry." Mathematics Teacher 85, no. 4 (Apr. 1992): 300-303.

_____. "Sharing Teaching Ideas." Mathematics Teacher 83, no. 9 (Dec. 1990): 721-724.

Ward. Cherry D. "Under Construction On Hrcorning a Constructivist in View of the Standards." Mathematics Teacher, 94 No. 2 (February 2001), 94-96.

Welchman-Tischler, Rosamond. Teaching with Manlpulatives: Middle School Investigations. White Plains, NY: Cusenaire, 1996.

Zaslovsky, Claudia. Fear of Math: How to Get Over It & Get On With Your Life. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1996.



3 تعليم دروس أكثر تأثيرا

Teaching More Effective Lesson

يعد المعلم شخصاً واسع الخبرة باختصاصه، ويستطيع تقدير استراتيجية التعليم الصفي الأكثر تأثيرا على طلبته. ويكافح المعلم الجيد ويبذل جهودا مستمرة تجعل الصف مكانا يستمتع الطلبة فيه بعملية التعلم.

يعد التعلم الفعال للطلبة، بصورة عامة، هدفاً ملازماً. ومما لا ريب فيه، فإن الأسلوب الذي يتم من خلاله عرض المادة الجديدة للصف يحدد المناخ الحقيقي للتعلم. فإذا تم إخبار الطلبة بحجم المعلومات التي ينبغي عليهم معرفتها حول موضوع ما، فإنهم سيصابون ،حتماً، بالضجر، وسيفقدون الاهتمام بالموضوع، وفي النهاية سوف لن يأبهوا بالموضوع ولا يعيرون له أي نوع من الاهتمام. من أجل هذا، ينبغي على المعلم أن يحاول باستمرار بث وتعزيز المناخ التعلمي المناسب داخل الصف. وتعد الإثارة الفكرية إحدى الطرق التي تديم اهتمام الطلبة طيلة فترة الدرس.

وتستطيع أن تحفز الطلبة عبر عرض دائم لتحديات فكرية معتدلة (سواء ضمن مجاميع صغيرة، أو كبيرة).

سيعني هذا الفصل بإعداد تقانات واستراتيجيات مهذبة، لكي تساعدك على: تحفيز، وسؤال، و(بطريقة أخرى) تحفيز إثارة الطلبة، موفرة لك اكثر الطرق فاعلية بميدان التعليم.

التقانات المحفزة
Motivational Techniques

إن إحدى اكثر المهام صعوبة التي يجابهها معلم الرياضيات تكمن في كيفية تحفيز الطلبة وشد اهتمامهم بموضوع محدد. يتطلب التخطيط لعملية التحفيز وإثارة الاهتمام خيالا واسعا، وقدرة وإبداعية متميزة. فينبغي أن تؤخذ بعين الاعتبار حاجات الطلبة واهتماماتهم، والتي تتغير، طبيعيا، بتغاير خصائص الطلبة المنتشرين في مدارس هذه الأيام. ويبدو أن الهندسة، بحكم طبيعتها المرئية، تثير بسهولة اهتماما ملحوظا بين الطلبة. بيد أن ما يؤسف له، هو أن هذا الأمر لا نجده دائما مع موضوع الهندسة، لأن جزءا كبيرا من مساقاتها الدراسية يعاني من معالجة موضوع برهنة النظريات على مسائل مصطنعة بعيدة عن الواقع الملموس.

بالمقابل فإن الطلبة المهتمين بموضوع الرياضيات تستثيرهم هذه الموضوعات أكثر من غيرها من الأنشطة والفعاليات الرياضية. لذا ينبغي أن يركز المعلم عنايته واهتمامه بالطلبة الأقل اهتماما بمادة بالرياضيات (في التخطيط للمحفزات المناسبة) ذلك لأنهم لن يكونوا بمثل هذه المفاهيم للطبيعية الافتراضية لمادة الهندسة. ولغرض تحفيز الطلبة وشد اهتمامهم. ينبغي توجيه عنايتهم وولعهم صوب تعلم موضوعات مميزة. وقد قمنا في هذا الفصل بمعالجة بعض التقانات التي يمكن استخدامها لتحفيز طلبة المدارس الثانوية بمادة الرياضيات. وقد تم (على وجه الخصوص) عرض ثماني تقانات مختلفة، مع عرض مجموعة من الأمثلة بمادتي الجبر والهندسة لكل منها. (يرجى ملاحظة أن التقنية هي الجزء المهم الذي ينبغي أن يبقى عالقا بالذاكرة، أما الأمثلة فقد تم إيرادها لكي تساعد على فهم هذه التقانة).

ما هو الحافز؟ What Is Motivation?

إن مسألة كيفية تحفيز الطلبة على التعلم تقع على سلّم المشاكل المحيرة في دائرة الاهتمام لمن يريد أن يعد مادة ينوي تعليمها، لأنه إذا كان ممكنا جعل الطلبة يبتهجون بوصفهم متعلمين، بعدها سيصبح الجزء المتبقي من العملية التعليمية اكثر سهولة، وأعمق تأثيرا وفاعلية. بصورة طبيعية، عندما نفكر بكيفية "جعل طالب ما يرغب في التعلم" بم تنوي أن تباشر بتعليمه. فإن جملة من طرائق التحفيز الأساسية قد تقفز إلى ساحة تفكيرنا الشخصي. وتتضمن هذه الطرائق: مكافئات اقتصادية رمزية للأداء الحسن ارتياح الأقران للأداء الحسن، و"تجنب العقاب" بواسطة الأداء الحسن، وإطراء للعمل الجيد، وأمور أخرى متشابهة. تمتاز الطرائق العرضية بفعاليتها الملحوظة للطلبة بأشكالها المتعددة. وتؤثر بيئة الطلبة وتربيتهم المبكرة بشكل ملحوظ على تكيفهم مع المحفزات الخارجية الشائعة.

من ناحية ثانية، فإن كثيرا من الطلبة يظهرون الأهداف الجوهرية في رغبتهم لفهم موضوع ما أو مفهوم محدد (ذو صلة بالواجب)، والأداء المتفوق مع الآخرين (ذو صلة بالذات)، أو يخلف تأثيرا بالغير(ذو صلة اجتماعية). إن الهدف الأخير يباعد الحاجز بين كونه هدفا جوهريا أو عرضيا.

تميل الحوافز الجوهرية إلى مطابقة ومماثلة الأنواع الأساسية الآتية:

المتعلم يريد تنمية وتطوير القدرات. يكون الطلبة، في أحوال كثيرة، متلهفين إلى مسائل التحدي اكثر من تلك التي تتصف بكونها روتينية. لذا ليس من غير المألوف أن ترى الطلبة يبدؤون واجباتهم اليومية بمسائل "التحدي للخبراء Challenge for Experts" على الرغم من كونها تستنزف حجما كبيرا من الوقت، وتحول (في أحيان كثيرة) دون إكمالهم لأعمالهم الروتينية.

المتعلم يحب الإطلاع على الأحداث والأنشطة الجديدة. إنها إحدى الخصائص التي تلتصق بالإنسان فتجعله ينقب عن المواقف والتحديات غير المألوفة، والتي يمكن اقتحامها بالمهارات والمعرفة المتوافرة، مما يوفر شعورا بالقدرة والكفاءة الذاتية. وعندما يتعمق حب الإطلاع والرغبة في اكتناه المجهول وغير المألوف لدى المتعلم مثيرا فضوله، يصبح شكلا من أشكال الحوافز.

المتعلم بحاجة إلى أن يشعر باستقلاليته. إن الرغبة بإحداث تأثير على شئ ما بوصفه نتيجة لما تمليه الإرادة الشخصية هي عامل محفز (في كثير من الأحوال) ضمن العملية التعلمية الشامل. ولتحديد ماذا ينبغي تعلمه بنفسك، بدلاً من الإحساس بأن عملية التعلم تحدث لإرضاء شخص آخر، أو للحصول على مكافأة عرضية أو خارجية، هو أمر تقتضيه الحاجات الإنسانية الأخرى.

يتفاعل المتعلم مع بعض القيم الاجتماعية- الذاتية. عندما نحاول تبسيط وبيان الحاجات والبواعث الإنسانية ينبغي عدم إغفال موضوع كون معظم المتعلمين يمتلكون قيما

أخلاقية محددة والتي أرسيت جذورها الذاتية لديهم عبر أعوام من المد الاجتماعي المستمر الذي ينشأ في أكثر الأحيان داخل بيئة المنزل.

فعلى سبيل المثال، إذا كان الأبوان يخبران الطفل، على الدوام، بأن العمل المثابر جيد، فإن هذه القيمة الأخلاقية سوف تترسخ داخل البناء النفسي للطفل، وتصبح جزءا من البواعث التي تحكم أداء ذلك الطفل وأفعاله. إن مهمة المعلم تكمن في فهم البواعث الأساسية المقيمة في ذات المتعلم ومباشرة تحويلها إلى رأس مال معرفي يفيد منه في الارتقاء بعملية التعليم. ويستطيع المعلم بعدها معالجة معرفته ببواعث الطلبة ببراعة وحكمة بما يضمن زيادة فاعلية العملية التعليمية وتعميقها.

بصورة عامة، ينتج عن هذه المعالجة بعض المواقف المصطنعة التي تخترع (بصورة خاصة) لغرض استغلال بواعث المتعلم من أجل توليد رغبة حقيقية في موضوع ما، وهو أمر مقبول ومرغوب فيه.

مع إبقاء هذه المبادئ والأسس حاضرة بالذهن، نستطيع الآن مباشرة عملية استكشاف لكيفية استخدامها في تنشيط وتحفيز تدريس الرياضيات. إن من الطبيعي إن هذه التقانات ستكون بحاجة لأن تتوسع، وتتزخرف، وتتكيف بحسب شخصية المعلم، وفوق كل هذا، أن تجعل متناسبة مع مستوى قابلية المتعلم وبيئته التي يقطن فيها.

تحفيز الطلبة : التقانات الثمانية
Motivating Student: Eight Techniques

اظهر فجوة في معرفة الطالب
Indicate A Void in Students Knowledge

بصورة عامة، يمتلك الطلبة رغبة طبيعية لإتمام معرفتهم بموضوع ما. ولهذا السبب تتضمن هذه التقانة المحفزة جعل الطلبة يدركون وجود فجوة بمعرفتهم وتوظيف هذا الأمر لتعميق رغبتهم بتعلم المزيد.

مثلا، تستطيع تقديم بعض الأمثلة المبسطة التي تتضمن مواقف مألوفة، ثم تتبعها بأمثلة أخرى تتضمن مواقف غير مألوفة حول الموضوع نفسه. أو قد تذكر أو تعرض لطلبتك كيف أن الموضوع الذي سيعرض عليهم، سيساهم في إكمال معرفتهم حول قسم محدد بالرياضيات. وكلما فعلت ذلك بأسلوب اكثر إثارة ازداد اثر التحفيز بنفوسهم. وغالبا ما تكون عملية توجيه الطلبة صوب الكشف عن هذه الفجوة المقيمة في معرفتهم ذات اثر بالغ.

فيما يأتي بضعة أمثلة حول كيفية استخدام هذه التقانة.

مثال EXAMPLE: (تقديم الزاوية العامة General Angle الجبر – السنة الثانية)

اعرض الأسئلة الآتية على طلبتك:

جد قيمة كل مما يأتي دون مساعدة آلة حاسبة علمية.

1. جا 30^o = ؟
2. جتا 60^o = ؟
3. جتا 120^o = ؟

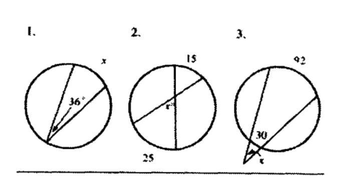
إن الطلبة الذين ألفوا المثلث 30 – 60 – 90 يتوقع منهم أن يكونوا قادرين على إجابة السؤالين 1، 2 بسهولة. أما السؤال الثالث فسوف يثير شعورا بعدم الراحة لدى الطلبة، نظرا لكونهم لم يألفوا التعامل مع دوال مثلثية لزوايا تزيد قيمتها على 90^o.

في هذه اللحظة تستطيع أن تجعل الطلبة يدركون بوجود ثغرة في معرفتهم الرياضية، وسف يتعلمون كيفية إيجاد قيم الدوال المثلية للزوايا التي تزيد قيمتها على 90^o.

مثال EXAMPLE: (تقديم قياسات الزوايا باستخدام رؤوسها خارج دائرة معينة – هندسة).

افترض أن الطلبة قد تعلموا العلاقات بين قياسات أقواس الدائرة، وقياس الزاوية (التي تقابل شعاعاتها هذه الأقواس) مع متممها داخل أو على الدائرة شريطة أن لا تكون خارجها.

إن مجموعة التمارين المكنة قد تم عرضها في أدناه جد قيمة X في كل مما يأتي :



بعد إكمال التمرينين الأولين، ينبغي أن يريد الطلبة تعلم العلاقة الموجودة في التمرين الثالث، مما سيوفر منصة مناسبة للوثوب إلى الدرس. (في سبيل الحصول على خيار ممتع ومشوق في تعليم هذه الوحدة، راجع الوحدة الإثرائية 56، "قياس الزاوية مع الدائرة").

اعرض إنجاز تسلسلي
Show A Sequential Achievement

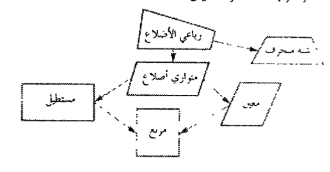
تمتاز هذه التقانة بكونها قريبة الصلة بالتقانة السابقة بيد أنها تتجه صوب جعل الطلبة يفضلون التسلسل المنطقي للمفاهيم الأساسية. وتختلف هذه الخاصية عن الطريقة السابقة في كونها تعتمد على رغبة الطالب بزيادة معرفته، دون الميل إلى استكمال مفرداتها.

إن استخدام مخطط رسومي قد يكون مفيدا في تطبيق هذا الأسلوب من التحفيز.

مثال EXAMPLE: (الأشكال الرباعية – هندسة).

عند توسيع خصائص الأشكال الرباعية، ينبغي إعداد مخطط كالذي يظهر في أدناه.

يمكن أن يوجه الطلبة مع توليد الرغبة لديهم في الوصول، بصورة متعاقبة، إلى عدة مستويات من هذا التوسيع المخطط. وينبغي إعداد الشكل الرسومي بعناية، مع التركيز على الهدف المقصود وجعله ظاهرا للعيان.



قدّم تحديا Present A Challenge

عندما يتم تحدي الطلبة فكريا، فانهم يتفاعلون مع الأمر بحماسة بالغة. من أجل هذا يجب اختيار موضوع التحدي بعناية بالغة. كما ينبغي أن لا تؤدي المسالة (إن تم اعتماد هذا الأسلوب من التحدي) إلى الدرس فقط، بل أن تكون ضمن متناول قدراتهم الشخصية.

كذلك ينبغي أن يكون التحدي قصير الأجل خاليا من التعقيد. بعيدا عن الاستحواذ الكلي على تفكير وانتباه الطالب بحيث ينشب عن ذلك تهميش جزء لا بأس به من الدرس المطلوب، مما يؤدي إلى غياب الهدف الذي اعد التحدي من أجله.

من أجل هذا، فإن التحديات التي تخلق حافزا وباعثا إيجابيا في صف ما، قد لا تمتلك التأثير الملموس نفسه في صف آخر، فتظهر في هذا المقام حكمة المعلم باختيار نوع التحدي الملائم لكل حالة من الحالات.

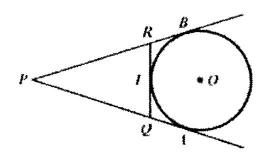
مثال EXAMPLE: (خواص المماسات – هندسة Properties of Tangents)

افترض انك ترغب بتحفيز طلبتك على تعلم درس حول المماس المقام على دائرة. دع الطلبة يتأملون المسألة الآتية:

المعطيات:

المستقيمات $\overline{AQP}$ ، $\overline{BRP}$ ، $\overline{QTR}$ تمس الدائرة O في النقاط A, B, T على التوالي.

AP =18



جد محيط المثلث Δ PQR

قد يشعر الطلبة بأن المعلومات المتوفرة غير كافية لحل هذه المسالة. ولحل المسألة، فانهم بحاجة فقط إلى معرفة العلاقة القائمة بين أطوال قطعتي مماس الدائرة من نقطة خارجية محددة. ومتى يتم توفير هذا المطلب للنظرية (من خلال تحد بسيط)، سيتمكن الطلبة من حل المسألة من خلال ملاحظة علاقات المساواة Equalities

AP =BP , AQ =TQ , BR= TR

بما أن محيط المثلث

$$\Delta PQR = TQ + TR + PQ + PR$$
$$= AQ + BR + PQ + PR$$

كذلك

$$AQ + PQ = AP = 18,$$

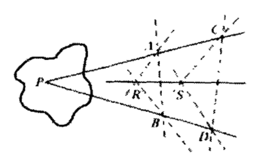
و

$$BR + PR = BP = 18$$

وعليه فإن محيط المثلث PQR = 36

مثال EXAMPLE: (التقاء المستقيمات المنصفة لزوايا مثلث – هندسة Concurrency of angle Bisectors of a triangle): يمكن استخدام تحد من نوع آخر عند طرح موضوع التقاء المستقيمات المنصفة لزوايا مثلث. فيطلب من الطالب تحديد (أو رسم) مستقيم ينصف زاوية يقع رأسها في منطقة

يتعذر بلوغه. ينبغي أن يكون الطلبة معتادين على الأشكال التي تتطلب استخدام المسطرة والفرجار.



إن أحد الحلول المرغوبة لهذه المسألة يتطلب رسم أي مستقيمين مثل $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$

اللذين يقطعان أشعة الزوايا الموجودة في موقع يتعذر بلوغه P.

رسمت منصفات الزوايا الأربع، والنقطتان S , R تحددان منصف الزاوية المطلوب.

ينبغي على الطلبة ملاحظة كون المستقيمات المنصفة لزوايا مثلث متلاقية، (تأمل هنا المثلثين Δ APB ،Δ CPD كل على حدة)، ينجم عنه ضرورة وقوع كل من النقطتين S, R في منصف الزاوية التي يتعذر بلوغها. بعد مشاهدة هذا الحل، سيرغب الطلبة ببرهنة مسألة التقاء المستقيمات المنصفة لزوايا مثلث (من أجل معالجة اكثر عمقا لهذه المسألة، النظر الوحدة الإثرائية 37، "الزاوية التي يتعذر بلوغها").

مثال EXAMPLE: (تقديم مجموع المتسلسلة الهندسية – الجبر/سنة ثانية) Introducing the sum of a geometric senies:

اعرض التحدي الآتي لطلبتك:

أي مما يلي تفضل الحصول عليه؟

أ– مبلغ 100,000 $ في كل يوم لمدة 31 يوما

أم

ب– 1 € في اليوم الأول

2 € في اليوم الثاني

4 € في اليوم الثالث

8 € في اليوم الرابع

16€ في اليوم الخامس

وعلى هذا الأسلوب لمدة 31 يوما.

سيميل معظم الطلبة باتجاه الخيار (أ)، لأنه يعطي انطباعا بالحصول بعد مرور 31 يوما على مبلغ كبير مقداره 3,100,000 $. إن مهمة جمع 31 حدا من حدود الخيار (ب) سيكون أمرا مضنيا.

ينبغي أن يحفز الطلبة الآن على التنقيب عن خطوة مختصرة لإنجاز عملية الجمع المضنية!. وبعد أن يستطيعوا إنشاء صيغة مناسبة لجمع حدود المتسلسلة الهندسية، يمكن لهم أن يطبقوا الصيغة المستحدثة في حل مثل هذه المسألة. وسيصابون بدهشة شديدة عندما يكتشفوا الرقم الجديد الذي سينتج عن تطبيق الصيغة على الخيار(ب) وسيكون المبلغ 21, 474, 836, 47 $.

اظهر فائدة الموضوع

Indicate the Usefulness of a Topic

هنا، يتم عرض تطبيق عملي في بداية الدرس. ينبغي أن تكون التطبيقات المختارة ذات فائدة ملموسة للصف. ونؤكد ثانية على ضرورة اختيار التطبيقات بحيث تكون مختصرة وخالية من التعقيد المبالغ فيه بحيث تثمر عن تحفيز الطلبة بالإقبال على الدرس بدلا من الإعراض عنه. يجب اخذ اهتمامات الطلبة بنظر الاعتبار، وبعناية بالغة، عند اختيار تطبيق ما، وتذكر بأن الفائدة تكون مناسبة فقط عندما يمتلك الطالب معرفة سابقة بالموضوع المعالج ضمن التطبيق.

إن الأمثلة الآتية قد اقترحت لإيضاح وبيان هذه التقانة.

مثال EXAMPLE: (خواص المستقيم العمود على مستوي– هندسة) Properties of a line perpendicular to a plane:

عند إقامة الطلبة لسارية العلم، تنمو لديهم الرغبة بمعرفة كيف يمكن أن نكفل التعامد Perpendicularity– وهذا مبرر طبيعي للتحفيز باتجاه هذه النظرية. "إذا كان مستقيم عموديا على كل من مستقيمين متقاطعين، في نقطة تقاطعهما، فإن هذا المستقيم يكون عموديا على المستوي الذي يتحدد بهما".

إن التوسع بمسألة سارية العلم يعتمد على مستوى القابلية ومستوى الاهتمام بالموضوع السائد في الصف (ويصدق هذا الأمر مع جميع طرائق التحفيز المعروضة هنا).

مثال EXAMPLE: (العلاقة بين قطعي وتري الدائرة المتقاطعين Relationship Between the segments of two intersecting chords of a circle– هندسة):

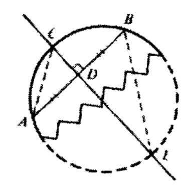
إن احتساب مساحة الطبق المتصدع الذي يكون الجزء الأكبر المتبقي منه عبارة عن قطع صغير من الدائرة الأصلية، هو تطبيق يحتاج إليه الطلبة لإيجاد قطر الدائرة التي يكون فيها القوس $\widehat{ABC}$ هو القوس الثانوي Minor Arc بالطبع إن

صياغة هذه المسألة ضمن أقصوصة سيكون أكثر تحفيزا للطلبة. ارسم أي وتر $\overline{AB}$ للقوس، والعمود المنصف $\overline{CDE}$ لذلك الوتر (حيث أن نقطة C تقع على القوس). قم بقياس كل من $\overline{AD}$ و $\overline{CD}$، ثم استخدم التشابه Similarity لإنشاء التناسب

$$\frac{BD}{CD}=\frac{DE}{AD}.$$

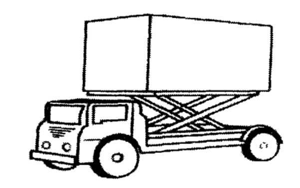
وعليه فإن DE ثم CE اللذين يمثلان القطر المطلوب للدائرة، يمكن احتسابهما بسهولة. هذه المسألة ستكون حافزا للنظرية التي تنص على ما يأتي "إذا تقاطع وتران في داخل دائرة، يمكن احتساب قطعتي كل من هذين الوترين، بحيث أن حاصل ضرب أطوال قطعتي الوتر الأول تساوي حاصل ضرب أطوال قطعتي الوتر الثاني". بالرغم من أن الطلبة قد يكونون قادرين على حل هذه المسألة بالأسلوب المذكور هنا، غير انهم سيرحبون بطريقة اقصر للحل. وعليه، فإن المسألة قد ولدت لديهم حاجة إلى إنشاء العلاقة DE.CD=AD.BD

إن برهان النظرية قد طمر ضمن الحل الذي تم تقديمه الآن.



مثال **EXAMPLE**: (خصائص المثلثات المتشابهة – هندسة) :PROPERTIES OF SIMILAR TRIANGLES

عند عرض خصائص المثلثات المتشابهة، اطرح على الطلبة سؤال: كيف أن الأرجل المتصالبة CROSS-LEGS لعربة خدمات الطائرة ينبغي أن يحدد موضعها بدقة بحيث أن مستوى الصندوق يكون موازيا لمستوى العربة.



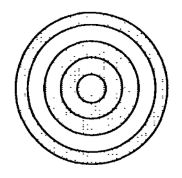
عندما تغير الأرجل المتصالبة الموضع ، ينبغي ملاحظة أن الأرجل يجب أن تقسم كل منها الأخرى (دائما) بصورة متناسبة، إذا كان مستوى الصندوق سيبقى موازيا لمستوى العربة.

هذا الأمر سيحفز الطلبة على برهنة هذه الحقيقة.

استخدم الرياضيات الترفيهية
Use Recreational Mathematics

تتألف الحوافز الترفيهية من ألغاز Puzzles، وألعاب Games، وعبارات موهمة بالتناقض Paradoxes، أو تسهيلات facilities يضاف إلى ذلك، لكي تختارها بوصفها مصدرا لتحقيق كسب تحفيزي، ينبغي أن تتم بدون بذل جهد لكي تكون هذه التقنية فعالة ومؤثرة.

مثال **EXAMPLE**: (مساحة الدائرة–هندسة) Area of Circle: عند البدء بدراسة مساحة الدائرة، يمكن أن نعرض للطلبة خمس دوائر متمركزة Concentric (نصف قطر الصغرى يساوي I وحدة) وتزيد أقطار كل منها على بعضها بمقدار I وحدة، على التوالي. ونطلب منهم المقارنة بالبديهية بين مساحتي المنطقتين المظللتين (انظر المخطط).



سيستنتج معظم الطلبة بأن "المنطقة الداخلية"تمتلك مساحة اكبر من منطقة "الحلقة الخارجية".

إن اعتبار مساحة الدائرة سيثمر بالحصول على العلاقة الحقيقية. وبصورة عامة، سيصاب الطلبة بدهشة بالغة عندما يجدون أن المنطقتين تمتلكان مساحات متساوية.

مثال **EXAMPLE** (عام) **GENERAL**

إن موضوعات مثل: القسمة على الصفر، التوسط، والتعاريف مثل

$\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ عندما تكون قيمتا a, b ليستا سالبتين، ووجود الزوايا المنعكسة Reflex Angles تعرض دائما عبر مغالطات رياضية. وتتوفر جملة من الكتب التي تعني بعرض

مغالطات تتضمن هذه الموضوعات، وموضوعات أخرى.

إن بعض هذه الكتب:

Ball, W. W. Rouse. Mathematical Recreations and Essays. Revised by H.S. M. Coxeter. New York: Macmillan, 1960

Barbeau, Edward J. Mathematical Fallacies, Flaws, and Flimflam. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Cipra, Barry. Mistakes and How to Find Them Before the Teacher Does. San Diego, CA: Academic Press, 1989.

Dubnov, Ya. S. Mistakes in Geometric Proofs. Translated by A. K. Henn and O. A. Titelbaum. Boston:Heath, 1963.

Eastway, Rob and Jeremy Wyndham. Why do Busses Come in Threes? New York: John Wiley & Sons,1998.

Maxwell, E.A. Fallacies in Mathematics. London, England: Cambridge University Press, 1959.

Northrup, E. P. Riddles in Mathematics. Princeton: Van Nostrand,1944.

مثال **EXAMPLE**: (مقدمة إلى مسائل رقمية – الجبر) Introduction To digital Problems: ابدأ التقديم بسؤال طلبتك اختيار أي عدد بثلاث أرقام بحيث تكون مراتب المئات والآحاد غير متساوية. بعدها دعهم يكتبون العدد الذي تكون أرقامه معكوس أرقام العدد المختار.

والآن اطلب منهم طرح هذين العدديين (العدد الأصغر من العدد الأكبر). ثم اطلب منهم ثانية اختيار الفرق، وعكس أرقامه، ثم إضافة العدد الجديد إلى حاصل الطرح الأولي. وسينتهي جميع الطلبة بالحصول على العدد 1089. على سبيل المثال، افترض أن الطالب قد اختار العدد 934، وعليه فإن العدد بالأرقام المقلوبة هو 439، وستكون الحسابات كما يأتي:

934	
439	
495	(الفرق)
594	(الأرقام المعكوسة)
1089	(المجموع)

عندما يقارن الطلبة بين النتائج سيصابون بالدهشة عندما يكتشفون التشابه في أجوبتهم. في هذه النقطة سيكون الطلبة متلهفين ليكتشفوا "لماذا" أتت جميع الاختيارات بالنتيجة ذاتها. هناك مناقشة تفصيلية لهذه الخاصية الرقمية– غير الاعتيادية في الوحدة الإثرائية "إعادة زيارة لمسائل الأرقام" "Digit Problems Revisited".

اروي قصة وثيقة الصلة بالموضوع

Tell a Pertinent Story

قد تلعب القصة التي تروي حدثا تاريخيا، أو موقفا مخترعا دورا فاعلا في تحفيز الطلبة. ويسرع المعلمون، في معظم الأحيان، بسرد القصة التي يعرفونها جيدا لرغبتهم في الدخول إلى مادة الدرس. إن مثل هذا العرض المستعجل يقلل من التأثير الكامن للقصة بوصفها أداة تحفيز. وعليه، فإن طريقة معدة بعناية لعرض قصة بقصد تحفيز الدرس تتبوأ الأهمية نفسها التي تمتاز بها القصة ذاتها.

مثال **EXAMPLE**: (تقديم مجموع متسلسلة حسابية – الجبر) Introducing the Sum of an arithmetic Series: اقصص لطلبتك كيف أن الحدث كارل فردريش جاوس Carl Friedrich Gauss، والذي كان عمره يقارب عشرة أعوام، وكيف أن المعلم قد طلب من الفصل القيام بجمع الأعداد من 1 إلى 100 . وقد أصيب المعلم بذهول شديد عندما وجد ان طالبه الحدث جاوس قد اكمل حل المسألة بصورة صحيحة خلال وقت قصير جدا. وعندما سأله عن كيفية توصله إلى الحل بهذه السرعة ، عمد الطالب الحدث إلى تفسير ذلك كما يلي:

$$1 + 100 = 101$$
$$2 + 99 = 101$$
$$3 + 98 = 101$$

وعليه، يوجد 50 زوج من هذا النوع، و ستكون الإجابة:

$$50 \times 101 = 5050$$

يمكن استخدام هذا المنهج، أو النسق في إعداد صياغة رياضية لمجموع متسلسلة حسابية.

مثال **EXAMPLE**: (موضوعات متعددة – هندسة) Various Topics: لدراسة المستقيمات المتوازية، تصبح قصة قياس الرياضي ايراتوسذينيس Eratosthenes(*) لمحيط الأرض مناسبة في توضيح الموضوع (انظر:
Posamentier, Banks, and Bannister, Geometry: Its Elements and Structure, New York: McGraw-Hill, 1977, P.226)

قبل البرهنة على أن زاويتي قاعدة مثلث متساوي الساقين

(*) فلكي يوناني (194 – 276 ق.م).

متطابقتان قد يجد المعلم أن مناقشة مختصرة لموضوع التطابق الذكور Pons Asinorum (*) مناسبة. إن أخبار الطلبة بأن هذا البرهان كان فيصلا بالقرون الوسطى لعزل الطلبة الذين لا يحسنون فهمه عن بقية الطلبة سينجم عنه تحريض الطلبة، وحثهم جميعا باتجاه حل هذه المسألة.

هناك عدد لانهاية له من القصص، التاريخية أو غيرها، والتي يمكن استخدامها لأغراض تحفيز الطلبة، وقد يتضمن بعضها الموضوعات الآتية (سنحاول أن ندرج المراجع بعد كل منها). ويمكن الحصول على كثير من المصادر الأخرى في كتاب ببلوغرافية الرياضيات الترفيهية Abibiogaphy of Recreactional Mathematics بأجزائه الأربعة، تأليف:

William L. Shaaf, Washington, D.C, National Coucil of Teachers of Mathematics, 1970(2), 1973, 1978).

1. أصول بعض الرموز والاصطلاحات التي ينبغي عرضها:

Cajori. Florian. A History of Mathematical Notations (2 vols). La Salle. IL: Open Court. 1952.

Schwartzman. Steven. The Words of Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1994.

2. تاريخ الرمز π:

Beckmann, Petr. A History of π. New York: St. Martin's Press, 1971.

Berggren, Lennart, J. Borwein, P. Borwein. Pi: A Source Book. New York: Springer-Verlag, 1997.

3. المستطيل الذهبي The Golden Rectangle:

Duniap, Richard A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. River Edge, N.J.: World Scientific Publishing, 1997.

Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number New York: Dover, 1998.

Huntley, H. E. The Divine Proportion. New York: Dover, 1970.

Posamentier, Alfred S. Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

Runion, Garth E. The Golden Section and Related Curiosa. Glenview. IL: Scott, Foresman, 1972.

Walser, Hans. The Golden Section. Washington DC: Mathematical Association of America, 2001.

4. أدوات القياس القديمة Ancient Measuring Devices:

Kline, Morris. Mathematics: A Cultural Approach. Reading, MA: Addison-Wesley, 1962.

Martzloff, Jean-Claude, The History of Chinese Mathematics. New York: Sprinter-Verlag, 1997.

Polya, George. Mathematical Methods in Science, Washington, DC: Mathematical Association of America, 1977.

5. أهم الإنجازات في الرياضيات

Major Breakthroughs In Mathematics

Bunt, L., P. Jones, and J. Bedient. The Historical Roots of Elementary Mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

Smith, David E. A Source Book in Mathematics, New York: McGraw-Hill, 1929.

Newman, James R. The World of Mathematics (4 vols.). New York: Simon & Schuster, 1956.

Struik, D. J. (Ed.). A Source Book in Mathematics. 1200-1800 Princeton, NJ: Princeton University Press, 1986.

6. ملاحظات بيبلوغرافية وثيقة الصلة بالموضوع

Pertinent Biographical Notes

Bell, E. T. Men of Mathematics. New York: Simon & Schuster, 1937.

Biographical Dictionary of Mathematicians. Volumes 1-4. New York: Charles Scribner's Sons, 1991.

Coolidge, Julian L. The Mathematics of Great Amateurs. New York: Dover, 1963.

Gindikin, S. G. Tales of Physicists and Mathematicians. Boston: Birkhauser, 1988.

Perl. Teri. Math Equals Biographies of Women Mathematicians and Related Activities. Menlo Park, CA: Addison- Wesley, 1978.

Schmalz, Rosemary. Out of the Mouths of Mathematicians. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1993.

Turr. bull. Herbert W. The Great Mathematicians. New York: New York University Press, 1961.

7. نوادر وأساطير ذات صلة بالموضوع

Pertinent Anecdotes

Aaboe, Asger. Episodes from the Early History of Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1964.

(*) اصطلاح يطلق على الفرضية القائلة بأن زاويتي قاعدة المثلث متساوي الساقين تكونان متساويتين.

Devlin, Keith. All the Math That's Fit to Print. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1994.

Dunham, William. Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics. New York: John Wiley and Sons, 1990.

Eves, Howard. In Mathematical Circles (2 vols.). Boston: Prindle Weber and Schmidt, 1969.

Eve, Howard. Mathematical Circles Revisited. Boston: Prindle Weber and Schmidt, 1971.

Kaplan, Robert. The Nothing That Is, A Natural History of Zero. New York: Oxford University Press, 1999.

Katz, Victor J. Using History to Teach Mathematics. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

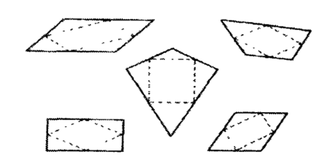
كسب طلبة ينهمكون بنشاط في تبرير الفضول الرياضي
Get Students Actively Involved In Justifying Mathematical Curiosities

تكمن إحدى التقانات الأكثر تأثيرا في تحفيز الطلبة في المحاولة النشطة لتبرير حب الاستطلاع الذي يرتبط بصلة وثيقة مع الرياضيات. وينبغي أن يكون الطلبة على قدر كاف من الألفة مع الفضول الرياضي قبل أن تحاول "تحديهم" لتبرير ذلك. وبرغم أن هذا الأمر يستنفد وقتا اكثر مما يستغرق بصورة تقليدية لأنشطة تحفيز من نوع آخر، للاستمرار بعملية التبرير، وقبل أن يبدو للعيان بصورة واضحة بأن هذا الأمر لا يثمر عن نتائج مرضية.

مثال EXAMPLE: (تقديم لستقيم الذي يصل بين منتصفي ضلعي مثلث (خط المنتصف Midline – هندسة)

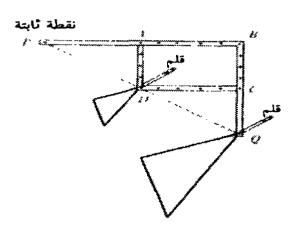
Introducing the line Joining the points of two) :(sides of triangle

افترض بأن الطلبة على وشك دراسة خصائص الخط المتوسط بالمثلث . ولغرض تحفيزهم يمكن أن يطلب منهم القيام برسم أي خمسة أشكال رباعية الأضلاع، ثم البدء بوصل نقاط منتصف الأضلاع المتجاورة بقطعة مستقيم . وسيصابون بمزيد من الدهشة عندما سيجدون بأنهم قد قاموا برسم خمسة أشكال متوازية الأضلاع. يتوقع أن يطلب من طلبة الصف تهيئة برهان لهذه المسألة. ترتكز إحدى البراهين الرائعة إلى خصائص الخط المتوسط للمثلث، وعليه تتوفر لدى المعلم فرصة ذهبية لتقديم الخط المتوسط ومناقشة خصائصه الهندسية.



مثال EXAMPLE: (التشابه – هندسة) :Similarity

هناك موضوع آخر للفضول الهندسي يتعلق بالمنساخ Pantograph، وهو عبارة عن أداة تستخدم لعمل صور متشابهة (مستنسخة) لأشكال السطوح المستوية Plane figures. يستطيع الطلبة بناء هذه الآلة في البيت. وسيناقش في بداية الدرس موضوع التشابه، كما ويمكن تبرير العمليات التي يؤديها جهاز المنساخ.



يتألف المنساخ من أربعة قضبان معلقة في النقاط D,C,B,A. بينما تكون نقطة P ثابتة، وتوضع الأقلام في فتحات النقطتين Q,D. ويوجد مجموعة إضافية من الثقوب على قضبان المنساخ يمكن استخدامها بنسب مختلفة للمشابهة Similitude، $\frac{BC}{BQ}$.

استخدم مواد مصنعة بواسطة المعلم أو تجاريا
Use Teacher- Made Or Commercially Prepared Materials

هنا يمكن بلوغ التحفيز من خلال عرض مواد ملموسة ذات طبيعة غير مألوفة لطلبة الصف. ويتضمن هذا الأسلوب مواد صنعها معلم المادة، مثل نماذج لأشكال هندسية وشرائح هندسية Geo Strips، أو شفافيات ورقية تم إعدادها خصيصا

لهذا الغرض، أو أدوات عملية، والتي يمكن توظيفها لعرض وتوضيح مبادئ هندسية معينة. تتوفر كذلك مواد مصنعة تجاريا لخدمة هذه الأغراض تتراوح بين نماذج هندسية Geometric Models إلى أفلام بأنواع متنوعة.

ينبغي استعراض المواد المختارة ، بعناية بالغة مع الاهتمام بتخطيط أسلوب عرضها على الطلبة لكي تثير لديهم حافزا باتجاه مادة الدرس دون أن تستغرق انتباههم عنها باتجاه المواد المستخدمة.

خلاصة SUMMARY

أن تذكر بضعة قواعد عامة حول استخدام التقانات التحفيزية الثمانية (آنفة الذكر) سيجعل من توظيفهم داخل الدرس اكثر فاعلية وتأثيراً.

1. ينبغي أن يكون التحفيز مختصرا.
2. ينبغي تجنب المبالغة في التحفيز، فيكون طريقا مؤديا إلى غاية محددة، دون أن يكون غاية بذاته.
3. ينبغي أن يثير التحفيز الهدف المتوخى من الدرس في طلبة الصف. ويعد هذا الأسلوب معيارا لتحديد الفاعلية الملموسة للتحفيز.
4. ينبغي أن يتناسب التحفيز بمادته مع مستوى الصف من حيث القابليات المتوافرة لدى طلبته والاهتمام السائد لديهم.
5. ينبغي أن يكون التحفيز قادرا على شد الاهتمام القائم فعليا في ذات المتعلم باتجاه مادة الدرس.

بالرغم من طبيعة التحدي الصعب الذي تثيره عملية التخطيط للتحفيز باتجاه الدرس، فإن نتائجها لا قياس لها. وستبرر الجهود الاستثنائية والوقت المستغرق في هذه التقانة بالنتائج المرتفعة لتعلم الطلبة من نشاط التحفيز والذي قد خطط له ونفذ بدقة وعناية على ساحة الصف المدرسي.

تمارين Exercises

1. كيف تستطيع أن تحدد مدى نجاح النشاط التحفيزي الذي مارسته؟
2. قم بإعداد نشاط تحفيزي، لكل من الموضوعات الآتية باستخدام إحدى التقانات التي نوقشت في هذا الفصل.
   أ. درس تمهيدي حول المساحة (هندسة).
   ب. درس تمهيدي حول حل المعادلات التربيعية-القابلة للتحليل.
   ج. درس تمهيدي حول اختصار الكسور (حساب).
   د. درس تمهيدي حول ضرب الأعداد الرمزية Signed Numbers.
   هـ. درس تمهيدي حول الاستقراء الرياضي Mathematical induction.
   و. درس تمهيدي حول حل المعادلات الآنية جبريا (طريقة الجمع).
   ز. درس تمهيدي حول المحل الهندسي Locus.
   ح. درس تمهيدي حول جداول الصدق.
   ط. درس تمهيدي حول متوازي الأضلاع.
   ي. درس تمهيدي حول برهنة المتطابقات المثلثية Trigonometric Identities.
   ك. درس تمهيدي حول الأساس (لغير الرقم 10).
   ل. درس تمهيدي حول النظام المتري Metric System.
3. قم بإعداد نشاط تحفيزي آخر لكل من الموضوعات المدرجة في تمرين 2.
4. افترض إعدادك لنشاط تحفيزي شد اهتمام الصف بحيث لم يعودوا يرغبون بترك الموضوع. ماذا ستفعل لكي تجعل هذا النشاط يؤدي الغاية التي حددت له، والتي تتضمن إثارة انتباه الطلبة نحو موضوع الدرس. حاول تبرير إجابتك.
5. اختر موضوعا من المنهج الدراسي لرياضيات المدرسة الثانوية، وقم بتحضير نوعين مختلفين من أنشطة التحفيز باستخدام التقانات التي تم عرضها في هذا الفصل.
6. اعد التمرين الخامس باستخدام موضوع اخر من المنهج الدراسي للرياضيات بالمدرسة الثانوية.
7. قم بإعداد ثلاثة أنشطة تحفيزية للموضوع نفسه في المنهج الدراسي لرياضيات المدرسة الثانوية. بعد دمج هذه الأنشطة في مخطط الدرس نفسه، ابدأ بتعليم الدرس (كل، بالطبع، مع نشاط تحفيزي مختلف بالبداية) في ثلاثة صفوف مختلفة. وإن لم تكن قادرا على توثيق هذه الدروس بواسطة شريط فيديو كاسيت، احضر معلماً متمرسا بالرياضيات لكي يراقب الصفوف الثلاثة. بعد الانتهاء من هذا النشاط قم بتحليل الدروس الثلاثة مع معلم متمرس ذي خبرة عميقة

بالرياضيات وحدد أي نوع من أنواع التحفيز الثلاثة كان لها التأثير الأكبر، ولماذا نجم عنها هذا التأثير الجيد؟. ينبغي أن يوجه التحليل صوب بيان تأثير جملة من العوامل مثل: مدى ملائمة التقانة، ونوع الصف الذي تم تطبيقها فيه وطبيعة شخصية المعلم الذي استخدم تلك التقانة.

8. اعد التمرين السابع، على أن يكون الذي يقوم بتدريس الدروس الثلاثة، هذه المرة، متطوعا من المعلمين المتمرسين في تدريس الرياضيات، على أن يتم التخطيط لأدوات التحفيز بصورة تعاونية.

مساءلة الصف Classroom Question

بطرح سؤال أحكمت صياغته على طلبة الصف، يشجع المعلم التعلم الناشط من ناحية الطلبة. ويبقى هناك سؤال يفرض نفسه علينا في هذا الموضوع، هو: ما هو الهدف المقصود من طرح هذا السؤال؟.

إن مساءلة الصف (طرح السؤال على طلبة الصف) ينبغي أن تثير استجابة الطلبة التي تتألف من المعلومات التي لو لم تثر لعرضها المعلم بنفسه على الطلبة (في بعض الأحيان تستلم بعض التعليقات المبتكرة – القيمة).

بالرغم من أن هذا الأمر، يصعب في الحقيقة إنجازه بصورة متكاملة، لكنه يبقى هدفا ينبغي أن نكافح من أجل الوصول إليه.

ينبغي أن يوجه اهتمام بالغ صوب إعداد أسئلة جيدة بعيدة عن التوجهات الجنسية أو الثقافية. وإن طرح السؤال الجيد هو فن بحد ذاته وهو أحد الأقطاب الرئيسية للعملية التعليمية البارعة. ونتيجة لذلك، فقد ينشد عنه زيادة في تماسك العمل الصفي، أو ضعف خطير ومؤثر. من أجل هذا ينبغي أن تعد الأسئلة بمعيار عقلاني، ووفق ما يمليه الضمير شريطة أن يتم ممارستها وتطبيقها بصبر وروية.

هناك كثير من المآزق والأخطار المحدقة التي ينبغي تجنبها أثناء طرح الأسئلة الصفية، والتي سنحاول معالجتها فيما بعد.

تنمية سمات مساءلة الصف

Class Room Questioning Features to develop

ينبغي أن يعمد المعلمون إلى تنمية عادة الإكثار من طرح الأسئلة، والتي تلعب دورا مهما في تعميق أدائهم التدريسي.

إن كل الاقتراحات الآتية والمطروحة لغرض تنمية أسلوب فاعل بطرح الأسئلة داخل الصف المدرسي، بحاجة إلى أن تطبق ميدانيا بعناية بالغة، نظرا لفوائدها الجمة التي تمتد خارج نطاق مساءلة الصف، كما وتمتلك تأثيرا عميقا على عملية التعلم/التعليم.

لغة مباشرة وبسيطة Direct & Simple Language

ينبغي أن تكون أسئلة الصف مباشرة وبسيطة في لغتها. وأن يركز الطلبة على محتوى السؤال، وليس على اللغة المستخدمة في أدائه. يعني، إذا صرفت اللغة انتباه الطلبة عن محتوى السؤال، بسبب كونها شديدة التعقيد أو ربما للمبالغة في روح الفكاهة بعبارتها، فإن التأثير الكامن بالسؤال سوف يضيع إدراج الرياح.

يستطيع المعلم توظيف أسئلة الصف لإشباع الوظيفة المطلوبة باستخدام لغة مباشرة وبسيطة (بمعنى آخر، تتناسب مع مستوى المرحلة الدراسية المقصودة).

معنى محدد وواضح Definite and Clear Meaning

ينبغي أن تكون أسئلة الصف محددة وواضحة لا لبس في معانيها. وإذا كان سؤال ما يؤدي بعبارته إلى تفسيرات متباينة فإن الطلبة قد تضعف استجابتهم له. وعليه لأجل زيادة عدد المتبرعين المستجيبين، ينبغي تجنب الضبابية وعدم الوضوح، وسيبقى دائما السؤال الأقصر هو الأقل إثارة للإرباك وتشوش الأفكار. كما ينبغي أن يثير السؤال نقطة أساسية واحدة أو اثنتين في طريق التفكير والاستنتاج. وعلى المعلم أن يطرح المزيد من الأسئلة بدلا من محاولة حصرها بعدد محدود وإطالتها، لأن محاولة طرح المزيد من التساؤلات ضمن سؤال واحد، سيؤدي بالمعلم إلى أن يصبح ميالا إلى طرح أسئلة مركبة أو متراكبة Overlaid ؟ (انظر الصفحات الآتية).

تسلسل منطقي Logical Sequence

ينبغي أن تنشئ المساءلة سلسلة من الأفكار بنسق منطقي محكم. وقد يحدو نفاد صبر المعلم محدود الخبرة، إزاء عملية التطوير، به إلى الإسراع صوب السؤال الحيوي (أو الرئيسي) للدرس دون أن ينفق وقتا كافيا لكي يرشد طلبته إلى المسألة من خلال أسئلة تمهيدية مختصرة. إن خاصية نفاد الصبر هذه ينجم عنها تقليل ملحوظ في التأثير الجوهري والمتوقع من الأسئلة الحيوية والمهمة.

بما أن الأسئلة الجوهرية تبدو، عموما، الجزء الأكثر إشراقا

من مادة الدرس، لذا فإن من الضروري عدم التقليل من فاعليتها وتأثيراتها المطلوبة. وعليه، ينبغي على المعلمين منح عناية كافية لجميع أجزاء منهج المساءلة التي تنمي سلسلة من الأفكار والمفاهيم بتسلسل منطقي. وهذا يعني أن نفس العناية والاهتمام ينبغي أن يمنحا للأسئلة المبكرة، والعادية، أو المبتذلة تقريباً (أو أسئلة تعيد النظر بموضوع ما) بنفس المستوى من الاهتمام المخصص للأسئلة الجوهرية والمتقدمة.

تذكر دائما بأن الأسئلة الجوهرية لن تكون فعالة ومؤثرة ان لم تكن قد صيغت، واحكم تطوير مفرداتها، وتنميتها بعناية، وعبر سياق يتألف من أسئلة ثانوية، وبترتيب محكم تم اختياره سلفا.

أسئلة مكيفة بالقياس إلى مقدرة الصف
Questions Keyed to Class Ability

ينبغي أن يكون مستوى قابلية طلاب الصف عاملاً فاعلاً في تحديد اللغة والتعقيد السائد في الأسئلة المستخدمة في داخل الصف. ويسهل على المعلم استخدام نفس الأسئلة خلال فترتي درس متعاقبتين، وبالخصوص عندما يتضمنان المادة الدراسية نفسها.

إذا كانت مستويات المقدرة لطلبة الصفين متباينة، ينبغي تجنب هذا الأسلوب من المران. أما بالنسبة للصف الأبطأ أو الأقل حنكة، فيمكن استخدام لغة اكثر بساطة، واقل تعقيدا من تلك التي تستخدم مع صف يضم طلبة اكثر مقدرة. وينبغي أن يحرص المعلمون على عدم استخدام لغة تهبط بعباراتها إلى مستوى لغة الطلبة، بيد أن عليهم في الوقت ذاته تجنب إدارة الصف بلغة ترقى عباراتها ،وتتجافى عن مقدرتهم على فهم المعاني الكامنة وراء مفرداتها بسهولة.

ان طرح أسئلة تتناسب مع قدرات المستمعين المقصودين بالمساءلة، ستوفر للمعلمين إمكانية تحسين التواصل مع طلبة الصفوف بجميع مستوياتها.

الأسئلة التي تحث على الاجتهاد
Questions That Stimulate Effort

ينبغي أن تنهض الأسئلة بالاجتهاد والمحاولة لدى الطلبة، من أجل هذا يجب على المعلمين بذل جهود استثنائية لإعداد أسئلة تمتاز بصعوبة كافية لإثارة، وحث مسعى مناسب، شريطة ان لا يؤدي ذلك إلى خنق وكبت المبادرة لدى الطلبة، ويتم تحقيق ذلك من خلال تجهيز مفردات السؤال وعباراته بحيث تتناسب مع مستوى الصف.

ينبغي أن توفر المساءلة الصفية الجيدة مناخا مناسبا لسيادة روح التحدي طيلة فترة الدرس، شريطة أن تكون الأسئلة قصيرة، وواضحة، ومرتبة في سياق منطقي يساعد على تشييد، وإنشاء الغاية المرادة منه.

يمكن أن يتألف سياق الأسئلة من خليط من أسئلة فكرية وواقعية، على أن يكون الجزء الأكبر منها من النوع الأول. وأن تتضمن خليطا متوازنا من أسئلة قصيرة تحمل طابع التحدي، مع أنواع أخرى تختص بمراجعة مواضيع سابقة أو أسئلة ترابطية. إن هذا الخليط من الأسئلة التي تعالج اكثر من موضوع، ينبغي أن يتفوق وينجح في حث التعلم الفعال بشكل ملموس.

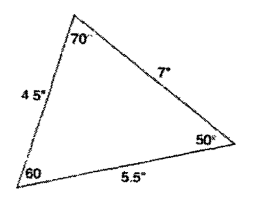
أسئلة مفتوحة Open –Ended Questions

تتيح الأسئلة المفتوحة للطلبة إمكانية الوصول إلى استنتاجات وإصدار قرارات رياضياتية تتساوق مع فهمهم وقدراتهم. ويستطيع الطلبة، من خلال الامتحان الصفي، إظهار طبيعة، وعمق الاستجابة التي يستحيل تحديدها على أساس اختيار إجابة من قائمة اختيارات متعددة Multiple – Choice أو كتابة عدد ما.

توفر الأسئلة المفتوحة للطلبة، كذلك ، إمكانية الوصول إلى مجموعة من الإجابات "الصحيحة" الممكنة.

مثال EXAMPLE:

ناقش مدى إمكانية الحصول على مثلث بالأبعاد المبينة فيما يأتي:



مثال Example:

عرض عليك صديقك المثال الآتي:

$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$ بواسطة اختصار العدد 6.

$\frac{26}{65}=\frac{2}{5}$ كذلك، بواسطة اختصار العدد 6.

$\frac{1}{5}=\frac{19}{95}$ بواسطة اختصار العدد 9.

$\frac{1}{2}=\frac{49}{95}$ كذلك، بواسطة اختصار العدد 9.

وبالمنطق ذاته، ادعى، بأن ما يأتي ينبغي أن يكون صحيحا. اشرح معللا لماذا لا يصح هذا الادعاء.

$\frac{1}{3}=\frac{12}{23}$ اختصار العدد 2.

$\frac{1}{5}=\frac{15}{55}$ اختصار العدد 5.

$\frac{2}{1}=\frac{28}{81}$ اختصار العدد 8.

إدامة اهتمام الطالب
Maintaining Student Interest

ينبغي أن تديم عملية مساءلة الصف شد اهتمام الطالب طيلة فترة الدرس. وهناك بضعة نقاط بحاجة إلى أن تتضمنها هذه الفعالية باستمرار. فكل جهد مبذول ينبغي أن يعرض، قدر المستطاع، على معظم الطلبة خلال فترة الدرس، مع محاولة تجنب توفير فرصة التنبؤ بمن سيتوجه إليه بالسؤال. إن خلط عملية التعريج بالسؤال بين من يتطوعون للإجابة عنه، ومن لم يبد اهتماما بالمشاركة سيجعل كل طالب متيقظا باستمرار. كما أن ابتداء الفصل الدراسي بتوجيه الطلبة إلى ضرورة إعطاء إجابات كاملة للأسئلة المطروحة في الصف سيساعد في ضمان كون هذا النوع من التطبيق سوف يصبح أمراً مألوفا داخل الصف.

إن إطراء الطلبة (بذوق ولباقة) سيصبح عادة مألوفة وحسنة للإجابة الصحيحة عن سؤال ما. وتمتلك نفس الأهمية، بالنسبة للمعلم، كيفية سياسة ومعالجة الإجابات الخاطئة بطريقة مناسبة.

إن افضل معالجة للإجابة الخاطئة تعتمد على السمة المميزة للصف، والوقت المتوفر في الدرس. وبأي حال من الأحوال ينبغي على المعلم عدم معاملة الطالب بفظاظة ،أو اللجوء إلى التوبيخ بسبب الإجابة الخاطئة. لأن مثل هذا السلوك سيحمل أثارا سلبية معاكسة على تعلم الطالب، وسيثبط ويحبط الاستعداد لديه للاستجابة لأسئلة المعلم في المستقبل، وإذا أتيحت فرصة مناسبة في الدرس يمكن للمعلم أن يرشد الطلبة إلى إدراك ماهية الخطأ من خلال سلسلة أسئلة أعدت بعناية لهذا الأمر. وبالمقابل، يمكن للمعلم أن يختار إحالة السؤال إلى بقية الطلبة لكي يستدل الطالب على الإجابة الصحيحة من خلال محاولة بقية الطلبة بالإجابة عليه. كذلك يمكن أن تترك الفرصة للطلبة بالإجابة عن الأسئلة التي يطرحها زملاؤهم، وأن يبعد المعلم عن دائرة شعوره بأنه الشخص الوحيد المسؤول عن توفير الإجابة على أسئلة طلبته.

قد ينتج عن التفاعل المتكافئ بين الطالب الذي يطرح السؤال وزميله الذي يهرع بالإجابة عليه نتائج ممتعة. فعلى سبيل المثال، إن إجابة أحد الطلبة على سؤال يطرحه طالب آخر، سيجعل الطالب الثاني يتعلم المفاهيم التي تضمنها موضوع السؤال بصورة افضل.

يتيح التعليم، بصورة عامة، للمعلم فرصة كافية لفهم افضل بطبيعة التشعبات الدقيقة للمادة التي يقوم بتعليمها، وطبيعة التعقيد الذي تتصف به الموضوعات، ويصبح الأمر كذلك عندما يقوم أحد الطلبة بتوضيح وبيان مفهوم ما لرفيقه في الصف.

عندما نتوقع استجابة الطلبة للأسئلة المطروحة فيما بينهم، ستسود درجة عالية من اليقظة والحذر خلال فترة الدرس نتيجة لعدم توقع الطلبة، بدقة، متى سيعرج إليه بتصحيح ما ذهب إليه أحد زملائه من الطلبة أو إجابة سؤاله . وينبغي أن توسع دائرة اليقظة إلى مدى بعيد لكي يبقى الصف مفعما بالنشاط والحيوية.

بعض الاعتبارات الوقائية لتحسين المساءلة الصفية
Some Precautionary Considerations For Improving Classroom Questioning

تجنب التكرار Avoiding Repetition

بصورة عامة، ينبغي عدم تكرار سؤال المعلم، ويستثنى من هذا الأمر بعض الأسباب العارضة كعدم إمكانية سماع السؤال بوضوح، عندها تصبح عملية تكراره ضرورية.

ويمكن توفير خيار إضافي، لتجاوز عقبة عدم سماع السؤال بوضوح، وذلك عن طريق تكليف أحد طلبة الصف بتكرار السؤال المطروح.

إن اعتبار مبدأ تكرار الأسئلة يورث الصف خمولا، ويبعد طلبته عن اليقظة والانتباه، لأنهم سيعولون على تكرار السؤال. وقد يلجأ الطلاب إلى تعمد الدعوة بإعادة وتكرار السؤال لإضاعة وقت الدرس. بالمقابل، إذا أدرك الطلاب بأن عملية التكرار محفوفة بصعوبات جمة ولا يمكن نوالها بسهولة فإن هذا السلوك لن يستمر. وستكون ثمرة هذا الأمر سيادة مبدأ اليقظة في الصف، وغياب أي ضياع في وقت الدرس.

في بعض الأحيان، يلجأ المعلم إلى إعادة تكرار طرح سؤال على الصف، بعد إعادة صياغة مفرداته، وقبل أن تتوفر للطلبة فرصة كافية للاستجابة لذلك السؤال. إن أي شك من جانب المعلم بصدد وضوح عبارة السؤال سنجم عنه هذا النوع من التكرار في طرح السؤال. وبصورة عامة فإن المعلم هو الشخص الوحيد الذي يعد السؤال غير واضح!.

قد يكون الصف مهيأ للإجابة على السؤال الأول، بيد أن إعادة صياغة مفرداته من جديد قد تورث الطلبة إرباكا فتشوش أفكارهم.

إن على المعلم أن يتيح للسؤال الأصلي فرصة كافية للبقاء قائما لفترة كافية مع إعطاء فرصة كافية للطلبة للإجابة عليه، واختيار مبدأ إعادة صياغة مفرداته، فقط، في حالة عدم توقع وجود إجابة صحيحة - وشيكة للسؤال المطروح.

يمتلك الطلبة قدرة، غير مشكوك فيها، على تفسير سؤال المعلم بصورة صحيحة، بالرغم من عدم وضوحه، وفي مثل هذه الظروف ينبغي على المعلمين أن لا يكونوا نزاعين إلى الانتقاد بإفراط بصدد مضمون أسئلتهم المطروحة.

إن المساءلة المناسبة بعباراتها الواضحة والخالية من اللبس ستدرأ هذا الموقف برمته.

تجنب تكرار إجابات الطالب

Avoiding Repetition of Student Answer

ينبغي على المعلم عدم تكرار إجابات الطالب، لأسباب مماثلة لتلك التي نوقشت قبل قليل. وإذا اتكل الطلبة، وعولوا على المعلم في إعادة جل إجابات الطلبة المهمة على أسئلته، فإنهم، في آخر الأمر، لن يصغوا بأسماعهم إلى ما يقوله رفاق صفهم.

إن هذه الظاهرة ستؤدي إلى إحباط آلية التفاعل القائم خلال الدرس. وإذا كانت إجابة الطالب لا يمكن سماعها بوضوح، بحسب تقدير المعلم، آنذاك ينبغي عليه أن يكلف الطالب ذاته، أو أحد زملائه بإعادة الإجابة بصوت مسموع.

ان الالتزام بهذا الإجراء سيكون، بالتأكيد، سببا موجبا لتحدث الطلبة بصوت عال وبعبارات واضحة لتجنب الاضطرار بإعادة إجاباتهم (أو سماع الطلبة وهم يكررون إجاباتهم).

توجد لدى بعض المعلمين عادة "المعالجة العقلية Mentally processing " لإجابات الطلبة بصوت عال، مما ينجم عنه تكرار إضافي لإجابة الطالب. أن تنبيه معظم المعلمين إلى هذه العادة سيؤدي إلى تقليصها، أو بترها من دائرة سلوكهم اليومي.

إن تسجيل الدرس على شريط تسجيل سيساهم في بيان هذا الخلل في أداء المعلم. وأما بالنسبة للمعلم الذي لا يستطيع التغلب على هذا السلوك، وتجنب هذا النوع من التكرار، فينبغي عليه - على الأقل- أن يحاول دمج هذه الإعادة مع العبارة أو السؤال التالي. إن هذه الطريقة لن تبدو كتكرار بسيط لما قد تم قوله.

تنشأ ظاهرة تكرار المعلم لإجابات الطلبة، في أحيان أخرى، نتيجة للمخاوف التي تساوره، والتي مفادها، إنه إذا لم يستخدم المعلم عبارات ذات دلالة حقيقية فإن الطلبة لن يستطيعوا ملاحظتها بصورة صحيحة.

وتنشأ هذه الظاهرة، أيضا، عندما يسمح المعلم بحدوثها. إن المعلم هو الوحيد الذي يقرر النهج السائد للصف، والأعمال الروتينية، والأسلوب الذي يسوس به مساءلة الصف، وإجابات الطلبة التي ستنتج عنها.

مناداة الطلبة Calling On Students

إن إحدى الطرق التي تنشئ اهتماما مستمرا لدى الطالب، هي اعتماد مبدأ مناداة (أو دعوة) طالب محدد للإجابة بعد فترة وجيزة من طرح السؤال:

مثال **EXAMPLE**: لماذا تكون قطعة المستقيم $\overline{AB}$ عمودا منصفا لقطعة المستقيم $\overline{CD}$ (توقف قصير)، يا داؤود؟

إذا كان الصف متعودا على دعوة المعلم لطالب ما لغرض الإجابة على السؤال بعد طرحه مباشرة، فإن كل طالب من طلبة الصف سيكون منتبها في حالة دعوته للإجابة على السؤال المطروح.

من جانب آخر، إذا خاطب المعلم داؤود قبل طرح السؤال، سيكون داؤود الوحيد، بين أقرانه، في يقظته ومنح انتباهه للمعلم، لأن بقية طلبة الصف قد علموا بأن السؤال لم يطرح عليهم. إن هذا الموقف الأخير لن يعزز المشاركة الفاعلة بالعملية التعليمية. وعليه، فإن على المعلم أن يخاطب طلبة محددين في نهاية السؤال وبالتالي يضمن دوام انتباههم ويقظتهم جميعاً طيلة فترة الدرس.

قد يكون مفيدا، في بعض الأحيان، أن تكتشف من من طلبة الصف يحاول تجنب أن يدعى لإجابة السؤال المطروح. وهناك أوقات عندما يكون من الحكمة دعوتهم أو الالتقاء، ببساطة، مع هؤلاء الطلبة بعد انتهاء الدرس لمناقشة مسألة التجنب الجلية لديهم. إن السؤال المطروح هو "كيف يستطيع

المعلم اكتشاف هوية الطلبة الذين يحاولون تجنب دعوتهم بالإجابة على سؤال ما؟".

لقد أظهرت الخبرة أن المعلم بعد أن يطرح سؤالا على الطلبة ويتوقف زمنا قصيرا، لينظر على طلبته تمهيدا لاختيار الذي سيدعوه إلى إجابة السؤال، فإن الطالب الذي يبذل جهدا واعيا لتجنب اتصال نظره بنظر معلمه، هو الذي يقع تحت طائلة افتراض المعلم بأنه لا يرغب أن يدعى للإجابة على ذلك السؤال.

إن هذا التفادي المتعمد، يظهر جليا في بعض الأحيان، في تظاهر الطالب بأنه منشغل جدا، بحيث أن دعوة المعلم له ستتقاطع مع تركيزه المنصب على مادة المعلم.

يمكن للمعلم في بعض الأحيان أن يعيق هذا الأمر عن طريق توجيه عبارة عامة إلى الصف حول هذا النوع من التجنب والتفادي المتعمد، وبأن تنفيذ الأمر بصورة صحيحة سيؤدي بالطلبة إلى اكتشاف ظرافة هذا السؤال. (لأن كثيرا من الطلبة قد يكونون ملامين بهذا النوع من السلوك بين حين وآخر) وسيدركون ان مدرسهم يقظ جدا، وذكي، وأن مخادعته ليست بالأمر السهل. من ناحية أخرى، ينبغي على المعلم، فيما بعد، أن يراقب بعناية، وعن كثب أنواعا أخرى من التجنب، والتي تمتاز بكونها اكثر ذكاء، مثل التقنيات التي يستخدمها الطلبة لتجنب الأسئلة المطروحة (وبالخصوص عندما يشعرون بأنهم ليسوا قادرين على إجابة السؤال بصورة صحيحة).

انتظر – لوقت قصير بعد طرح السؤال
Wait - Time After Asking a Question

إن ترك وقت كاف للطلبة بالتفكير في السؤال الذي طرحه المعلم هو أحد الأمور المهمة بميدان مساءلة الصف.

تعد "ماري بود روي" Mary Bud Rawe إحدى الباحثات المتميزات والرائدات في ميدان سلوك المساءلة لدى المعلم. وقد كان للنتائج التي توصلت إليها عبر سني عملها البحثي تأثيرات عميقة على أداء المعلم في الصف المدرسي. فقد وجدت في تحليلها الشامل لموضوع إنجازات الصف، إن معظم المعلمين، عند المتوسط، يتوقعون إجابة الطلبة على أسئلتهم خلال فترة زمنية تقل عن ثانية واحدة، في حين ينتظر بعض المعلمين ما يقارب بمعدل الثلاث ثوان لكي يجيب الطلبة على أسئلتهم. وعندما قامت بمقارنة إجابات الطلبة في ضوء فترات انتظار مختلفة، وجدت أن فترة الانتظار الأطول (مدة ثلاث ثوان أو تزيد) تنتج إجابات تمتاز بتفكير اكثر عمقا، مع زيادة وتعميق مناقشة الصف، وتمكين الطلبة من تحليل الموقف بأسلوب نقدي، بالمقارنة مع تلك التي تقل فيها فترات انتظار المعلم بعد طرح السؤال على طلبته عن هذا البعد الزمني (ثلاث ثوان).

وقد وجدت الدكتورة روي، كذلك، إن المعلمين الذين ينتظرون بمعدل يزيد على ثلاث ثوان قبل طلب الإجابة على أسئلتهم المفروضة ينعمون بالنتائج الآتية:

- تزداد فترة إجابات الطلبة بمقدار 400٪-800٪.
- بالرغم من كون عدد المتطوعين للإجابة مقبولا، فإن هناك زيادة ملحوظة في الإجابات.
- تدني نسبة الإخفاق بالإجابة.
- تزداد ظاهرة الثقة بالنفس.
- يطرح الطلبة المزيد من الأسئلة الرصينة.
- تزداد مساهمة الطلبة الضعفاء والمترددين (تتراوح الزيادة بين 1.5٪ إلى أكثر من 37٪).
- ازدياد التفكير الخلاق في الإجابات، فتتنوع إجابات الطلبة وتتعدد.
- تقل مشاكل القصاص والعقاب.

إن إحدى التقانات الفعالة لتحديد فترة الانتظار التي تلي سؤالك المطروح على الصف تكمن في اعتماد مبدأ تسجيل أحداث الدرس على شريط تسجيل، ومن ثم يمكن تقدير الفترات الزمنية التي تلت كل سؤال من الأسئلة المطروحة في أثناء إعادة التشغيل. ثم حاول أن تزيد من البعد الزمني لفترة الانتظار (إذا كانت الفترة السابقة قصيرة جدا) وعاود تسجيل أحداث الدرس لتفحص الآثار الناجمة عن زيادة فترة الانتظار. إن مثل هذا التمرين كفيل بإعطاء نتائج افضل.

بعد نجاحك في زيادة البعد الزمني لفترة الانتظار التي تلي طرح أسئلتك الصفية، تستطيع محاولة التوقف برهة من الزمن بعد انتهاء الطالب من الإجابة، لإتاحة فرصة مناسبة له بالتفكير، أو تسمح له بإضافة المزيد من المعلومات لإجابته الابتدائية.

إن هذا النوع من وقت الانتظار يمتلك تأثيرات مشابهة لتلك التي تنتج عن النوع الأول من وقت الانتظار على البيئة التعليمية. وقد تم بيان هذا الأمر بوضوح من خلال تحليل أجرته الدكتورة روي على أكثر من 800 شريط تسجيل لدروس أعدت في مدارس بالمدن، والضواحي، والأرياف.

التنوع في المساءلة Variety In Questioning

قد يكون من أهم عناصر المساءلة الصفية الجيدة، كما هو الحال في جل جوانب التعليم الجيد هو التنوع. وينشأ التنوع

ويعزى إلى أنواع الأسئلة المطروحة، وأسلوب طرحها، وطريقة دعوة الطلبة (متطوعين أو غير متطوعين) للإجابة على الأسئلة، والطرائق الإجرائية التي تتم من خلالها الإجابات.

يقلل التنوع من إمكانية توقع ماهية السؤال الذي سيطرح في المساءلة الصفية، الأمر الذي يعزز دوام الانتباه والاهتمام بين الطلبة. وعندما يعمد المعلمين إلى تغيير الأسئلة المطروحة وتنويعها، يتوجب على الطلبة أن يكونوا أكثر تيقظا في أمور تتجاوز ببساطة محتوى السؤال. وسيكون هذا التيقظ الإضافي سيكون سببا لتحسين التعلم نتيجة إدامة أجواء متجددة داخل الصف. فضلا عن تزويد الطلبة بخبرة اكثر تشويقا، فإن المعلمين اكثر ميلا إلى أن يفعموا بالنشاط نتيجة لروح التحدي التي تبثها الحاجة إلى إبداع المزيد من التنوع في الأسئلة المطروحة على طلبة الصف.

عشرة أنواع من الأسئلة ينبغي تجنبها

Ten Types Of Questions To Avoid

في أي سياق من المساءلة، قد تطرح بضعة أسئلة ضعيفة دون أن تحدث ضررا، لكن عددا لا بأس به من الأسئلة الهزيلة سيؤدي بلا ريب إلى إضعاف الدرس وهشاشته.

ندرج أدناه عشرة أنواع من الأسئلة التي ينبغي أن يلتزم المعلم بتجنبها، لأنها قد تكون سببا في غياب الخصوبة التي نتأملها في تبني المساءلة الصفية.

سؤال متراكب Overlaid Question

يجد المعلمون، دوما، عند منتصف طرحهم السؤال على طلبة صفوفهم ان محتوى هذا السؤال ليس دقيقا بصورة كافية لكي يثير الإجابة التي يرومونها من طلبتهم. وبدلا من أن يدع السؤال الجديد ينطلق مستحوذا على ميزاته، ويعطي للطلبة فرصة للإجابة عنه، فإن المعلم قد يضيف على السؤال ويزيد فيه قبل أن تتوفر للطالب فرصة مناسبة للإجابة عن السؤال الأصلي .

عندما يحدث مثل هذا الأمر، فإن الطلبة الذين استوعبوا السؤال الأصلي وأدركوا المطلوب منه قد يترددون الآن في الإجابة لعدم ثقتهم بفهمهم للسؤال بكامله. لذا ، فإن توسعهم بالسؤال سيورثهم الشعور بعدم الوضوح، وأن المعلم قد يسبب إرباكا عند ما يطرق على أفكار إضافية.

مثال EXAMPLE: أي طريقة ينبغي أن نستخدمها لحل هذه المسألة والتي ستجعل إجابتنا ممتازة؟

إذا علم الطالب أي طريقة سوف يستخدم لحل العقبة القائمة في السؤال، فانه قد يحجم عن إجابته بسبب الشك في الجزء الثاني من السؤال، وبالخصوص، فيما إذا كانت طريقته ستثمر عن "حل ممتاز".

إن الطريقة المحسنة في طرح السؤال: "أي طريقة ينبغي أن نستخدمها لحل هذه المسألة (توقف قصير)، يا باربارة ؟" "هل إن هذه هي الطريقة الأكثر كفاءة لحل هذه المسألة (توقف قصير)، يا كارسيا ؟".

مثال EXAMPLE: أي من المثلثات متطابق مع الآخر ويقاسمه بزاوية مشتركة بينهما؟.

قد يكون الطلبة متأهبين لإجابة الجزء الأول من السؤال، لكنهم قد يترددون بعد سماعهم للجزء الثاني بسبب حاجتهم إلى المزيد من التفكير للتفتيش عن"الزاوية المشتركة"، وقد يرتبك بعض الطلبة بسبب السؤال وينفر عنه.

يمكن أن يطرح السؤال بالصيغة الآتية :"أي مثلثين يتشاركان بالزاوية المشتركة ويتطابقان (توقف قصير)، يا ميبل؟" تستطيع أن تختار طرح السؤال كسؤالين منفصلين، أيضا.

في كل من المثالين اللذين حوى كل منهما سؤالا متراكبا، ظهر بوضوح التعقيد والتوسيع الذي اجري على السؤال الأصلي. وإن هذا الأمر قد نجم عنه عكس التأثير المطلوب بالضبط!.

سؤال متعدد Multiple Question

ينشأ السؤال المتعدد عن طرح سؤالين مترابطين في سياق محدد، ودون السماح بإجابة الطالب ما لم تستكمل عملية طرح كل من شطري السؤال.

مثال EXAMPLE: أي من المثلثات ينبغي علينا البرهنة على تطابقها، وكيف ستساعدنا على برهنة أن قطعة المستقيم $\overline{AB}$ توازي قطعة المستقيم $\overline{CD}$؟.

على الرغم من أن الطالب قد يدرك أي المثلثات بحاجة إلى البرهنة على تطابقها، فانه قد لا يدرك كيف سيسهم المثلث المتطابق بمساعدته على برهنة $\overline{AB}//\overline{CD}$. إن هذا الطالب، بالتأكيد، لن يقدم بالإجابة على السؤال .

من ناحية ثانية ، فإن طرح السؤال على شكل قسمين، ستتيح الفرصة للإجابة على القسم الأول قبل طرح القسم الثاني، وبالتالي يتوقع إجابة المزيد من الطلبة.

يمكن إجراء ذلك كما يأتي "أي من المثلثات ينبغي أن تبرهن على تطابقها (توقف قصير)، هنري؟". "كيف ستمكننا هذه المثلثات المتطابقة على برهنة أن $\overline{AB}//\overline{CD}$ (توقف قصير)، ايفيلين؟".

إن هذا النوع من الأسئلة يشابه، إلى حد كبير، السؤال المتراكب في كونه يتألف من قسمين، بيد انه يختلف عنه بأن كلا من قسمي السؤال يمكن أن يكون مستقلا بذاته ولا يفتقر في الإجابة على أحدهما إلى القسم الآخر.

يلجأ المعلمون، في أحيان كثيرة، إلى الأسئلة المتعددة عندما يشعرون بأن الوقت الباقي من الدرس قد بات قصيرا، أو عندما يضيق صدرهم ويأملون انقضاء الدرس بسرعة أكبر. وكما كان سابقاً، فإنه يسهل على أن يثبط الطلبة من الإجابة على مثل هذا النوع من الأسئلة.

وللحصول على إجابة صحيحة، ينبغي أن يكون الطالب قادرا على الإجابة السليمة لكل من قسمي السؤال. وعليه فإن الطالب الذي يتمكن من إجابة قسم واحد فقط من السؤال بصورة صحيحة، لن يتطوع بالإجابة على السؤال برمته. أن تقليل حجم المساهمة المشتركة للطلبة الذين سيجيبون على الأسئلة المتعددة، سيجعل المعلم مسؤولا بصورة مباشرة عن نقصان التعلم الفعال خلال فترة الدرس.

مثال **EXAMPLE**: ما هي مميزات هذه المعادلة (الإشارة إلى معادلة تربيعية)، وما هي أنواع الجذور التي تمتلكها؟

إن هذا السؤال المتعدد يمكن أن يعامل كسؤالين منفصلين، بيد انه، على الأكثر، في صيغته الحالية لن يشجع الطلبة للإجابة عليه. ويمكن إبراز المعلومات نفسها من خلال السؤال الآتي: "ما هي مميزات هذه المعادلة (الإشارة إلى معادلة تربيعية) (توقف قصير)، يا أليس؟ "و بناء على قيمة هذه الميزة، ما هي أنواع الجذور التي تمتلكها هذه المعادلة (توقف قصير) يا جوردان؟".

عن طريق كبت إجابات الطالب، فإن الأسئلة المتعددة ستسهم في تقليل تأثير الدرس وفاعليته، لذا ينبغي تجنب هذه الظاهرة والابتعاد عنها.

أسئلة واقعية Factual Questions

لا يوجد، بالتأكيد، ثمة خطأ في طرح سؤال يملك جوابا واقعيا بسيطا إذا كان السؤال جزءا ناتجا عن نمو سلاسل من الحقائق المتعاقبة، والتي تمتلك أهمية خاصة لحل المسألة قيد الاعتبار.

من جانب آخر، فإن الأسئلة الواقعية لن تلعب دورا ملموسا في تحفيز التفكير لدى الطلبة.

مثال **Example**: ما هي مبرهنة فيثاغورث؟

لا تتطلب إجابة هذا السؤال بذل المزيد من الجهد الفكري، فالطالب إما أن يكون على معرفة أكيدة بالجواب، أو لا يمتلك ثمة جواب صحيح على هذه المسألة.

إذا كنا متفقين مع مقدمتنا المنطقية بخصوص مساءلة الصف، آنذاك وبعيدا عن كونها جزءا من سياق الأسئلة، فإن الأسئلة الواقعية لا تسهم إلا بجزء ضئيل في بيئة التعلم الفعال داخل الصف.

أسئلة موجزة Elliptical Question

لا تقدم الأسئلة غير الواضحة، بسبب ميل المعلم إلى إغفال تفصيل بعض مفرداتها، أية إضافة مفيدة للدرس. وبالرغم من كونها لا تحمل إضرارا مباشرة إلى الدرس، فإن السؤال الموجز (الحذفي) هو ببساطة إضاعة – غير ضرورية – للوقت.

مثال **EXAMPLE**: ماذا بصدد هاتين الزاويتين؟

كثيرا ما تكون لدى المعلمين عادة التفكير بصوت عال، فقد يبدأون بالنظر إلى زوج من الزوايا وهم يفكرون بماهية الأسئلة التي سيطرحونها حول هاتين الزاويتين، مثل"ما هي العلاقات القائمة بينهما" أو " ما هي الزاوية التي تمتاز بقياس أكبر؟".

في أية حالة من هذه الحالات، يستطيع المعلم، بدلا من ذلك، في البداية أن يعبر عن الفكرة: "ماذا بصدد هاتين الزاويتين؟"ان التعبير عن هذه الفكرة في سؤال لا يمتلك جوابا سيفضي إلى إضاعة وقت الصف بدون فائدة.

يمكن للمعلم أن يطرح سؤالا بصيغة "ما هي العلاقة بين هاتين الزاويتين (توقف قصير) يا جيل؟"، حيث يفترض وجود إجابة محددة له.

إذا أراد المعلم أن يقول شيئا (لكي يتجنب الركود المؤقت في الدرس) عندما كان يفكر بهاتين الزاويتين، يستطيع القول: "تأمل هاتين الزاويتين". إن هذا الأسلوب في طرح السؤال سيفيد في تحقيق الغاية المرجوة ولن يضيع وقت الدرس بالإجابات البارعة التي قد يطرحها الطالب مثل "ماذا بشأن هاتين الزاويتين !".

مثال **EXAMPLE**: ماذا بشأن هذين المستقيمين المتوازيين؟

شأن المثال السابق، فإن هذا السؤال الموجز يسأل إما عن لا شئ. أو اكثر مما يستطيع معظم الطلبة على تقديمه للإجابة عليه.

إن الأسئلة مهما كان نوعها، تصبح عرضة لإجابات وملاحظات بارعة يصعب التعامل معها نتيجة لإغفال التفاصيل. وقد يرغب المعلم بقول شئ ما مثل: "أي من الزوايا نستطيع البرهنة على تطابقها باستخدام هذين المستقيمين المتوازيين. (توقف قصير)، يا ليزا؟".

لا يحتاج المعلم إلى أن يبدي ردود فعل شديدة إزاء الهدوء، بل ينبغي عليه التوقف لإعطاء بعض الأفكار المتعلقة بالسؤال، بدلا من أن يسألها بصيغة لا تمتلك إجابة واضحة عليها.

أسئلة نعم / لا أو التخمين

Questions Yes/NO or Guessing

في معظم الأحيان فإن أسئلة نعم /لا ،أو التخمين لا تمتلك سوى قيمة ضئيلة، ويستثنى من ذلك، في بعض الأحيان، إمكانية أن تستثمر أسئلة نعم / لا عن طريق تحويلها إلى أسئلة فكرية جيدة.

مثال **EXAMPLE**: هل قطعة المستقيم $\overline{AB}$ عمودية على قطعة المستقيم $\overline{CD}$؟

ينال الطالب الذي يحاول الإجابة على هذا السؤال مجازفة بسيطة جداً، لأن فرصته بأن تكون إجابته للسؤال صائبة تزيد، بالحقيقة على 50٪.

فالمعلم يطرح السؤال بكثرة تفوق نشدانه للإجابة الصحيحة، كذلك فإن المخطط الذي يرتبط السؤال به، سيوفر، أيضا، دعما إضافيا لتلمس الإجابة الصحيحة، وعليه يصبح السؤال ذو صيغة بلاغية، ومنمقا إلى حد ما. ينبغي تغيير صيغة السؤال بحيث يصبح: "ما هي العلاقة القائمة بين قطعة المستقيم $\overline{AB}$ وقطعة المستقيم $\overline{CD}$ (توقف قصير)، يا هولي؟".

إن هذا الاستفسار سيحدو بالطالب إلى استكشاف العلاقات المحتملة التي يمكن وجودها بين قطعتي هذين المستقيمين، ثم سيعمد إلى اختيار العلاقة التي يشعر بأنها مناسبة لوصف ذلك.

إن السؤال ، بصيغته المعدلة، سيفيد في تنشيط التعلم الفعال بين طلبة الصف.

مثال **EXAMPLE**: هل المثلث ABC متساوي الساقين ؟

لماذا يطرح المعلم هذا السؤال ان كان المثلث بساقين غير متساويين؟. ما لم يقرر المعلم الاحتيال على الصف، فإن الطلبة سيكونون على صواب بأن المعلم يبحث عن إجابة بالإيجاب.

لماذا إذن يطرح السؤال؟ سيكون السؤال ذا نتيجة إيجابية، عندما يطرح كما يأتي "ما هو نوع المثلث ABC (توقف قصير) ايرني؟" فتكون هذه الصيغة المستحدثة محاولة ناجحة لتجنب المساءلة بـ نعم /لا أو بأسلوب حرز أو تخمين كلما كان ذلك الأمر ممكنا.

أسئلة غامضة Ambiguous Questions

قد يعمد المعلم، في بعض الأحيان، بالبحث عن إجابة تتطلب تفسيرا محددا لموقف ما . هنا يحاول السائل الحصول على الإجابة المطلوبة عبر سؤال واحد، مما يحدو به إلى طرح سؤال غامض، يفتقر إلى جملة من الإجابات المتباينة، وهي مع ذلك صحيحة .

قد يسهل الوصول إلى الإجابة المطلوبة عند طرح سلسلة من الأسئلة القصيرة – المتعاقبة.

مثال **EXAMPLE**: بماذا يختلف قانون جيوب الزوايا Sines عن قانون جيوب تمامها Cosines ؟

يمكن إعطاء اكثر من إجابة صحيحة لهذا السؤال . لا ريب بأن السياق البياني للسؤال المطروح سيساعد في تضييق الخيارات بين الإجابات الصحيحة.

سيميل الطلبة إلى النفور عن الإجابة على هذا السؤال بسبب الارتباك الذي ينجم عن الغموض الذي يلف السؤال. فقد يتساءل الطلبة فيما إذا كان السؤال يشير إلى الاختلاف في مظاهر الصياغة الرياضية لهذين القانونين، أو الاختلاف في ميادين التطبيقات، أو الاختلاف في الاشتقاق، وهكذا . . .

إن إحدى الصيغ المكنة لطرح هذا السؤال هي: "تحت أية ظروف، أو حالات مختلفة تستخدم قوانين جيوب الزوايا وجيوب تمامها (توقف قصير) ، يا جوان؟".

لأن مثل هذا الإرباك ينشب عنه انخفاض ملحوظ في خصوبة الدرس، ، بصورة جلية، ومن أجل هذا ينبغي تجنب الأسئلة الغامضة والمبهمة في دائرة مساءلة الصف.

مثال EXAMPLE: ما هي العلاقة القائمة بين مساحة الدائرة ومحيطها ؟

مرة ثانية، توجد اكثر من إجابة صحيحة لهذا السؤال. فهل إن السائل مهتم بالعلاقة العددية Numerical ،أو العلاقة الفيزيائية Physical، أو العلاقة المنسوبة إلى بعد من الأبعاد Dimensional، أو علاقة أخرى اقل جلاء؟

بالرغم من أن السياق البياني لطرح السؤال قد يساعد الطلبة في الإجابة على السؤال، فإن من النادر تجنب الارتباك عندما يطرح سؤال غامض أو مبهم. إن إحدى الطرق المميزة في طرح هذا السؤال هي: "ما هي النسبة العددية بين مساحة الدائرة ومحيطها (توقف قصير)، ياكارول ؟"

ملاحظة: ليس بالضرورة أن نصف عملية طرح الأسئلة التي تمتلك اكثر من جواب صحيح بأنها ميزة سيئة وغير مرغوب فيها. فنحن نعالج موضوع "السؤال الغامض أو المبهم" في هذا المقام، وليس النوع المذكور آنفا.

وقبل أن تطرح السؤال الذي يحتمل أن يكون غامضاً، حاول أن تحدد الصفات المميزة للوضع، بعدها اطرح سؤالا مختصرا، وسهلا لتحفيز الإجابة المطلوبة.

أسئلة يجاب عليها جماعيا بصوت واحد
Chorus Response Questions

بالرغم من كون السؤال الذي يتطلب إجابة الجميع بصوت واحد قد يمتاز ببعض الميزات الحسنة، فإن الإجابة الجماعية تزود الدرس، في معظم الأحيان، بقيمة ضئيلة. وعندما يجيب الصف، بأجمعه، بصوت واحد على سؤال ما، لا يستطيع المعلم ، وبصورة عامة، تحديد هوية الطلبة الذين لم يجيبوا أصلا على سؤاله.

فضلا عن أن الإجابة الجمعية قد تصبح، بالنسبة للطلبة الذين يتوقون إلى التعلم من جواب غيرهم، غير واضحة ولا يمكن سماع الجواب الصحيح بصورة سليمة.

إن فقدان الجواب على سؤال ما، قد يجعل الطالب يفتقد ارتباطا مهما في سلسلة التفكير، فينشأ عنه أذى كبير في عملية التعلم التي يختص بها دون غيره.

مثال EXAMPLE: ما هو نوع الشكل الرباعي ABCD، أيها الصف؟

إذا افترضنا بأنه ليس كل من في الصف على علم بالإجابة الصحيحة للسؤال، لذا فإن بعض الطلبة سيرفعون أصواتهم بالإجابة الصحيحة.

قد يتوقف أحد الطلبة عن الإجابة، وبدلا من ذلك، ينصت إلى الجواب الصحيح وقد تقع على مساحة إجابة خاطئة (لأنه قد تصدر إجابة خاطئة عن أحد زملائه القريبين منه)، وبعدها سيحاول أن يتعلم مفهوما أو فكرة و جديدة بواسطة عينة خاطئة من المعلومات . إن الوقت المستنفد في تصحيح هذا الخطأ سيكون بالطبع غير مرغوب فيه.

إن رجحان كفة أسئلة إجابة جميع الطلبة بصوت واحد سوف تسمح لبعض الطلبة بالمرور خلال الدروس دون تعلم مادة الموضوع المطروحة فعلا. في هذه الحالة لن يكون المعلم قادرا على تتبع العقبات الفردية التي يعاني منها الطالب غير المستفيد، لأن الوضع سيكون ضبابيا بالإجابة الجماعية.

هذا الأمر يعطي مبررات إضافية لتجنب أسئلة الإجابة الجماعية، قدر الإمكان . بيد أن الاستخدام العرضي لهذا النوع من الأسئلة قد يكون مقبولا إذا كانت الإجابة ليست حاسمة جدا في عملية التطوير ، أو كان من الضروري إشراك جميع طلبة الصف، وحتى عند قصد التنوع.

إن التغيير في الأسلوب، سيوفر تنوعا ملحوظا بالدرس، ويكون منهجا سليما.

إن سؤال الإجابة الجماعية ينبغي استخدامه بصورة محددة حتى في الحالات التي تفيد من هذه الغاية.

أسئلة مستلة بسرعة وفجأة Whiplash Questions

إن الأسئلة المستلة بسرعة وفجأة هي بصورة عامة، لم يتم التخطيط لها بواسطة المعلم، ولكنها تحدث عندما يقرر المعلم إعداد سؤال يبعد من خلاله عن منتصف الطريق.

مثال EXAMPLE: ميل المستقيم هو، ماذا ؟

علاوة على إحباط الطلبة وتثبيط عزمهم، بأي حال من الأحوال، فإن ضررا محددا ينشأ عن هذا النوع من الأسئلة. فمما لاشك فيه أن العيب الأكبر يعود إلى عقم السؤال وانعدام جدواه.

إن عدم توقع السؤال سيحذوا بالطلبة أن يكونوا غير متيقظين، فيصبح لزاما عليه، في البداية، إعادة ترتيب عبارات السؤال ومفرداته، عقليا، قبل حلول الإجابة عليه.

إن الكلمة المفتاحية Keyword التي يبتدئ بها سؤال ما

(مثل: لماذا، متى، ماذا، كيف) تحت الظروف الاعتيادية تضع الطالب في موقف وإعداد نفسي، يجعله جاهزا لتلقي السؤال. ثم معالجة محتوى عبارته.

إن السؤال المستل فجأة وبسرعة، لا يوفر قيمة كافية امام عملية التهيؤ المؤكدة آنفا، الأمر الذي ينجم عنه إضاعة الوقت، وفقدان الكثير من انتباه الطالب. وإن الطريقة المثلى لطرح هذا السؤال: "ما هو ميل المستقيم (توقف قصير، ياروبرت ؟".

مثال**EXAMPLE** : لدينا الآن قطعة المستقيم $\overline{AB}$ توازي قطعة المستقيم$\overline{CD}$ نتيجة لأية نظرية ؟

لاشك أن السؤال يمكن أن يكون اعمق تأثيرا في حالة وقوع الكلمة المفتاحية التي تثير بيانه إلى بداية عبارة السؤال، فتقرأ كما يأتي "أية نظرية تبرر الحقيقة التي تنص على أن قطعة المستقيم $\overline{AB}$ توازي قطعة المستقيم $\overline{CD}$ (توقف قصير)، يا اديث؟".

من خلال هذه الصيغة، يدرك الطلبة من الكلمة الأولى أن ثمة سؤالا يطرح عليه، أما الكلمة الثانية فتجعلهم يركزون على مجموعة من المبرهنات التي تعلموها سابقا، عندما يصيخون بأسماعهم إلى بقية السؤال.

بعد الانتهاء من طرح السؤال سيكون الطلبة على أهبة الاستعداد للإجابة عليه، ودون إضاعة الوقت في إعادة ترتيب مفرداته ذهنيا إن الصيغة الأخيرة للسؤال، تبدو بجلاء، اكثر فاعلية في صيغة الأسئلة المستلة بسرعة، ولن يحتاج المعلم إلى تحويل كل عبارة إلى سؤال من أجل إنشاء مشاركة فاعلة لدى طلبته. إن مثل هذه المحاولة لزيادة مشاركة الطلبة قد تؤدي ببساطة إلى نتائج معكوسة.

أسئلة موجهة Leading Questions

إن السؤال الموجه هو سؤال يشد الإجابة المطلوبة من الطالب. وبصورة عامة لا يؤدي هذا النوع من الأسئلة أية وظيفة معقولة.

مثال **EXAMPLE**: هل تستطيع القول بأن المثلث ABC متساوي الأضلاع ؟

يذهب معظم الطلبة إلى الإقرار بعدم الاتفاق مع المعلم الذي يطرح مثل هذا السؤال، وعليه فانه لن يثير المزيد من الاهتمام، لأن الطالب، على الأرجح، سيجيب، ببساطة، بالإيجاب.

مثال **EXAMPLE**: الرقم سبعة هو أحد عوامل الرقم 35، أليس كذلك؟

مرة ثانية. ليس ثمة حاجة إلى تحويل العبارة "الرقم 7 هو أحد عوامل الرقم 35" إلى صيغة سؤال. ولعل من الأفضل للمعلم إما أن يترك العبارة كما هي (دون تغيير)، أو يطرح سؤال بصيغة: "ما هي عوامل الرقم 35، (توقف قصير)، يا والتر؟"، أو "باي رقم ينبغي أن يضرب الرقم 7 للحصول على الرقم 35 (توقف قصير)، يالاري؟". إن هذين السؤالين يتطلبان بعض التفكير، من جانب الطالب، قبل الإجابة. فضلا عن استبدال الأسئلة التي تهدر الوقت دون جدوى، فانهما سيستحثان التعلم الفعال.

أسئلة تركز على المعلم
Teacher - Centered Questions

إن من الأمور المرغوب فيها جعل الطالب يعد المعلم جزءا لا يتجزأ عن الصف المدرسي. بالرغم من أن الطلبة على إدراك تام بالاختلاف القائم بين الدور الذي يتبوأه المعلم، وطبيعة الدور الذي يلعبه الطالب، فإن الجانب الأكثر فاعلية لدى المعلم يكمن في استخدامه أسلوب الجمع بصيغة الشخص الأول (مثل: نحن We، أو ضمير المتكلمين نا Us) كلما كان مناسبا، عند مخاطبته لطلبة الصف.

فعلى سبيل المثال، التحدث بصيغة "دعنا نبحث فيما يلي..." افضل من "لدي ما يلي..." لأنها تجعل طلبة الصف يحسون بأنهم جميعا جزء من فريق يعمل سوية على حل مسألة محددة. ولن يكونوا بحاجة إلى تفكير دائم بأنهم طلبة وأن المعلم يتميز عنهم. إن الاستخدام المستمر بصيغة الشخص الأول المفرد First Person Singular (أي صيغة أنا، أو ضمير المفرد المتكلم) قد ينشأ عنه حاجز غير مرئي بين المعلم وطلبة الصف، وهو ضرر محتمل التأثير على بيئة التعلم الفعال.

مثال **EXAMPLE** : اعطني حل المجموعة

$3x - 5 = 2,$

إن الطريقة المثلى لطرح المسألة هي "اعطنا حل المجموعة $3x - 5 = 2$ (توقف قصير)، يا الين ؟".

مثال **EXAMPLE**: ماذا ينبغي علي أن افعل لاحقا لحل هذه المسألة؟ ينبغي أن يطرح هذا السؤال بالصيغة الآتية "ماذا علينا أن نفعل لاحقا في حل هذه المسألة ؟ (توقف قصير)، يا جاك؟".

إن المثالين السابقين يظهران طبيعة ملاحظات المعلم الذي يريد (وان لم يكن بصورة واعية) أن يكون بمنأى عن طلبته، وهي ظاهرة لن تصل بالجميع إلى بيئة صفية مناسبة تعليميا.

مساءلة الصف وسيلة لتوليد تفكير راق
Classroom Room Questioning As A Means To Generate Higher - Order Thinking

يستخدم المعلم منهج المساءلة في الصف التفاعلي – المثالي لمساعدة الطلبة على الفهم، أما الطلبة فيوظفون هذا المنهج للحصول على مرشد يعاونهم في توضيح المسائل المبهمة أو الغامضة، وفض الارتباك والتشوش المفاهيمي. إن الأدلة التقليدية للمساءلة تعالج، على وجه الحصر، موضوع مساءلة المعلم. فتضع قواعداً وصيغاً مرشدة لما هو مقبول في دائرة هذا الموضوع، وما يرفض منه.

تمتلك هذه القواعد المرشدة أهمية بالغة هذه الأيام. من أجل هذا ينبغي إثارة جملة من الموضوعات بالاستناد إلى الفهم المعاصر لسيكولوجية الطالب. فعلى سبيل المثال، ليست جميع أشكال الغموض، غير مقبولة، لذا سنحاول استكشاف الطرق التي يمكن أن يوظف خلالها الغموض أو الإبهام، بين الفينة والأخرى. لمساعدة الطلبة في عملية اكتساب فهم أكثر عمقا بالمواد والموضوعات الشائعة.

إن بعض الأشكال الجديدة للأسئلة التقليدية، ستقلل، على الأرجح، مستوى القلق لدى الطلبة، ولن تؤثر على جودة التعلم بأي حال من الأحوال. إن جملة من التقانات المستحدثة تمتاز بقدرات متميزة من جانبها.

يثبت قبول الأفكار الجديدة ويوثق أصالة الطرائق القديمة، لأنها (الأفكار الجديدة) تبتنى على هيكل المعرفة الجديدة بالطلبة، وآليات عمل الدماغ، والمسارات التي توظف خلالها المهارات والفهم في دائرة الذاكرة – طويلة الأمد Long – Term Memory. كذلك فإنها تجعل من علم أصول التدريس Pedagogy فناً، وعلماً، مفعماً بالحياة.

فسر وعلل تفكيرك Explain Your Thinking

إن قيمة الأسئلة التي تمتحن بدقة التبرير العقلاني لإجابة الطالب باتت واضحة وليس ثمة خلاف حول أهميتها. إن من المرغوب فيه أن يكون لدى كل طالب تبرير واضح لكل إجابة من إجاباته، لأن سهولة الوصول إلى الأسس المنطقية ستساعد الطالب على إعادة إنشاء الإجابات الصحيحة، وخزن المعلومات الجديدة في الذاكرة – طويلة الأمد. ولسوء الحظ، فإن كثيرا من الناس، صغارا كانوا أم كبارا، يجدون أسئلة الصيغة "لماذا" مثيرة للرعب والمخاوف!.

نجح طالب بالإجابة على تحد لحساب 4- × 5- بالجواب +20، وقد سأل المعلم، "لماذا كان العدد الموجب 20 هو الجواب الصحيح؟" أصيب الطالب بالقلق فأجاب "إن القاعدة تقول عندما نقوم بضرب عددين يحملان نفس الإشارة، يجب أن تكون النتيجة موجبة أيضا". افترض ان هذا ما يريد سماعه المعلم من طالبه؟ وإذا كان كذلك، فإن المعلم يشجع أسلوب التعلم بالاستظهار ودون أي فهم. وإن لم يكن كذلك، فما سيقوله المعلم، الآن، لتصحيح إجابة الطالب الصحيحة، لكنها غير مقبولة؟.

إن تقانات علم أصول التدريس، وعلم النفس المتفوقة سوف تلزم بالتحدي لزوما منطقيا لكي "تفسر وتعلل تفكيرك".

وبالنسبة لإجابة الطالب التي لاحظناها في الفقرة السابقة، فإن المعلم يمكن أن يقول "هذا ليس تفكيرك الشخصي. حاول أن تفسر لماذا تعتقد أن حاصل ضرب رقمين سالبين ينبغي أن يكون موجبا؟".

إن الفائدة الثانية التي تنتج عن سؤال الطلبة بتفسير وتحليل تفكيرهم تعود إلى كون معظم الناس يجدون بأن حديثهم حول ما يفكرون به أقل تهديدا بكثير من محاولة تفسير بماذا يفكر الآخرون. أما الفائدة الثالثة لـ "تفسير تفكيرك" فتعود إلى كونها تؤشر إلى افضل مسار باتجاه الذاكرة – طويلة الأمد، وبالخصوص، إعادة إنشاء المعرفة الناتجة عن العمليات الفكرية الذاتية للطالب.

قارن وقابل Compare and Contrast

صدع أحد الأقسام السابقة بتحذير واضح إزاء الأسئلة الغامضة أو المبهمة، مثل "ما هي العلاقة القائمة بين مساحة الدائرة ومحيطها؟". لأن الطالب قد يصاب بالارتباك، كون هذا السؤال – كما ذكرنا سابقا – يمتلك أكثر من إجابة.

يمكن الاحتفاظ بقيمة السؤال والارتقاء بها باستخدام صيغة قارن وقابل التي تخلو من الغموض.

مثال EXAMPLE: قارن وقابل بين محيط الدائرة ومساحتها.

إن جميع استبصارات الطلبة يطلق عليها مندفعة إلى الأمام Forth. ويستطيع الطالب مقارنة محيط الدائرة بمساحتها عبر إيراد مبدأ أن قياساتهما جميعا ترتبط بالدائرة، وتتضمن العدد P، وتعتمد على نصف قطر الدائرة، وغيرها من الأمور ...

قد يستطيع الطالب أن يقيم مقابلة بين المحيط والمساحة بملاحظة إن المحيط هو مقياس لطول (القوس)، بينما المساحة مقياس لامتداد المكان، أو ملاحظة إن المساحة يمكن استنباطها من المحيط بواسطة توسيع الصيغة الخاصة بمساحة متعدد الأضلاع – المنتظم Regular Polygon $A=\frac{1}{2}\ a\ p$

حيث a العمود المقام من نقطة منتصف متعدد الأضلاع على أحد أضلاعه.(apothem)

p = المحيط .

أو ملاحظة انه بالنسبة للدائرة:

$$A=\frac{1}{2}\times r\times 2pr=pr^2$$

مثال **EXAMPLE**: قارن وقابل بين الطرق التي تفكر بها حول جمع الكسور وضربها.

إن من المناسب بالنسبة للطلبة إيراد الخوارزميات، ومناقشة الأسس المنطقية التي تكمن وراء هذه الخوارزميات. كما ينبغي إرشاد الطلبة إلى اعتبار مسألة إضافة وطرح أي صيغتين تتضمن وحدات (لأنه، وبعد كل شئ، فإن المقام هو وحدة). إن الطالب الذي يستطيع، بنفاذ بصيرته، مقارنة، ومقابلة الأسس المنطقية التي تكمن وراء إضافة 5 أرطال إلى 4 أقدام. وضرب 5 أرطال بـ 4 أقدام، وإضافة 5 بوصات إلى 4 أقدام. وضرب 5 بوصات بـ 4 أقدام، هو بحق على المسار الصحيح باتجاه فهم كل من الرياضيات والعلوم بعمق وتكامل افضل.

برهن أو ادحض Prove or Disprove

إنه من المفيد للطلبة، التعرض إلى بنية البرهنة أو الدحض، مبكرا، عند تعريفهم بموضوعات البرهان. ويخبرهم التوجه صوب البرهان بأن القضية المطروحة تصح بصورة عامة. ولكي يكونوا ماهرين بالبرهنة، فإن على الطلبة أن يدركوا بأن جل القضايا، أو العبارات التي يقومون بصياغتها، بأنفسهم، لن تكون قابلة للبرهان. إن بنية البرهنة، أو الدحض تسهم في تشجيع الطلبة على محاولة إيجاد مثال مضاد Counter Example لتوكيد مجهول قبل محاولة إيجاد البرهان.

مثال **EXAMPLE**: برهن أو ادحض أن أي شكل رباعي الأضلاع بقطرين، متعامدين، ومتساويين هو مربع.

إن مخططا بسيطا بطائرة ورقية سوف ينفع بوصفه دحضا مناسبا للقضية.

مثال **EXAMPLE**: برهن أو ادحض بأن الكسور يمكن إضافتها، دائما، بإضافة البسوط Numerators والمقامات Denominators.

إن الدحض المتاح لكل طالب هو:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$$

لأن المجموع هو 1، بينما $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

مادامت كثير من فقرات "برهن أو ادحض" التي تعترض الطالب لا تلبث أن ينتهي بها الأمر لتكون براهين، بينما ينتهي الأمر بواحد من كل ثلاثة منها ليكون دحضا، فإن الطالب سوف يتعلم كيف يفكر في الحدسيات بالطريقة التي يعدها كثير من الرياضيين مشكوك بأمرها!.

تعليم الطلبة على طرح الأسئلة
Teaching Students To Pose Questions

يتذكر الناس أسئلتهم الشخصية، بسهولة أكبر، من تذكر الأسئلة التي يطرحها الآخرون. فضلا عن ذلك، فإن عملية صياغة سؤالك الشخصي تساعدك على إيضاح مصادر الحيرة والارتباك.

تستغرق مسائل الطلبة الشخصية وقتا قصيرا جدا في مساعدتهم على تحسين مهاراتهم، و ببساطة، لن يتعلم الطلبة كيفية طرح أسئلة جيدة عن طريق سماعهم لمدرس يطرح أسئلة من هذا النوع. ولكنهم سيتعلمون كيفية طرح أسئلة جيدة بواسطة صياغتهم لأسئلة جيدة على ارض الواقع.

قالب سؤال **Question Template**: إن إحدى الطرق التي تعمل بنجاح، هي تلك التي تزود الطلبة بقالب للأسئلة، وتتيح المناقشة اليومية لقيمة كل سؤال عندما يعمد المعلم إلى نمذجة الأسئلة داخل غرفة الدرس. وقد يطلب من الطلبة كتابة سؤال والإجابة عليه بالاستناد إلى عمل اليوم، وبجعله جزءا من واجبهم البيتي. ويمكن استدعاؤهم، في اليوم التالي، لغرض طرح أسئلتهم، والتعريج بها على رفاق الصف.

يمكن استخدام لوحة إعلانات لعرض افضل سؤال لطالب خلال الأسبوع . و ينبغي أن يتضمن كل اختبار سؤالا متميزا أعده أحد الطلبة خلال الأسبوع الماضي.

توفر القائمة الآتية نقطة بداية لقالب سؤال الطالب، ويمكن استنساخها على ورقة مستقلة، وتوزيعها على جميع الطلبة لكي تدرج بوصفها ورقة أولى في دفاتر ملاحظاتهم الشخصية.

ينبغي أن توفر، أيضا، على حواسيبهم الشخصية، بحيث

يتاح لهم تأشير، وقص، ولصق السؤال الذي ينوون استخدامه.

ما هي (أو ما يعد في) اوجه التشابه بين __________ و __________؟

ما هي (أو ما يعد في) الفروق بين __________ و __________؟

أعط مثالا لـ (شئ ما) يكون __________ لكن غير __________.

تحت أية ظروف يسمح لنا بـ __________.

لماذا يكون من الصعب جدا أن __________ أكثر من __________.

ما هي الصلة بين (موضوع تم تعلمه سابقا) و (مهارة جديدة، أو إجراء، أو مفهوم)؟.

متى ينبغي علي استخدام (مهارة جديدة، إجراء، أو مفهوم) بدلا من (مهارة قديمة، إجراء، أو مفهوم)؟.

إذا (أي ظرف أو عدد في مسألة ما) تم تغييره إلى __________، كيف ستتغير الطريقة التي نستخدمها؟

اختبر التخمين __________ في الحالة القصوى حيث __________.

كيف سأقرر أي من الأشكال التالية هو الأفضل للاعتبار بصدد (مسألة، أو تخمين، أو بيانات) __________؟

كيف سأكون على معرفة __________ بدلا من __________ في هذه النقطة (مسألة، أو برهان، أو مناظرة)؟

كيف سأقرر ماذا سأفعله أولا عند محاولة (حل،أو برهن) __________؟.

أمثلة Examples

كيف سأكون على معرفة بوضع معادلة تربيعية تساوي صفرا بدلا من تجميع كل المتغيرات في أحد جانبي علامة المساواة، وجميع الثوابت في الجانب الآخر (كما فعلت مع المعادلات الخطية)؟

- ماذا يؤخذ به في الفروق بالقواعد عند جمع الأعداد ذات الإشارة، وعند ضربها؟.
- كيف سأقرر ماذا سأفعل أولا عند محاولة البرهنة بأنه في حالة تساوي أطوال منصفي أضلاع مثلث، فإن المثلث متساوي الساقين.
- تحت أية ظروف سيسمح لنا باختصار الكميات المتشابهة في مقام أو بسط كسر ما؟

إن صياغة بعض هذه الأسئلة ستكون خطوة أساسية لفهم رصين للمفاهيم الرياضية الرئيسة.

صندوق السؤال The Question Box

إن إحدى الطرق التي تساعد الطلبة على متابعة أسئلتهم الشخصية، في ظل تحسين قدراتهم على صياغة الأسئلة وتنظيم عملية التفكير لديهم، تكمن في تشجيعهم على الاحتفاظ بصندوق السؤال. سيحتفظون، كذلك، بصندوق بطاقة الفهرس Index Card، في البيت، والتي يستخدمونها في إعداد ملف الأسئلة اليومية – الشخصية حول المدرسة والتعلم.

سيراجع الطلبة، كل اجازة نهاية أسبوع، الأسئلة التي تم إدراجها خلال تلك الفترة، والكتابة على ظهر بطاقة الفهرس أي جواب باستطاعتهم إضافته الآن. كذلك ستتوفر أمامهم فرصة شحذ الأسئلة التي لم تحظ بإجابة، أو تفريق هذه الأسئلة إلى مجاميع أكثر بساطة.

إن أي إلغاء في عملية التفريق، التي تمارس على صندوق السؤال للإجابة على أسئلة قديمة، يمكن الآن توجيهها – بنجاح – مع رفع بطاقات الفهرس التي تضم الأسئلة المجاب عليها، والتي باتوا على إدراك تام بمحتواها.

بمرور السنوات، سيصبح صندوق السؤال موردا هاما وأداة استعراض يمكن توظيفها بميدان مشاريع البحوث. يساعد صندوق السؤال الطلبة على تعزيز التعلم، والتفكير حول ماذا يحتاجون معرفته، وماذا يحتاجون استعراضه، ولتطوير ميادين التحري والبحث المستقبلي. كذلك فإن هذا الصندوق يساعد الطلبة – الأصغر سنا – على أن يستشعروا المسؤولية إزاء تعليمهم الذاتي.

خلاصة Summary

تذكر، عند طرح سؤال على الصف، " أن تنصت إلى سؤالك" بأذن صاغية ناقدة، فقد تكون أحد افضل النقاد لذاتك. وينبغي أن يكون التحليل الذاتي – الحذر واليقظ هدفا شاخصا أمامك، وستكون عملية تسجيل شريط فيديو ذات فائدة كبيرة.

إن التقييم – الذاتي المستمر لأدائك التعليمي سوف يثمر عن نتائج مشجعة.

تمارين Exercises

1. شر إلى الجيد من الأسئلة الصفية الآتية والى غير الجيد منها مع ذكر السبب:

أ. ما هي مجموعة الحل للمعادلة 3x-5=8، وكيف يمكنها أن تساعدنا على حل المسألة (نوقشت في مرحلة مبكرة مع الصف)، يا ليزا؟.

ب. "ماذا حول هذه المجموعة من الأعداد (توقف قصير)، يا دانيال؟".

ج. "لماذا كان المثلث ΔABC متساوي الساقين، يا دافيد؟".

د. "يا يولندا، هل تستطيعين القول بأن هذين المثلثين متطابقان؟".

هـ. "أيها الطلبة، هل أن هذا المنحنى هو قطع مكافئ؟".

و. "ما هي طبيعة المميز في هذه المعادلة؟".

ز. "ما هي خطوتي التالية على طريق حل هذه المسألة؟".

ح. "ما هو المضاعف المشترك الأكبر لهذين العددين، وكيف تستطيع التأكد من عدم وجود مضاعف مشترك أكبر منه، يا جوشوا؟".

ط. "كيف نستطيع تغيير المعادلة $\frac{2}{3}+\frac{5x}{7}=2$ إلى معادلة أخرى بدون كسور، يا هنري؟".

ي. " في أي ظروف ستكون جذور هذه المعادلة (التأشير على السبورة) خيالية، وكيف سيساعدنا هذا الأمر على حل مسألتنا، يا ايفلين؟".

ك. "من يستطيع إخباري ما هو حل هذه المسالة (مشيرا إلى السبورة)؟".

ل. "ما هو أطول ضلع في هذا المثلث (مشيرا إلى الجهة اليمنى من المثلث $ABC\Delta$)، أيها الصف؟".

م. " بماذا يختلف حل المعادلة الخطية عن حل معادلة تربيعية، يا كريستا؟".

ن. " هل يصح تقسيم كل من طرفي هذه المعادلة (على السبورة) على العدد 5 (توقف قصير)، يا سو؟".

س. " ما هو الجذر التربيعي للعدد 196، أيها الصف؟".

ع. " إذا قمنا بتطبيق مبرهنة فيثاغورث على هذا المثلث، سنجد بأن المستقيم AB يساوي ماذا، يا اليس؟".

ق. " لماذا يوجد حل واحد مقبول لهذه المسألة، يا فريد؟".

2. اعد صياغة سؤال تمرين (1) والذي يعد سؤالا صفيا غير جيد.

3. وضح لما يبدو بأن المناسب استدعاء الطالب بعد طرح السؤال بدلا من فعل ذلك قبل طرح السؤال؟.

4. كيف ستتجاوب مع إجابات الطلبة التالية لسؤالك المطروح؟.

أ. "لم احسن سماع السؤال".

ب. " كنت متغيبا يوم أمس".

ج. " لا أدري".

د. صمت.

5. اختر موضوعا مختصرا من المنهج الدراسي لرياضيات المدارس الثانوية . ثم اعد سلسلة من الأسئلة التي قد تستخدمها في تطوير هذا الموضوع (خلال "الاكتشاف الموجه") مع صفك المدرسي.

استراتيجيات لتعليم دروس أكثر تأثيرا
Strategies for Teaching More Effective Lessons

يتوفر لدى المعلمين الجيدين مدى واسع من استراتيجيات التعليم المحددة، وخصوصا بموضوع الدروس الحيوية. أن تحديد افضل الاستراتيجيات المطلوبة لدروسك المدرسية تحتل مكانة مهمة بدورك الخلاق في الصف المدرسي .

إن معظم الاستراتيجيات التي ستوضح خلال الصفحات القادمة سوف يتم العمل خلالها مع أمثلة أخرى غير التي تم وضعها، يضاف إلى ذلك، إن التخطيطات والأشكال المذكورة لن تؤلف مجموعة كاملة لكل هذه الأمثلة أو الاستراتيجيات، لسبب بسيط يرتكز إلى صيغة عدم إمكانية حصر عدد الاستراتيجيات التي يلجأ توظيفها المعلم المبدع داخل الصف.

استخدام المخططات الشجرية أو المتفرعات
Using Tree Diagrams Or Branching

تمتاز كل المخططات الشجرية، أو المتفرعات بأهميتها البالغة عندما يواجه الطالب جملة من الخيارات والبدائل. حيث توفر هذه الأشكال مناخا مناسبا لنفاذ البصيرة في لب المنظور الكلي للمسألة قيد الدرس وقد تعرض توجها، كما هو الحال في القرارات التي ينبغي أن تؤخذ بنظر الاعتبار في حلول هذه المسائل.

إن هذه الاستراتيجية يمكن أن تنشأ فعليا بأي فرع من فروع الرياضيات، ومع ذلك، فليس من الضروري أن تصلح لكل موضوع من الموضوعات إن الأشكال التوضيحية المعروضة، في هذا المقام، تعرض موضوعات في الجبر، والاحتمالات، والتباديل، ونظرية المجموعات، والهندسة.

مثال EXAMPLE (1) (الجبر): تحليل العدد الصحيح إلى عوامل

أ. ابدأ الدرس بتعريف وتوضيح التعاريف الثلاثة الآتية:

1. إن عامل أي عدد من الأعداد يتألف من عددين أو أكثر ويكون حاصل ضربها مساويا للعدد الأصلي، ونظرا لكون حاصل ضرب الأعداد 2، 3، و 4 هو 24، ينتج إن الأعداد 2، 3، 4 هي عوامل لعدد 24، بمعنى آخر:

$$24 = 2 \times 3 \times 4$$

اطلب من الطلبة كتابة العدد 15 بوصفه حاصل ضرب عاملين، سيجيبون، بدون شك، كما يأتي

$$15 = 3 \times 5$$

وقد يجيب بعضهم كما يأتي:

$$15 = 1 \times 15$$

ولكن عليك الإشارة إن العدد "1" هو حالة خاصة لأننا نستطيع كتابة أي حاصل ضرب يتألف من صف متكامل من رقم 1 بوصفها عوامل، بيد أن مثل هذا العمل لن يكون ذا معنى.

2. العدد الأولي Prime Number هو ذلك العدد الذي تتألف عوامله من العدد 1 والعدد نفسه. وعليه فإن العوامل الوحيدة للعدد 7 هي 1، 7، لذا فإن العدد

$$7 = 1 \times 7$$

ونود الإشارة إلى انه بالرغم من صحة العلاقة

$$15 = 1 \times 15$$

فإن العدد 15 ليس العامل الوحيد (لوجود أكثر من عامل يتضمنه) لذا لا يمكن اعتباره عددا أوليا، بينما يظهر بوضوح إن العدد 7 ينطبق عليه هذا التعريف بدقة.

3. العدد الذي لا يقع في دائرة الأعداد الأولية يطلق عليه العدد المركب Composite.

ب. اشر إلى إن العدد 2 يعد اصغر عدد أولي.

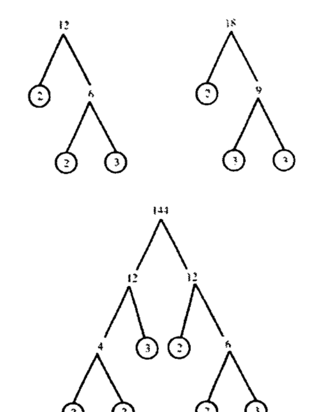
اطلب من طلبة الصف إدراج جميع الأعداد من 2 إلى 50 مع وضع دائرة حول الأعداد الأولية.

الجواب: الأعداد المحاطة بالدوائر ستشمل: 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41، 43، 47.

أما بقية الأعداد فهي أعداد مركبة.

ج. والآن، اذكر للصف بأن من المرغوب فيه، في بعض الأحيان، إيجاد "العوامل الأولية"، فقط، للعدد. على سبيل المثال، عندما تريد احتساب المقام المشترك الأصغر Least common denominator لبضعة كسور فإن إحدى الاستراتيجيات المتاحة أمامك لإيجاد العوامل الأولية ستكون باستخدام طريقة "المتفرعات" المدرجة في أدناه. وحيثما ظهر أمامك عدد أولي في نهاية الفرع، قم بوضع دائرة حوله.

ينبغي أن نعرض للطلبة، في هذا الوقت، كيفية استخدام طريقة المتفرعات لوصف الأعداد 12، 18، و 144 بوصفها حاصل ضرب عواملها الأولية:



وهاهي الإجابات الصحيحة:

$18=2\times3\times3$	$12=2\times2\times3$
أو	أو
$18=2\times3^2$	$12=2^2\times3$

$144=2\times2\times2\times2\times3\times3$

أو

$144=2^4\times3^2$

لأغراض التطبيق والتدريب، اطلب من الطلبة استخدام طريقة المتفرعات لوصف الأعداد الآتية كحاصل ضرب عواملها الأولية:

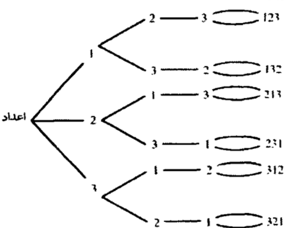
48; 36; 108; 72; 400; 125; 1024; 1215.

مثال EXAMPLE: (2) (الاحتمالات): التباديل

عرف التباديل من مجموعة الأشياء Objects بوصفها نسقا مرتبا من جميع أو بعض الأشياء.

اسأل الطلبة: ما عدد الأعداد ثلاثية المراتب Three digits والتي نستطيع أن نؤلفها بواسطة ثلاثة أقراص تم تأشيرها بالأرقام 1، 2، 3 على التوالي؟.

بعد أن يدرج الطلبة إجاباتهم على السبورة، بطريقة عشوائية، اعرض لهم كيفية "تنظيم" انساق الأعداد بواسطة المخطط الشجري الآتي:



إن المعادلة $3\times2\times1= 6$ تقترح قاعدة لإيجاد عدد التباديل دون الحاجة إلى رسم الشجرة.

استخدم شكلا توضيحيا جديدا لبيان وجود 24 تبديلة ($4\times3\times2\times1$) أو نسقا لحروف الكلمة five.

لأغراض التدريب، اطلب من الطلبة أعداد نسق شجري لتوضيح التباديل الممكنة لخمسة أو ستة أشياء. لاحظ إن الأعداد ستصبح كبيرة، لذا اعمد إلى تقديم رمز المضروب Factorial Notation:

$$n!=(1\times2\times3\times4\times5\times \dots \times n - 1) \times n$$

استخدام أسلوب طي الورقة أو قصها
Using Paper Folding Or Cutting

إن أسلوب طي الورقة أو قصها هو أحد الاستراتيجيات التي تستخدم، في أحوال كثيرة، في المدارس المتوسطة – والثانوية Middle and Junior High Schools. توظف هذه الطريقة لبيان المفاهيم والنظريات التي تتطلب إلى مستوى عال من النضج والإدراك الرياضي يزيد على ما يتوقع أن يحققه طلبة بالسن نفسه.

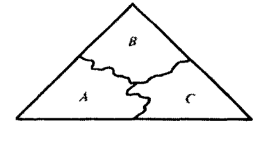
ومع ذلك، فإن المعلم البارع سوف يكون متيقظا لأي موقف في أي مرحلة من مراحل المدرسة، عندما تبرز أهمية قطع الورق أو طيها بوصفها وسيلة ملائمة لـ: إلقاء الضوء، والتوضيح، والتحفيز.

إن الأشكال التوضيحية الآتية تعرض هذه النقاط بوضوح.

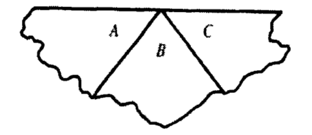
مثال EXAMPLE 1: (هندسة)

اثبت مستعينا بوسائل توضيحية النظرية القائلة "مجموع قياسات زوايا المثلث هي 180°".

1. اقطع ورقة كرتون Cardboard على شكل المثلث ABC.



2. اقطع الزوايا الثلاثة واعد ترتيبهم على خط مستقيم:



3. ذكر الطلبة بأن مجموع قياسات الزوايا على خط مستقيم هي 180°، لأن الزاوية المستقيمة Straight Angle تنشأ بواسطة الخط المستقيم. وبذلك يستكمل العرض التوضيحي.

مثال EXAMPLE 2: (هندسة)

برهن النظرية القائلة "إذا تطابق ضلعا مثلث، فإن الزوايا المقابلة لهذين الضلعين تكون متطابقة" (تعرف أيضا بـ"زوايا قاعدة المثلث المتساوي الساقين متطابقة").

بصورة عامة هذا هو الدرس الأول الذي يطلب فيه من الطلبة كتابة برهان صوري من عبارة لفظية.

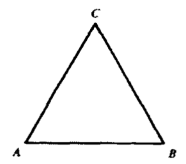
ابدأ باستعراض صيغة إذا – فإن (If- Then) المستخدمة في القضايا، مع العبارة التي تلي لفظة "فإن" والتي يطلق عليها اصطلاح "الاستنتاج أو الحكم Conclusion".

وعليه، فإن الفرضية Hypothesis السائدة في هذا المثال هي "ضلعا مثلث متطابقان" وأن الاستنتاج هو "الزوايا المقابلة لهذين الضلعين متطابقة"

ارسم مخططا ثم ثبت رموزه، ثم ضع قائمة "بالمعطيات"، وأخرى بالمطلوب إثباته استنادا إلى الرموز المستخدمة في المخطط (انظر المخطط التوضيحي).

المعطيات: $\triangle ABC$

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

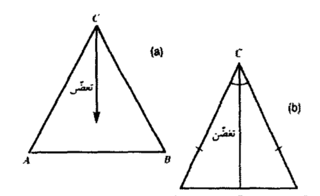


اثبت أن: $\angle A \cong \angle B$

حاول توجيه الطلبة باتجاه الحاجة إلى استخدام مستقيم مساعد في عملية إنشاء البرهان الصوري، وكما يأتي:

1 اقطع مثلثاً متساوي الساقين.

2 امسك الضلعين المتطابقين (معاً) ثم اعمد إلى طيهما مع إبقاء جزء من الثني Crease إلى اسفل، ومبتدئا برأس المثلث – (انظر الشكل a). (لاحظ أن الثني هو في الواقع منصف زاوية راس المثلث).



3. ابسط الثني (منصف الزاوية) حتى يصل إلى الضلع المقابل، فينشأ عنه مثلثان (شكل b).

4. برهن إن المثلثين متطابقان بواسطة SAS[1]، كما موضح بالشكل (b).

5. إن زاويتي القاعدة متطابقان الآن، وهو المطلوب إثباته.

الصورة تكافئ ألف كلمة

A Picture is Worth A Thousand Words

في الأعم الأغلب، فإن هذه الاستراتيجية مقبولة بغير استثناء لدى جميع الرياضيين وبجميع مستويات الإنجاز والتعقيد، لأن الصورة تساهم في توجيه تفكير الطلبة عبر توظيف البصيرة صوب حلول المسائل، وكذلك صوب تعميم هذه المسائل.

عرضت هذه الآراء هنا على مستوى بسيط مع أشكال توضيحية تم انتخابها من مجموعة مسائل في: الجبر، والاحتمالات، ومخططات فين Venn Diagrams.

وان القيمة التي تمتلكها الصورة، أو المخططات في ميدان الهندسة باتت معروفة لدى جميع ولا غبار عليها. وقد أتاح التوسع في عمق منظور الصور من ثنائية إلى ثلاثية الأبعاد فرصة كافية للرياضيين في التجرؤ بالتفكير بدلالة أبعاد ذوات مرتبة عالية.

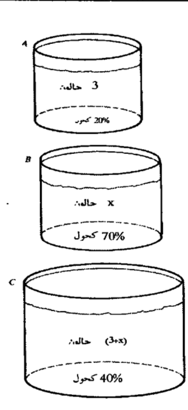
مثال EXAMPLE 1

ستتم عملية تحسين خواص 3 جالونات من خليط الكحول المائي بتركيز ٪20 عبر إضافته إلى كمية محددة من المحلول نفسه وبتركيز مقداره ٪70.

كم عدد الجالونات المطلوب إضافتها من محلول الكحول المائي بتركيز ٪70 لغرض الحصول على المحلول الجديد، والذي سيصبح تركيزه ٪40؟

---

(1) تعني (ضلع - زاوية - ضلع) - المترجم.



الحل SOLUTION

إن تصوير الأوعية التي ستحوي الخليط سيلعب دورا حاسما وسيقرب المسألة إلى الأذهان. ابدأ برسم الأوعية الثلاثة، وسيمكن الآن تحديد كمية مادة الكحول في كل من هذه الأوعية بسهولة ويسر:

A: (0.20)(3) B: (0.70)(x) C: (0.40)(3+x)

وبالطريقة نفسها، ستكون كمية الماء في كل منها:

A: (0.80)(3) B: (0.30)(x) C: (0.60)(3+x)

نظرا لأن كمية الكحول الموجودة في الوعاء C تساوي مجموع كميات الكحول في كل من الوعاء A، والوعاء B، فإنه يمكن الحصول على معادلة الكحول النقي، كما يلي:

$$(0.20)(3)+(0.70)(x)=(0.40)(3+x)$$

كذلك، بما أن كمية الماء في الوعاء C تساوي مجموع كميات الماء في الوعائين A,B، يمكننا الحصول على معادلة الماء النقي، كما يأتي: $(0.80)(3)+(0.30)(x)=(0.60)(3+x)$

وسنحصل من كلا المعادلتين على قيمة المتغير $x = 2$.

مثال EXAMPLE 2: (الجبر) التصور Visualization

بالرغم من كون المسألة التالية ليست تمرينا نموذجيا حول الاحتمالات، فإن حلها يتضمن مبدأ تصوريا قابلا للتطبيق في بضعة ميادين بالرياضيات، مثل هندسة الإحداثيات، (التحليلية) والإحصاء، والطوبولوجيا Topology، والمنطق، ونظرية الأعداد، فضلا عن الاحتمالات:

تمت عملية دحرجة زوج من زهر الطاولة Dice (أحدهما احمر اللون والآخر اخضر اللون)، فما هي احتمال الحصول على فرق بين الأعداد الظاهرية بحيث تقل عن (1) أو تساوي (1)؟

يظهر الشكل الآتي المجموعة الشاملة لستة وثلاثين احتمالا. إن النقطة التي قيمة إحداثياتها (4 ،5) تقابل النتيجة: الزهر الأحمر يظهر الرقم 5، بينما يظهر الزهر الأخضر الرقم 4.

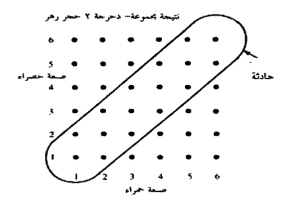
إن النتيجة المفضلة قد تم تحديدها بالموقع المحدد والذي يتألف بمجموعة من 16 حدث.

نظرا لأن جميع النتائج الـ 36 محتملة على حد سواء، فإن كلا منها أعطى احتمالية ($\frac{1}{36}$). وبما إن الحدث يمتلك 16 نتيجة، لذا فإن احتماليته ستكون (1/36) 16، أو (9 / 4).

ولهذه المسألة يمكننا أن نستخدم القاعدة الآتية:

$$\frac{\text{عدد النتائج المفضلة}}{\text{العدد الكلي للنتائج المحتملة}} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

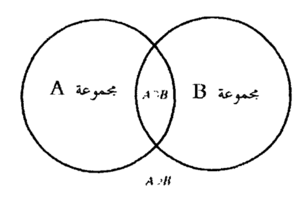
نظرا لأن جميع النتائج محتملة على حد سواء.

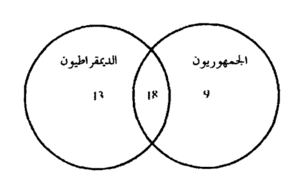


مثال EXAMPLE 3: (الجبر) مخططات فين Venn Diagrams

يمكن حل أنواع محددة من المسائل التي تتضمن مجموعات من العناصر تحليلات منطقية، بصورة افضل، وذلك باستخدام مخططات فين، والتي تتألف ببساطة من مجموعة من الدوائر المتراكبة. إن مجموعة التقاطع Intersection Set هي اصغر مجموعة من جميع العناصر المشتركة، أما مجموعة الاتحاد Union Set فتمثل اصغر مجموعة من جميع العناصر المختلفة.

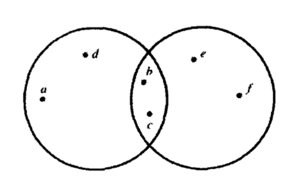
وعليه، في ضوء المخطط، نقول إذا كانت A، B مجموعتين، فإن تقاطع $A \cap B$ يمثل مجموعة التقاطع، وأن اتحاد $A \cup B$ يمثل مجموعة الاتحاد:





مخطط توضيحي Illustration

لديك مجموعتان {a,b,c,d} و {e,b,c,f}. ارسم مخطط فين لهاتين المجموعتين وبين مجموعتي التقاطع والاتحاد.



مجموعة الاتحاد = {a,b,c,d,e,f}

مجموعة التقاطع = {b,c}

والآن تستطيع اطلاع صفوفك المدرسية على كيفية الحل ببساطة نسبية المسائل "الحسابية Counting" مثل ما يأتي.

مسألة PROBLEM

عرض على طالب مبلغ 50 سنتا يتقاضاها عن معلومات يقدمها عن كل شخص من مجموعة أشخاص، تتضمن ذكر ميولهم إلى سياسات الجمهوريين أو الديمقراطيين، فقدم تقريرا فيه أن 27 شخصا ميال إلى الجمهوريين، و 31 شخصا ميال إلى الديمقراطيين، وأن 18 شخصا يميل إلى الطرفين.

فكم سيتقاضى الطالب من النقود؟

الحل SOLUTION

اظهر مخطط فين وجود 40 عنصرا فقط (40=9+18+13) في مجموعة الاتحاد، فيستحق الطالب $20.00 دولارا.

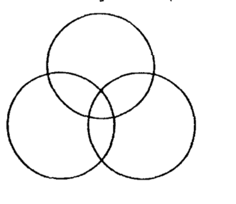
تظهر في أدناه بعض مسائل التطبيق الإضافية:

1. ظهر في اقتراع أعدته مجلة المدرسة، بأن 110 طلاب قد صوتوا بأنهم ميالون إلى اللغة الإنجليزية، بينما صوت 150 طالبا بأنهم ميالون إلى الرياضيات، وذكر 50 واحدا بأنهم ميالون إلى كليهما. إذا كان كل طالب تمت مقابلته قد أدلى بصوته في اقتراع المجلة، فكم عدد الطلبة الذين تمت مقابلتهم؟.
2. اظهر المسح الميداني على السيارات بأن 12 مواطنا ميال إلى الأنموذج X، وأن 18 ميال إلى الأنموذج Y، و 20 ميال إلى الأنموذج Z.

كذلك فإن 5 من هؤلاء المواطنين ميالون إلى X,Y، و 8 ميالون إلى Y,Z، وكذلك هناك 7 ميالون إلى Z, X. بينما هناك مواطنون ميالون إلى النماذج الثلاثة.

فكم عدد المواطنين الذي شملهم المسح الميداني؟

إشارة: استخدم المخطط التالي:



مثال 4 EXAMPLE: (الجبر) ضرب ثنائية الحدود Multiplying Binomials

إن الإثبات البصري الذي ينص على أن: $(a+b)(a+b)=(a^2+2ab+b^2)$ يخالف بصورة صارمة البرهان التقليدي الذي يستخدم الخصائص التوزيعية. وسيظهر الإثبات لاحقا.

نظرا لأن مساحة المربع هي حاصل ضرب $(a+b).(a+b)$ وأن مجموع مساحات المقاطع الأربعة، $a^2+ab+ab+b^2$، سنحصل على ما يأتي: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

	a	*b*
a	a^2	*ab*
b	*ab*	b^2

تمييز الأنماط Recognizing Pattern

يعد تمييز الأنماط واستبقاؤها أحد القوى الفاعلة في السلوك الإنساني، لأنه يؤسس الثبات والسير على وتيرة واحدة في عمل الأشياء، وهو أمر يحتاجه البشر، وبالخصوص الناشئون.

وبالنسبة للرياضي، فإن تمييز الأنماط يوفر مفتاحا سحريا يفتح المغاليق أمام بسط امتدادات الأفكار إلى حقول وميادين جديدة. إن الأشكال والتخطيطات المعروضة، في هذا المقام، تبدو بسيطة أو قد تصل لحد تافه، وعلى الرغم من ذلك فإن هدفها الحقيقي يتوجه صوب دعم آلية نشوء الأفكار عوضا عن المعلم، لغرض إتاحة الفرصة أمامه في التفكير والتخطيط بموازاة الخطوط العامة المقترحة.

مثال EXAMPLE 1: (الجبر)

الأسس الصفرية والسالبة

Zero and Negative Exponents

دع الطلبة يتأملون الأنماط السائدة في هذا الجدول، وقم بإبدال كل علامة "؟" بالعدد المناسب.

$2^5=32$	$3^5=243$	$4^5=1024$
$2^4=16$	$3^4=81$	$4^4=?$
$2^3=8$	$3^3=?$	$4^3=?$
$2^2=4$	$3^2=?$	$4^2=?$
$2^1=2$	$3^1=?$	$4^1=?$

ينبغي أن نبسط هذا الجدول قليلا. وعندما سيحاول الطلبة توسيعه بالاتجاه السفلي لكي يتضمن علامة الاستفهام Question Mark، سيدركون بأن كل عدد هو عبارة عن نصف، ثلث، ربع العدد، ... الخ الذي يقع في أعلاه، ومعتمدا على العمود الذي يقع فيه.

وباتباع هذا النمط سيستنتج الطلبة ما يأتي:

$2^0=1 \qquad 3^0=1 \qquad 4^0=1$

إن الاستمرار بالعمل على هذا النمط، سيتيح للطلبة فرصة توسيع الجدول إلى الحد الذي يجعله يبدو كما يأتي:

$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$3^{-1}=\frac{1}{3}$	$4^{-1}=\frac{1}{4}$
$2^{-2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$3^{-2}=\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$	$4^{-2}=?$
$2^{-3}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$3^{-3}=?$	$4^{-3}=?$
$2^{-4}=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$3^{-4}=?$	$4^{-4}=?$

يستطيع الطلبة، الآن، إنشاء القواعد التالية وتعميمها:

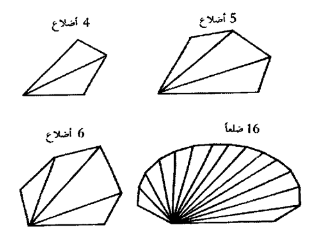
إذا كان $x \neq 0$ فإن $x^0=1$ و $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$

مثال EXAMPLE 2: (الهندسة)

مجموع زوايا الشكل متعدد الأضلاع The Sum of the Angles of A Polygon

دع طلبة الصف يتأملون السؤال "ما هو مجموع قياسات الزوايا في الشكل متعدد الأضلاع مهما كان عدد أضلاعه؟".

باعتماد مبدأ تقسيم متعدد الأضلاع إلى مثلثات، تستطيع أن تنشئ نمطا قد يرشد طلبة الصف إلى الإجابة المطلوبة.



ينبغي أن يكون طلبة الصف على إدراك تام بأن قياس الزاوية المستقيمة يساوي 180°.

- مجموع زوايا متعدد الأضلاع بأضلاع أربعة يكافئ 2 زاوية المستقيمة = 360°.
- مجموع زوايا متعدد الأضلاع بأضلاع خمسة يكافئ 3 زاوية مستقيمة =؟ درجة.

- مجموع زوايا متعدد الأضلاع بأضلاع ستة يكافئ: "؟" زاوية مستقيمة = "؟" درجة.

لإيجاد مجموع زوايا متعدد الأضلاع بـ 16 ضلعا، سنلاحظ وجود 14 مثلثا، وعليه فإن مجموع زواياه هو "؟" زاوية مستقيمة.

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على استنتاج ان متعدد الأضلاع الذي يبلغ عدد أضلاعه n، يمكن تقسيمه إلى $(n-2)$ مثلث، وعليه فإن مجموع قياسات زواياه يكافئ $(n-2)$ زاوية مستقيمة، أو $180\times(n-2)$ درجة.

مثال EXAMPLE 3: (الجبر)

حاصل ضرب رقمين إشاريين Product of Two Signed Numbers

في حقل الرياضيات، تسهم الرغبة في الإبقاء على الأنماط ببث حافز دائم باتجاه توسيع وابتكار أساليب رياضية جديدة، وكما سيظهر بوضوح في سعينا بالحصول على قواعد عامة تتناول موضوع ضرب الأرقام الإشارية .

قبل البدء بهذا الموضوع، ينبغي أن يكون الطلبة قد ألفوا التعامل مع خط العدد Number line، كذلك ينبغي أن يكونوا مدركين بأن الأعداد الموجبة يمكن كتابتها بإشارة موجبة أو بدونها. دع الطلبة يدرسون النمط السائد في الجدول الآتي مع إبدال كل علامة استفهام "؟" بالعدد المناسب.

الناتج	=	عامل 2	×	عامل 1
9	=	3	×	3
6	=	2	×	3
3	=	1	×	3
0	=	0	×	3
?	=	-1	×	3
?	=	-2	×	3
?	=	-2	×	3

عند مباشرة تحليل النمط مع طلبة الصف، قد يكون من المفيد توسيع الجدول قليلا نزولا إلى اسفل.

إن النمط سوف يقترح علينا قبول القضية الآتية بوصفها قاعدة رياضية:

عدد موجب × عدد سالب = عدد سالب

وستقترح علينا خاصية التبديل Commutative Property بعد ذلك ما يلي:

عدد سالب × عدد موجب = عدد سالب

وبالطريقة نفسها تماما، فإن الأسلوب في تمييز الأنماط سيثمر عن قاعدة عامة لضرب عددين سالبين.

الناتج	=	عامل 2	×	عامل 1
-9	=	-3	×	3
-6	=	-3	×	2
-3	=	-3	×	1
0	=	-3	×	0
?	=	-3	×	-1
?	=	-3	×	-2
?	=	-3	×	-3

وعليه ستكون القاعدة المقترحة:

عدد سالب × عدد سالب = عدد موجب

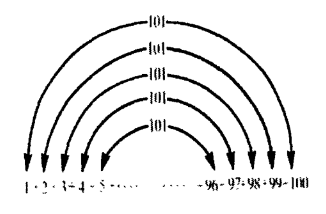
مثال EXAMPLE 4: (الجبر)

مجموع متوالية حسابية Sum of An Arithmetic Progression

عندما كان العالم الرياضي كارل فردريش كاوس صبيا ناشئا، بدت ميوله الرياضية تظهر بوضوح لا لبس فيه، وبالخصوص في حادثة الصف التي تحولت فيما بعد إلى حكاية كلاسيكية حول مخايل الذكاء. فعندما طلب المعلم من الطلبة إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100، كافح الطلبة بالكتابة على ألواحهم المتواضعة لكي يظفروا بحل المسألة. أما رفيقهم كارل فقد لفت انتباهه وجود نمط واضح يمكن استثماره في حل المسألة بسهولة كبيرة، وبوقت قصير.

لاحظ كارل بأنه إذا لجأ إلى عمل أزواج من الحدود الخاصة بالأرقام من 1 إلى 100 كما في الشكل التالي، ثم قام بإضافتها، فسيحصل على 50 زوجا مجموع كل منها 101. وعليه سيكون المجموع الكلي، ببساطة:

$$50 \times 101 = 5050$$



والآن حاول تعميم التقانة التي وظفها كاوس لإيجاد صيغة تصلح لجمع "n" من حدود متوالية حسابية.

افترض a الحد الأول من المتوالية، وأن d هو الفرق المشترك بين الحدود (أساس المتوالية). وعليه، فإن مجموع (n) من حدود المتوالية الحسابية سيكون:

$$a + [a+d] + [a+2d] + [a+3d] + \dots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

بإضافة الحد الأول والحد الأخير من المتوالية، ينتج:

$$a + [a+(n-1)d] = 2a + (n-1)d$$

وبإضافة الحد الثاني والحد – ما قبل الأخير – (n – 1) ينتج:

$$[a+d] + [a+(n-2)d] = 2a + (n-1)d$$

وبإضافة الحد الثالث والحد (n – 2) من المتوالية:

$$[a+2d] + [a+(n-3)d] = 2a + (n-1)d$$

استمر بهذه العملية حتى تستكمل إضافة جميع أزواج المتوالية. إذا كان هناك $\frac{n}{2}$ من هذه الأزواج، فإن مجموع الحدود سيساوي:

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

وهي الصيغة المطلوبة.

اسأل طلبتك كيف تسهم هذه الطريقة في حساب الحد الوسيط بمتوالية تتألف من عدد فردي من الحدود.

مثال EXAMPLE 5: (الهندسة)

المجسم متعدد السطوح Polyhedra.

اكتشف الرياضي ليونهارد ايولر Leonhard Euler (1707 – 1783) علاقة طريفة بين رؤوس المجسم ذي السطوح المتعددة، ووجوهه، وحافاته. وقال إذا اخترت مجسما متعدد السطوح منتظما أو غير منتظم، وافترضت:

V = عدد الرؤوس.

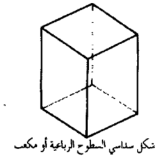
E = عدد الحافات.

F = عدد الوجوه.

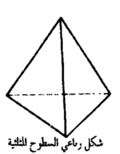
فستجد أن في كل مجسم من هذا النوع، تكون العلاقة:

V – F+E = ثابت

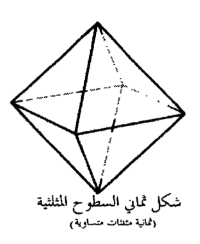
(خمسة مجسمات منتظمة متعددة السطوح)



شكل سداسي السطوح الرباعية أو مكعب

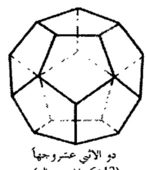


شكل رباعي السطوح المثلثية

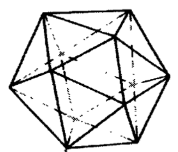


شكل ثماني السطوح المثلثية
(ثمانية مثلثات متساوية)

استثمر الأشكال المبينة أعلاه كي تساعدك على تصور الأنماط السائدة بين هذه الكميات لكل من المجسمات متعددة السطوح – المنتظمة، الخمسة، وتحقق من صحة الصيغة V – E+F=Z لكل حالة من الحالات:



ذو الاثني عشر وجهاً
(12شكل خماسي منتظم)



ذو العشرين وجها منتظم
(20 مثلثا متساويا)

الاسم	F	E	V
رباعي السطوح	4		
المكعب	6		
المجسم الثماني	8		
ذو الاثنى عشر وجهاً	12		
ذو العشرين وجهاً	20		

استخدام النماذج الرياضية والتشكيلية

Using Mathematical Models And Manipulatives

يستمر الرياضيون والفنانون بمحاولاتهم لإنتاج نماذج فيزيائية تحاكي النماذج التجريدية Abstract Models التي تنشأ في العقل الإنساني. وتتوفر فرص كافية أمام الطلبة والمعلمين بمحاولة إنشاء نماذج يمكن تصنيعها منزليا، مثل المجسم الخماسي بسطوحه المنتظمة، وفن الخيوط، و عجلات الروليت، والمعيار (جهاز المسح والكشف)، وأي شئ آخر يستطيع الخيال البشري أن يستحضره إلى ساحته.

وكذلك المواد التي تستخدم بكثرة مثل: المساطر، والفجار، والمنقلة، والتي تعد شواهداً على النماذج الرياضية.

مثال 1 **EXAMPLE 1**: (الاحتمالات، الجبر)

النماذج الاحتمالية Probability Models

من بين النماذج الأكثر شيوعا، والمستخدمة في إيضاح مبادئ الاحتمالية هي: زهر الطاولة، والقرص الدوار Spinner، وأوراق اللعب، و الجرة المملوءة بكريات مختلفة الألوان التي يمكن الحصول عليها بسهولة لأغراض استخدامها كوسيلة إيضاح صفية.

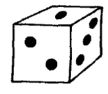
بالرغم من أن مفهوم "احتمالية أن واقعة ما سوف تحدث" يبدو أنه أمر حدسي Intuitive بين عدد من الطلبة الأحداث، بيد أن هذا المفهوم لا يمتلك بعدا كليا شاملا، ما لم تتم صياغته صوريا منذ البداية.

إن نسبة الاحتمال P لحدوث واقعة ما، هي:

$$\text{نسبة الاحتمال} = \frac{\text{عدد طرق وقوع الحدث}}{\text{عدد الطرق الكلية}} = P$$

يستطيع المعلم استخدام النماذج المذكورة سابقا في توضيح التعريف والتوسع في بيان أسسه المبرهنة والتطبيقية.

إن زهر الطاولة، مألوف لدى الجميع، وهو عبارة عن جسم مكعب بستة اوجه، ويطلق عليه المكعب Cube. إن كل وجه من اوجه المكعب هو عبارة عن مربع، وقد تم ترقيم الأوجه الستة برمز النقطة Dot، فأضحت تحمل الأرقام 1,2,3,4,5,6 كما في الشكل الآتي:

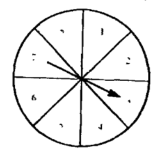


جد احتمالية الحصول على الرقم 5 عند رمي زهر الطاولة.

الجواب **ANSWER**: $p(5)=\frac{1}{6}$

إن القرص الدوار Spinner هو عبارة عن أنموذج يحاكي قرص لعبة الروليت، ويحتوي هذا القرص – على سبيل المثال – على ثمانية مناطق Regions، متساوية المساحة، ومرقمة بالأرقام من 1 إلى 8.

يتمتع السهم بنفس الفرصة في الوقوف فوق أي منطقة من المناطق الثمان للقرص الدوار. فإذا افترضنا عدم وقوف السهم فوق الحد الفاصل بين المناطق الثمان، فكم هو مقدار احتمالية وقوفه فوق المنطقة رقم 3؟.



الجواب **ANSWER**: $p(3)=\frac{1}{8}$

تحوي مجموعة بطاقات اللعب القياسية على 52 بطاقة. تنقسم أوراق اللعب إلى أربع مجاميع: المسحاة Spade، والمعين Diamonds، والقلوب Hearts، والمضرب Clubs. تحوي المجموعة الواحدة على 13 بطاقة: 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، والولد Jack، والملكة Queen، والملك King، والواحد Ace.

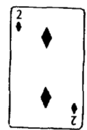
إن ألوان بطاقات المسحاة سوداء، وألوان بطاقات المعين حمراء. عند سحب بطاقة، بصورة عشوائية، وضح لماذا ستكون احتمالية سحب (أ). اثنين من علامة المعين، (ب) أية اثنين، أو (ج) – أية بطاقة علامتها المعين.

الجواب ANSWER:

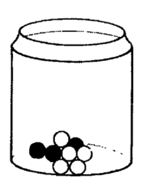
أ. P(اثنين من المعين) = 1/52

ب. P(اثنان) = 4 / 52 = 1/131

ج. P(معين) = 13 / 52 = 1/4



تحوي جرة 8 كريات زجاجية، 3 كريات منها لونها احمر، و 5 كريات باللون الأبيض. تم اختيار كرية زجاجية واحدة، بطريقة عشوائية، من داخل الجرة، فما هو مقدار احتمالية أن تكون هذه الكرية حمراء اللون؟

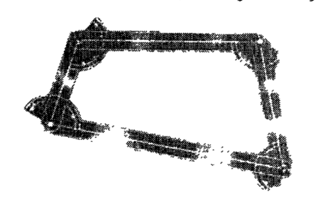


الجواب **ANSWER**: P(الأحمر) = 3/8

لاحظ إمكانية تطوير هذه المسائل، وإدخال تغييرات، أو إضافات على مضامينها بحيث يمكن استخدامها مع الصفوف وبمراحل دراسية متعددة بدءا بالطلبة الصغار، إلى طلبة المراحل المتقدمة بالمدارس الثانوية، ومن دروس الرياضيات المبتدئة لغاية الدروس المتقدمة في الرياضيات. لا ريب بأنه سيكون لكل مرحلة من المراحل الدراسية نوع من التعقيد والمعالجة المتخصصة في ضوء متطلبات منهج التدريس السائد في صفوفها.

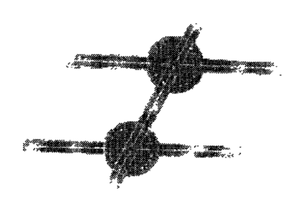
مثال EXAMPLE 2: (الهندسة) الربط Linkage

تتوفر في السوق نماذج متعددة مصنوعة من معادن ذوات نوعية جيدة، أو من مادة البلاستيك الشفاف، يمكن



للمعلم أن يستخدمها مع جهاز الإسقاط العلوي الضوئي، أو بدونه، لتوضيح النظريات الآتية:

- الزوايا الداخلية – المتبادلة لخطين متوازيين يقطعهما خط مستعرض، تكون متطابقة.
- الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية ومتطابقة فيما بينها.
- أقطار متوازي الأضلاع ينصف بعضها الآخر.
- الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
- الزوايا المتتالية في متوازي الأضلاع متكاملة.



يطلق على الشكل الرباعي Quadrilateral اصطلاح "الشكل الرباعي المرن Flexible"، ويوفر للمعلم أنموذجا، واضحا، وسهلا، حيث يستطيع المعلم أن يمسك به أمام طلبته، فيحرك أضلاعه مغيرا قياسات زواياه حسب متطلبات مادة الدرس.

يستطيع الطلبة اقتراح قائمة من خصائص متوازي الأضلاع في ضوء التشكيلات على الأنموذج.

يبدو واضحا من التشكيلات على أنموذج متوازي الأضلاع بأن قطريه ينصف بعضها الآخر، وليس من الضروري تطابقهما. تسهم لوحة الرسوم التخطيطية – الهندسية Geometric Sketch pad بدور تعليمي يشابه أنموذج متوازي الأضلاع المرن.

مثال Example 3: (الهندسة)

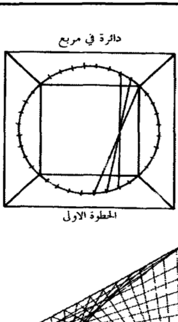
تصاميم الخيط String Designs

يقترح مقطع الخط المستقيم الذي يظهر في الأشكال الآتية مجموعة من المنحنيات التي تعرف بـ "الأطواق أو الأغلفة Envelopes". إن الغلاف هو المنحني الذي يمس كل مستقيم من مجموعة الخطوط المستقيمة.

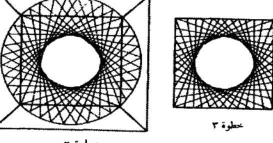
يمكن استخدام خيوط بألوان متباينة، لأعداد الخطوط المستقيمة، وسينشأ عن هذه الخطوط تشكيلة مختلفة من أنماط الأغلفة بألوان جميلة وزاهية. وستسهم هذه الأشكال البراقة في تحفيز الطلبة ودفعهم باتجاه الاهتمام في دراسة مادة الهندسة، وعلى وجه الخصوص، مستويات الناشئة في المدارس الثانوية، الصفوف 7 و 8.

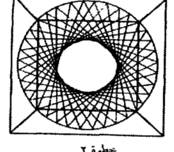
يمكن اقتراح مشروع درس يتضمن وحدة تعليمية في التصاميم الهندسية في صفوف الرياضيات. إن المفاهيم والعبارات الآتية هي جزء من الفقرات التي سيتم إيضاحها ومناقشتها، وتشمل: دائرة ومماسا، وشكلا خماسيا Pentagon، وشكلا سداسيا Hexagon، وشكلا معينيا Rhombus، ومنحنى القطع المكافئ Parabola (انظر الأشكال والمخططات الآتية).

دائرة في مربع



الخطوة الاولى





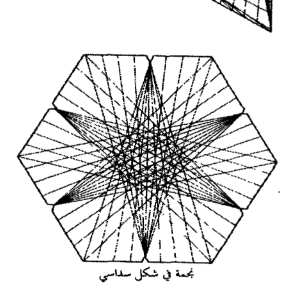
خطوة ٣

خطوة ٢

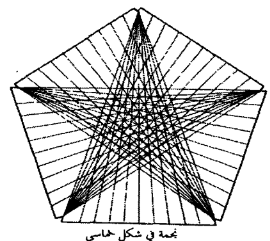
ثلاث منحنيات في مثلث



قطع مكافئ



نجمة في شكل سداسي



نجمة في شكل خماسي

يحتوي الكتاب التالي على تشكيلة متنوعة من التعليمات الخاصة بأعداد مخططات الخيوط، وبأبعاد رسومية ثنائية وثلاثية.

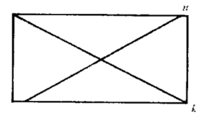
How To Enrich Geometry Using String Diagram. by: Victoria Pohl (NCTM, 1986).

بوصفها جزءا من متطلبات أي مشروع، قد تميل إلى مشاركة مدرس حاسوب أو فنون جميلة لمد يد العون في المجالين الفني والتقني. فضلا عن ذلك قد تظهر الحاجة إلى مدرس للغة الانجليزية لتوجيه الطلبة على قراءة التعليمات، بتفاصيلها الدقيقة، واتباعها بدقة لتنفيذ التصميم المطلوب.

مثال **Example 4**: (الهندسة) جد العلاقة بين قياس الزاوية والقوس الذي تقطعه في دائرة ما.

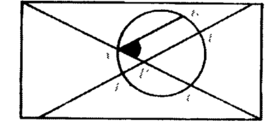
افترض بأن الطلبة قد تعلموا مسبقا، بأن قياس الزاوية الماسة لدائرة Inscribed Angle يكافئ نصف قياس قوس تقاطعها مع الدائرة.

ابدأ باقتطاع قطعة مناسبة لقطعة مستطيل من مادة الكرتون ودائرة من المادة نفسها. اغرز قطعتين من الخيط على المستطيل بحيث ينشأ عنها زاوية مناسبة قرب المنتصف، ثم ارسم زاوية بنفس القياس (مثل قياس الزاوية الناتجة عن قطعتي الخيط كزاوية تماس للدائرة.



إن نقل الدائرة إلى مواضع مختلفة بالنسبة للمستطيل، ستوضح بالتفصيل جميع النظريات ذات الصلة بالدائرة ولأنواع مختلفة من الزوايا، (وستسهم كذلك في البرهنة عليها).

1. إن قياس الزاوية الناشئة عن تقاطع وترين في دائرة يكافئ نصف مجموع الأقواس المحصورة Intercepted Arcs.



ضع الدائرة بحيث يكون $\overline{AB}//n$ ويقع $\overline{AC}$ على K، كما في الشكل السابق.

$$m\angle A=\frac{1}{2}m\widehat{BEC}$$

$$m\angle A=m\angle p$$

إذن:

$$m\angle p=\frac{1}{2}m\widehat{BEC}=\frac{1}{2}(m\widehat{BE}+n\widehat{EC})$$

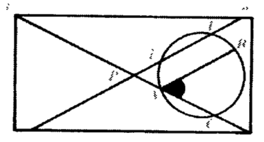
لكن:

$$m\,\widehat{BE}=m\,\widehat{AF}$$

إذن:

$$m\angle p=\frac{1}{2}(m\,\widehat{AF}+m\,\widehat{EC})$$

2. إن قياس الزاوية الناتجة عن القاطعين Secants خارج الدائرة، يساوى نصف الفرق بين الأقواس المحصورة.



ضع الدائرة بحيث يكون $\overline{AB}//n$ ويقع $\overline{AC}$ على k، كما في الشكل السابق.

$$m\angle A=\frac{1}{2}\widehat{BC}$$

$$m\angle A=m\angle p$$

إذن:

$$m\angle p=\frac{1}{2}m\,\widehat{BC}=\frac{1}{2}(m\,\widehat{FBC}-m\,\widehat{FB}).$$

لكن:

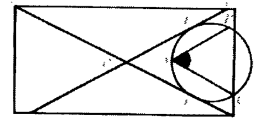
$$m\,\widehat{FB}=m\,\widehat{AE}$$

إذن:

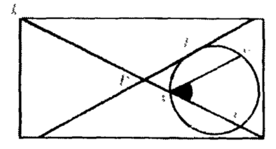
$$m\angle p=\frac{1}{2}(m\,\widehat{FBC}-m\,\widehat{AE})$$

يمكن إعداد مناقشة مشابهة للأمثلة الآتية:

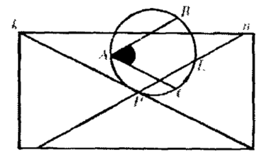
3. زاوية نشأت عن مماسين:



4. زاوية نشأت عن مماس وقاطع:



5. زاوية نشأت عن قاطع ووتر:



تمتاز هذه التمارين بتقاربها في طريقة المعالجة، كما وتتيح إمكانية البرهنة على جميع هذه النظريات، بسرعة خلال الدرس نفسه. وترتكز أهمية هذه الممارسة الرياضية على أهمية ترك فرصة مناسبة للطلبة لكي يستبقوا موضع الدائرة اللاحق، وموضوع المناقشة الذي يتساوق منطقيا معه.

مثال Example 5: (حساب المثلثات)

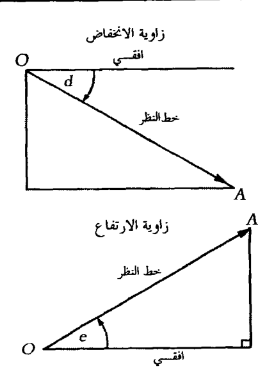
زوايا الارتفاع والانخفاض

Angles of Elevation and Depression

قبل البدء بهذا الدرس. ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة مسبقة بالتعاريف الاصطلاحية لزاوية الارتفاع وزاوية الانخفاض.

تعريف: إذا رصد الكائن A من النقطة O، فإن زاوية الارتفاع أو الانخفاض هي الزاوية التي تصنعها قطعة المستقيم $\overline{OA}$ (من عين الناظر إلى لكائن) مع المستقيم الأفقي في المستوي نفسه.

وإذا كان الكائن واقعا بموقع أكثر ارتفاعا من الراصد، فإن الزاوية هي زاوية ارتفاع، أما إذا كان منخفضا عنه، فالزاوية هي زاوية انخفاض، كما في الشكل

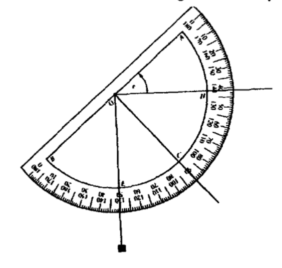


إن المعيار Transit هو عبارة عن أداة يستخدمها كثير من المهندسين في قياس زوايا الارتفاع والانخفاض، ويمكن اعتماد استخدامها في دروس مادة المثلثات، بيد أنها غالية الثمن لحد ما.

يستطيع الطلبة تعلم طريقة أكثر سهولة لإنشاء أداة مشابهة لقياس أي من هذه الزوايا بواسطة منقلة الطالب التقليدية Protractor، مع قطعة من الخيط، وقطعة طباشير لتسليط وزن على نهاية الخيط.

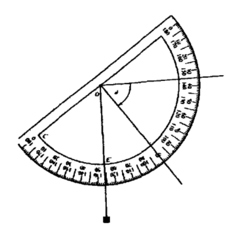
حاول توجيه الطلبة إلى برهنة أن زاوية الارتفاع e لشئ ما يمكن قياسها كما يأتي:

قم بتثبيت المنقلة في وضع رأسي كما في الشكل الموضح أدناه بحيث يكون امتداد قطعة المستقيم $\overline{BO}$، والنظر من خلالها كـ "مسدد" Sight.



امسك بثقل الفادن Bob Plumb (الفادن عبارة عن أداة مؤلفة من خيط في طرفه قطعة رصاص يسبر بها غور المياه، أو تمتحن بواسطته استقامة الاشياء) بواسطة مسمار صغير Nailor Tack مثبت في النقطة O، ويقطع القوس BC في النقطة E.

تقاس زاوية الارتفاع بقوس EC على المنقلة، وبنفس الطريقة يستخدم القوس 'C' E لقياس زاوية الانخفاض d. قم بأعداد برهان لزاوية الانخفاض أيضا.



في كل من البرهانين السابقين، ينبغي استخدام نظرية "الزوايا المتممة Complement Angles لزاوية ما تكون متطابقة". ولم نلاحظ بأن الطلبة قد عانوا من صعوبة في متابعة هذه البراهين واستيعابها.

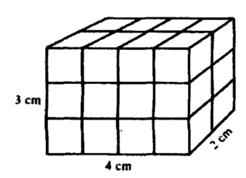
مثال EXAMPLE 6

(الهندسة الحدسية) Intuitive Geometry

الحجوم Volumes

حاول تذكير الطلبة بأن المساحة السطحية تقاس بوحدات مربعة. أما الحجوم فتقاس بوحدات مكعبة، مثل السنتمتر المكعب والانش المكعب.

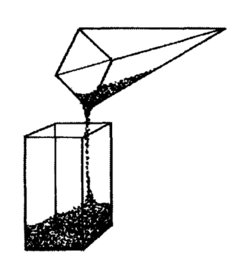
وعليه إذا كانت أبعاد هذا الصندوق (المنشور مستطيل الشكل) هي 2×3×4 سم على التوالي، فإن هذا الصندوق سيحوي على 24 سنتمترا مكعبا، كما يوضح الشكل الآتي:



سيقتنع الطلبة بأن الخبرة التطبيقية، بالإضافة إلى بعض النماذج الفيزيائية سوف تقودنا إلى استنتاج عقلاني بأن حجم الجسم مستطيل الشكل يساوي حاصل ضرب أبعاده الثلاثة (الطول × العرض × الارتفاع) [V=lwh]، أو إن الحجم يساوي حاصل ضرب مساحة قاعدته في ارتفاعه [V=Bh].

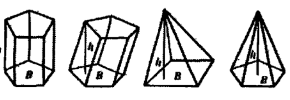
ويمكن توضيح علاقة حجميه أخرى من خلال استعراض الأجسام في الشكل الآتي .حيث يمتلك كل من الهرم والمنشور مستطيل الشكل نفس مساحة القاعدة والارتفاع.

فإذا ملء الهرم بسائل ما، ثم قمنا بتفريغ هذا السائل في منشور مستطيل الشكل، فإن محتوى الهرم سيستوعب ثلث حجم المنشور مستطيل الشكل فقط!.



وبعد إجراء مجموعة من التجارب نجد هنا كذلك ان حجم متوازي المستطيلات يساوي حاصل ضرب مساحة قاعدته مع ارتفاعه (V=Bh). وكذلك الأمر بالنسبة لحجم الهرم الذي يساوي ثلث حاصل ضرب مساحة قاعدته مع ارتفاعه (V=1/3Bh).

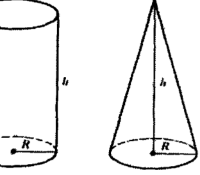
إن الصيغة السابقة صالحة للاستخدام في احتساب حجوم المناشير حتى لو كانت مائلة Oblique.

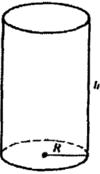


هرم منتظم   هرم مربع   منشور مائل   منشور قائم

وبالحقيقة، فإن هذه الصياغات تنطبق على حجوم الأجسام، حتى عندما تكون قاعدتها ليست متعددة الأضلاع بل عبارة عن منحنى، كالدائرة مثلا.

وعليه، فضلا عن المنشور، تستطيع أن نعالج موضوع الاسطوانة الدائرية، والمخروط Cone.





حيث نلاحظ انطباق الصيغ ذاتها في حسابات حجوم هذه الأشكال، وبعد أن تقوم بإجراء تعديلات طفيفة على حسابات مساحة القاعدة الدائرية والتي ستساوي:

$B=\pi r^2$

اذن ستكون صيغة حجم الاسطوانة الدائرية:

$V=\pi r^2 h$

أما حجم المخروط فسيساوي:

$V=1/3\pi r^2 h$

(انظر الشكل رجاء)

توسيع مفاهيم مألوفة
Extending Familiar Concepts

مثال EXAMPLE 1: (حساب المثلثات) دوال الزاوية المنفرجة Obtuse Angle:

قبل البدء بالدرس ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالدوال المثلثية الأساسية الثلاث للزاوية الحادة في المثلث قائم الزاوية Right Triangle، حيث سيعالج الدرس موضوع توسيع هذه الدوال بحيث تصبح صالحة للاستخدام مع الزاوية المنفرجة.

كذلك ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة جيدة بخصائص المثلثات (90 – 60 – 30) و (90 – 45 – 45).

تأمل زاوية في موقع معياري "Standard Position"، حيث يكون الشعاع الأولي منطبقا على المحور السيني، ورأس القمة في نقطة الأصل Origin.

افترض بأن تقاطع نهاية الشعاع والدائرة التي نصف قطرها r. ويقع مركزها في نقطة الأصل، سيكون في النقطة (x, y) (انظر التخطيط الآتي).

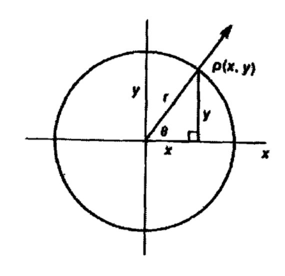
باستخدام التعاريف التقليدية لدوال الزاوية الحادة نحصل على:

$$\text{جا}\ \theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{y}{r} \quad (\sin\theta)$$

$$\text{جتا}\ \theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{x}{r} \quad (\cos\theta)$$

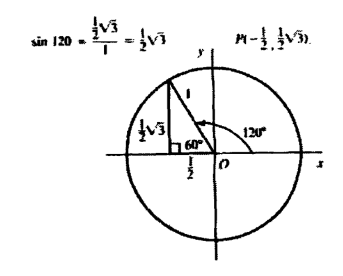
$$\text{ظا}\ \theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{y}{x} \quad (\tan\theta)$$

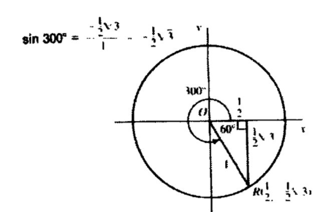
لاحظ أن r تستخدم دائما بوصفها قيمة موجبة.

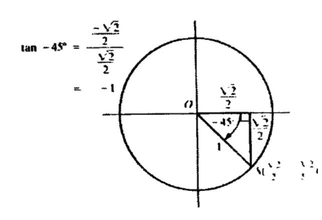


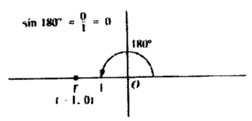
ارتكزت هذه التعاريف على تعاريف الزاوية الحادة في الربع الأيمن. وإذا حاولنا تدوير شعاع الزاوية على محور السينات بحيث تصبح الزاوي θ: حادة، منفرجة، مستقيمة، أو سالبة ونتفق على تطبيق التعاريف ذاتها على الزوايا الجديدة، آنفة الذكر، فسوف نصل إلى نتائج "فذة".

بعد الانتهاء من دراسة الأشكال والمخططات الآتية، سيلاحظ الطلبة، بسهولة، ما يأتي:









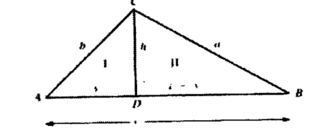
ينبغي إعطاء المزيد من التمرينات للطلبة وترسيخ هذه المبادئ والمفاهيم في أذهانهم.

مثال **EXAMPLE 2**: (المثلثات، الهندسة)

قانون جيب التمام Law of Cosine:

إن إحدى الطرق التقليدية والبسيطة في تقديم قانون جيوب للطلبة تكمن في معالجتها امتدادا مباشرا لبرهنة فيثاغورث المشهورة.

تأمل المثلث حاد الزاوية ΔABC، والذي ارتفاعه $\overline{CD}$:



باستخدام مبرهنة فيثاغورث في المثلث $II\Delta$، نحصل

$a^2 = h^2 + (c - s)^2$

فإن

$a^2 = h^2 + c^2 - 2cs + s^2$

$a^2 = (h^2+s^2) + c^2 - 2cs$ ... (1)

بالمقابل، إذا استخدمنا مبرهنة فيثاغورث، ثانية، في المثلث $I\Delta$، نحصل على:

$h^2 + s^2 = b^2$ ... (2)

وكذلك

$$\frac{s}{b} = \text{Cos}\,A$$

أو

$s = b\,\text{Cos}\,A$ ... ... (3)

بتعويض المعادلتين (2 و 3) في المعادلة (1)، نحصل على:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{Cos}\,A$

وهذا هو قانون جيوب التمام لمثلث حاد الزاوية.

استمر بتوسيع هذا التمرين عبر رسم، مثلث منفرج الزاوية، وزاوية منفرجة c.

مثال **EXAMPLE 3**: (الجبر)

التوزيعية **Distributivity**:

سيستغل الطلبة، في هذا الدرس، معرفتهم السابقة بالحساب لاستنتاج أن عمليتي الضرب والقسمة تتوزع على عمليتي الجمع والطرح، وأن الأسس والجذور تتقدم على عمليتي الضرب والقسمة. كما سيحزر الطلبة هذه الاستنتاجات بعد أن يكمل المعلم استعراض ترتيب العمليات، ورموز المجاميع، تليها التوضيحات الحسابية الآتية:

(I) $3(4+5) = 3.4 + 3.5?$

الجواب **ANSWER**: نعم (عملية الضرب يمكن أن تتوزع على عملية الجمع).

$5(3 - 2) \underset{=}{?} 5.3 - 5.2$

الجواب **ANSWER**: نعم (عملية الضرب تتقدم عملية الطرح).

(II) $\frac{36-4}{4} \underset{=}{?} \frac{36}{4} - \frac{4}{4}$

الجواب **ANSWER**: نعم (عملية القسمة يمكن أن تتوزع على عملية الطرح).

$$\frac{40+15}{5} = \frac{40}{5} + \frac{15}{5}?$$

الجواب **ANSWER**: نعم (عملية القسمة يمكن أن تتوزع على عملية الجمع).

(III) $2+3)^2 = 2^2 + 3^2$?

الجواب **ANSWER**: كلا (الأسس لا تتوزع على الجمع)

$(2.3)^2 = 2^2 . 3^2$?

الجواب **ANSWER**: نعم (الأسس يمكن أن تتوزع على عملية الضرب).

(IV) $\sqrt{4+9} = 2+3?$

الجواب **ANSWER**: لا (الجذور لا تتوزع على عملية الجمع).

$\sqrt{4.9} = 2.3?$

الجواب **ANSWER**: نعم (الجذور قد يمكن أن تتوزع على عملية الضرب).

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}?$

الجواب **ANSWER**: نعم (الجذور يمكن أن تتوزع على عملية القسمة).

(V) $\frac{3.5+2}{3} \overset{?}{=} 5+2$ تحد:

الجواب **ANSWER**: لا

ينبغي على المعلم أن يوضح بإسهاب عن طريق إيراد أمثلة، وأمثلة أخرى على نحو معاكس Example – Counter، مثل:

(2×4)×(3×4) لا يساوي (2×3) مضروبا في (2×4).

وبالطريقة نفسها، عند ضرب (2000-x) 0.3 في 100 فإن عاملا واحدا فقط يضرب عامل واحد فقط في الرقم 100، وليس كلا العاملين.

مثال EXAMPLE 4 : (الجبر) تقسيم متعددات الحدود :Dividing Polynomials

لتقسيم متعدد الحدود على آخر، ينبغي أن نسترجع في أذهاننا، أولا، كيفية قسمة عددين في الحساب.

عندما نقسم العدد 806 على 26، فإننا نحاول، بالحقيقة الكشف عن عدد تكرار وجود العدد 26 في العدد 806 باستخدام آلية الطرح المتكرر. وعند استخدام النهج نفسه وآلية الاستنتاج نفسها، نجد بأننا عندما نقسم المعادلة x^2+5x+6 بالمعادلة (x+3) فإن اعتماد مبدأ آلية الطرح المتكرر يظهر لنا أن (x+3) هو عامل في المعادلة (x^2+5x+6) قد تكرر (x+2) مرة.

وعليه، نستطيع توسيع مفهوم خوارزمية التقسيم الحسابي Arithmetic Division Algorithm باتجاه التقسيم الجبري لمتعددات الحدود.

إن المقارنة المباشرة بين طرفي هذا النهج، ستكون ذات آثار مفيدة للطلبة.

ولغرض تعميق الفائدة المتوخاة من هذه المقارنة ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة جيدة بجملة من العبارات والاصطلاحات الرياضية مثل: المقسوم Dividend، المقسوم عليه Divisor، خارج القسمة Quotient.

إن عملية التقسيم في مادة الحساب تصل إلى نهايتها عندما يكون باقي القسمة يساوي صفرا، أما بالنسبة لمادة الجبر فإن القسمة تصل إلى نهايتها عندما يكون الباقي من القسمة أقل من المقسوم عليه.

الملاحظة	الجبر	الحساب
1 التقسيم الطويل – المألوف Usual Long Division.	$x+3\overline{)x^2+5x+6}$	$26\overline{)806}$
2. تقسيم العدد الأيسر من المقسوم على العدد الأيسر من المقسوم عليه للحصول على عدد خارج القسمة.	خارج القسمة: x $x+3\overline{)x^2+5x+6}$	خارج القسمة: 3 $26\overline{)806}$
3. اضرب المقسوم عليه كله بالعدد الأول من خارج القسمة.	خارج القسمة: x $x+3\overline{)x^2+5x+6}$ $\underline{x^2+3x}$	خارج القسمة: 3 $26\overline{)806}$ $\underline{78}$
4. اطرح هذه النتيجة من المقسوم، ثم أضف العدد التالي من المقسوم للحصول على مقسوم جديد.	خارج القسمة: x $x+3\overline{)x^2+5x+6}$ $\underline{x^2+3x}$ $2x+6$	خارج القسمة: 3 $26\overline{)806}$ $\underline{78}$ 26
5. قم بتقسيم العدد الأيسر من المقسوم الجديد على العدد الأيسر من المقسوم عليه، واحصل على العدد الجديد لخارج القسمة.	خارج القسمة: $x+2$ $x+3\overline{)x^2+5x+6}$ $\underline{x^2+3x}$ $2x+6$	خارج القسمة: 31 $26\overline{)806}$ $\underline{78}$ 26
6. قم بتكرار الخطوة 3، وكذلك الخطوة 4 بضرب جميع المقسوم عليه بالعدد الثاني من خارج القسمة. ثم اطرح النتائج من المقسوم عليه الجديد. وسيكون الباقي النهائي في هذه الحالة صفرا.	خارج القسمة: $x+2$ $x+3\overline{)x^2+5x+6}$ $\underline{x^2+3x}$ $2x+6$ $\underline{2x+6}$ 0	خارج القسمة: 31 $26\overline{)806}$ $\underline{78}$ 26 $\underline{26}$ 0
	الجواب: (x+2)	**الجواب: 31**

مثال EXAMPLE 5: (الجبر)

حل مسائل الرقم العشري Solving Digit Problems:

ينبغي تذكير الطلبة بمعاني أعداد المئات (h)، والعشرات (t)، والآحاد (u)، ثم يصار إلى إرشادهم إلى كيفية وصف أعداد بمرتبتين، أو ثلاث مراتب عشرية بدلالة ذلك. حدد تمرينا فكريا وتطبيقيا.

اطلب من الطلبة اختيار عدد يتألف من ثلاث مراتب عشرية، شريطة أن تكون أعدادها مختلفة. ثم دعنا نقوم باختيار العدد 365، ثم دع الطلبة يباشرون بكتابة جميع الأرقام المحتملة (بمرتبتين عشريتين)،وباستعمال الأعداد 3، 6، 5.

ابدأ الآن بجمع جميع الأعداد التي قام الطلبة بإحصائها:

$$\begin{array}{r} 36 \\ 35 \\ 63 \\ 53 \\ 65 \\ \underline{56} \\ 308 \end{array}$$

قم، الآن، بتقسيم المجموع على مجموع الأعداد الثلاثة = $3+6+5=14$

$$\frac{\cancel{308}}{\cancel{14}} = 22$$

سيصاب الطلبة بالدهشة، عندما يلاحظون بأنهم جميعاً قد حصلوا على النتيجة نفسها، ومهما كانت طبيعية أعداد المراتب العشرية الثلاثة قد اختارها كل واحد منهم بطريقة عشوائية.

إن تبرير هذه الظاهرة سيقود إلى فتح باب المناقشة حول طبيعة المسألة التقليدية، والتي يطلق عليها "مسائل الرقم العشري"

التبرير Justification:

اعتمد في وصف العدد المؤلف من ثلاث مراتب عشرية بالمعادلة $100h + 10t + u$. وفي ضوء هذه الصيغة ستكون الأعداد الستة المحتملة كما يأتي:

$10h + t$
$10t + h$
$10h + u$
$10u + h$
$10t + u$
$10u + t$

سيكون المجموع أعداد هذه الاحتمالات:

$$20(h+t+u) + 2(h+t+u) = 22(h+t+u)$$

والآن، إذا طلب منا تقسيم هذا المجموع على مجموع قيم مراتبها الثلاث $(h+t+u)$، سنحصل على:

$$\frac{22(h+t+u)}{(h+t+u)} = 22$$

وعند استخدامنا مثل هذا الأسلوب، ينبغي أن نديم التركيز بوضوح على الغاية المتوخاة من طرح هذه "السمة المميزة".

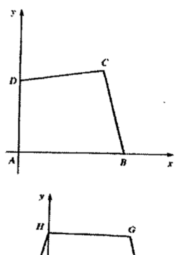
مثال EXAMPLE 6: (الهندسة): استخدام طرائق هندسة الإحداثيات للبرهنة على أن قطري متوازي الأضلاع ينصف أحدهما الآخر.

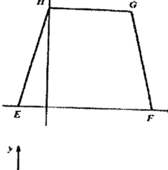
توفر طرائق هندسة الإحداثيات مناخا مناسبا لبرهنة جملة من تمارين الهندسة المستوية، وبخطوات أكثر سهولة من تلك التي تتطلبها هندسة المستويات الاقليدية.

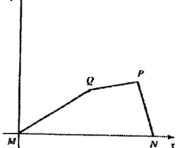
عند الشروع بحل تمرين ما باستخدام هندسة الإحداثيات، فإن نصف المعالجة الرياضية المطلوبة لإنشاء البرهان تكتمل عند أعداد البيئة الهندسية للمسألة بصورة دقيقة.

وكثيرا ما يساعد استخدام نقطة الأصل Origin، واحد الإحداثيات (السيني أو الصادي) بوصفهما رأس Vertex، وضلع، على التوالي.

(يظهر أدناه مجموعة نماذج من الأشكال الرباعية وبمواضع مختلفة) بالنسبة لهذا التمرين، ينبغي على الطالب أن يمتلك معلومات كافية عن مبادئ هندسة الإحداثيات، مثل رسم النقاط على مستوى الإحداثيات، وصيغة نقطة المنتصف، وتعريف متوازي الأضلاع وبيان خصائصه.





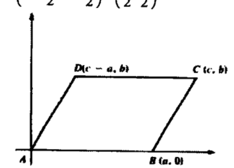


الحل SOLUTION:

ثبت الرأس A من متوازي الأضلاع ABCD على نقطة الأصل، واحد أضلاعه على محور السينات. استخدم الإحداثيات (a,o) لوصف النقطة B، والإحداثيات (c,b) لوصف النقطة C. وستكون إحداثيات النقطة (c-a, b) D.

باستخدام صيغة نقطة المنتصف، يمكن احتساب منتصف قطعة المستقيم $\overline{AC}\left(\frac{c}{2},\frac{b}{2}\right)$، أما منتصف المستقيم $\overline{BD}$ فسيكون

$$\left(\frac{a+c-a}{2},\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{c}{2},\frac{b}{2}\right)$$

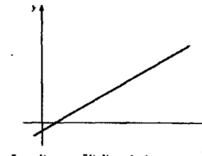


بما أن منصفات كل من قطري متوازي الأضلاع تمتلك إحداثيات متساوية، لذا نستطيع الاستنتاج بأن كل منهما ينصف الآخر.

مثال 7 EXAMPLE: (حساب التفاضل والتكامل)

استخدم آلة حاسبة رسومية للتحقق من عدد نقاط النهايات الصغرى والعظمى النسبية في دالة متعددة الحدود من الدرجة n.

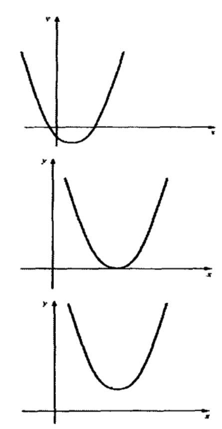
قبل البدء بعملية التحقق، ينبغي قيام الطلبة برسم مخطط لمعادلة الخط المستقيم y=ax+b. ويتوجب عليهم معرفة ان هذه المعادلة هي من الدرجة الأولى First Degree، والتي تأخذ الشكل الآتي:.



الآن، ابدأ برسم منحني الدالة من الدرجة الثانية، وبالصيغة الآتية:

$y = ax^2 + bx + c$

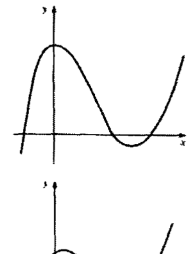
والذي سيبدو قريب الشبه بالقطع المكافئ (لاحظ المواقع المحتملة لهذه الدالة).

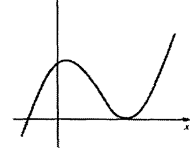


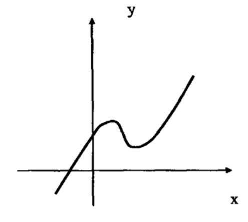
بعدها، احصل على صورة لدالة متعددة الحدود من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية Cubic Function)، وبالصيغة الآتية:

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(لاحظ المواقع المحتملة لهذه الدالة)



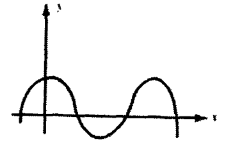


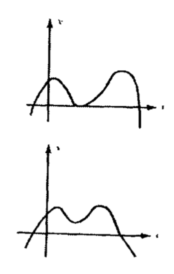


في النهاية، ستكون صورة دالة متعددة الحدود من الدرجة الرابعة (دالة تربيعية)، وبالصيغة الآتية:

$y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

كما في الشكل الآتي (لاحظ المواقع المحتملة لهذه الدالة)





قم بدراسة جميع الأشكال التخطيطية لاستنتاج ما يأتي:

- الدالة من الدرجة الأولى تمتلك (صفر) نقطة لنهايات عظمى أو صغرى نسبية.
- الدالة من الدرجة الثانية تمتلك (1) نقطة لنهايات عظمى أو صغرى.
- الدالة من الدرجة الثالثة تمتلك (كحد أعلى) نقطتين لنهايات عظمى أو صغرى.
- الدالة من الدرجة الرابعة تمتلك (كحد أعلى) ثلاث نقاط لنهايات عظمى أو صغرى.

ينبغي أن يكون الطلبة، الآن، قادرين على تعميم هذه الاستنتاجات في تحديد الحد الأعلى من نقاطات النهايات العظمى أو الصغرى النسبية التي تمتلكها دالة متعددة الحدود من الدرجة n.

ويمكن أن يجرى تحليل إضافي بحساب التفاضل والتكامل فيتناسب مع الموضوع المطروح في هذه الفترة.

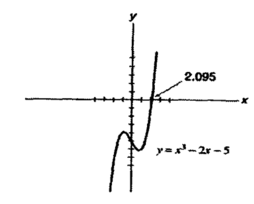
استخدام آلة حاسبة – رسومية
Using A Graphing Calculator

مثال EXAMPLE 1: (حساب التفاضل والتكامل)

استخدم آلة حاسبة رسومية في إيجاد الجذر الحقيقي – الموجب للمعادلة $x^3 - 2x - 5=0$ مقربا إلى ثلاث مراتب عشرية.

بعد اكتمال ظهور الشكل على شاشة الآلة الحاسبة، فإن جذر المعادلة (قيمة الصفر في الدالة) يمكن الحصول عليها عند احتساب نقطة تقاطع الدالة مع المحور السيني. ويمكن تحديد النقطة الصفرية على منحني بالدقة التي نريدها عن طريق وضع المؤشرة Cursor في اقرب موقع ممكن من نقطة تقاطع منحني الدالة مع المحور السيني، بعدها نباشر بعملية تكبير متكررة للمقطع المحدد لحين الوصول إلى الدقة المطلوبة إن القيمة التقريبية للجذر هي 2.095، والتي ستظهر بوضوح على شاشة الآلة الحاسبة – الرسومية.

(انظر الشكل الآتي)



خلاصة Summary

لقد قيل في عصور سابقة أن قطعة طباشير وسبورة هي كل ما يحتاجه المعلم لعرض درس مفيد. وهذه المقولة لا تصح في عصرنا الراهن، وعلى الخصوص، بعد أن تعودنا جميعا على مشاهدة إنجازات مثالية على شاشات التلفزيون، وعلى شاشات العرض بصورة مستمرة.

وإذا كان المعلمون يأملون جذب انتباه الطلبة، ينبغي عليهم أن يتنافسوا مع الصورة التي يصنعها اهل الخبرة والمتخصصون، ومع الفنانين والفنانات ذوي الدخل العالي!

لذا يحتاج المعلم، في وقتنا الراهن، تلك الأدوات والمهارات التي يمكن استخدامها في كل إنجاز (مهما كان نوعه). ومن بين هذه الاحتياجات تبرز القدرة على الإجابة وتوضيح النقاط، والمواضع التي تورث الإرباك لدى الطلبة اليافعين، وعلى وجه الخصوص، المفاهيم الرياضية التي تتسم بصعوبة ملحوظة، وأن تكون رياضيا ماهرا قد خبر الرياضيات بعلومها وتاريخها، وتمتلك القدرة على إجابة أي سؤال يقع في دائرة الرياضيات.

يستطيع المعلم المبدع، أيضا، أن يصمم، ويصنع أوراق جهاز العرض الضوئي وتحميضها، ويتقن فن الخيوط، وتصنيع النماذج، وصياغة المسائل الرسومية المناسبة.

لقد أوضح هذا الفصل بعض الاستراتيجيات والأدوات التي يستطيع المعلمون استخدامها لتهيئة المناخ المناسب لدرس مثمر ومؤثر. إن التفاعل بين الطلبة الذين يجلسون معا في غرفة الدرس، صغيرة كانت أم كبيرة، وتحت توجيه المعلم الفطن، سينتج عنه إثارة وتحفيز عقلي، لا يمكن الظفر بهما عند الجلوس منفردين أما الشاشة الصماء!.

تمارين Exercises

1
2. اكتب درسا باستخدام أنماط الأعداد، ومثلث باسكال Pascal Triangle لكل من المراحل الآتية:
أ. الصف الثامن.
ب. الصف الثاني عشر.
3. اكتب درسا عن خصائص المعين Rhombus.
4. اكتب درسا عن الاحتمالات، مع / أو بدون مساعدة الآخرين مما يجعل الطلبة ينهمكون في تفكير ذي مستوى متقدم. حاول أن تدافع عن أفكارك.
5. أ. قم بأعداد درس يحوي ثلاث مسائل لفظية لغرض حلها في مادة الجبر المخصصة للسنة الأولى (اقتراح: استخدم عارضة ضوئية، وآلة حاسبة رسومية).
ب. اطلب من الطلبة استخدام المسائل اللفظية (التي قمت بأعدادها) كقاعدة لصياغة خمسة أسئلة جديدة، تشابه الأولى إلى حد ما.
6. قم بإعداد درس يناقش قضية "إن مجموع زوايا المثلث، والشكل رباعي الأضلاع، والشكل خماسي الأضلاع، ... الخ تكافئ قيمة ثابتة. (لكل نوع من أنواع الأشكال متعددة الأضلاع" مستخدماً تقانة طي الورق أو/ و النماذج الفيزيائية).
7. قم بتطوير درس يستخدم فيه اللوح الهندسي Geoboard.
8. اكتب درسا صفيا متكاملا حول مادة حساب المثلثات والذي يعرض منحنيات الدوال المثلثية (مقترح: استخدم آلة حاسبة – رسومية).

الكتابة في درس الرياضيات
Writing in the Mathematics Classroom

يجابه عدد كبير من معلمي الرياضيات اقتراح دمج كتابة الواجبات ضمن فترة الدرس بدهشة بالغة، مدعيا بأنه لا يكاد يوجد وقت كاف لممارسة تمارين إضافية بمادة الرياضيات، فكيف يكون هناك متسع من الوقت لممارسة مثل هذه الأنشطة في نفس الوقت. تكمن فائدة الكتابة بالسماح للطلبة في التفكير مليا بالأفكار المطروحة في الصف، لأن هذه العملية تتطلب آلية تفكير أكثر بطئا مما تطلبه عملية التعبير الشفوي.

أظهرت الكثير من الأدبيات العلم نفسية بأن الطلبة الذين يحسنون التعبير بالألفاظ عن معرفتهم، يمتلكون قابليات جيدة على استدعاء تلك المعرفة، وأن الطلبة الذين يميلون إلى كتابة المفاهيم الجديدة التي تعلموها وبصورة أكثر دقة من الطلبة الذين لا يمارسون أيا منها.

من أجل هذا، تبدو الكتابة عاملا مهما يسهم في تقوية التعلم وتعميق أسسه في المتعلم ذاته.

يستعرض هذا الفصل مجموعة من الطرائق التي يمكن من خلالها زج الكتابة داخل ساحة درس الرياضيات . وستسهم الأمثلة التوضيحية في توفير توضيحات أكبر لهذه الاقتراحات. يوجد هناك أكثر من صيغة يمكن أن تفيد من الكتابة في درس الرياضيات، إحداها سجل أداء الطالب. ويلخص هذا السجل أيا من النشاط الصفي (يجري بصورة عامة، على أساس دائم)، أو خبرات الطلبة عندما يعملون على واجباتهم اليومية المحددة. والصيغة الثانية للكتابة هي سجل يومية الطالب، حيث يلاحظ اختلاف هذه الصيغة عن سابقتها بكونها أكثر تفصيلا، وتتضمن القدرة على الفهم، وآراء الطالب حول المادة التي تم تغطيتها، بينما لا يزيد سجل أداء الطالب عن كونه تقريرا حول المادة التي تم تغطيتها ليس إلا.

يعد أسلوب العرض Exposition أكثر الصيغ توسعا في الكتابة، ، وفيه يعمد الطلبة إلى الكتابة حول الموضوعات الرياضية المختارة، أو العامة. قد تتضمن هذه الفعالية التحريات فضلا عن أعداد التقارير.

سجلات الطالب Student Logs

إن سجل الطالب، هو التقرير الرسمي والأساسي لوصف نشاط التعلم لديه. قد يتألف هذا السجل من تبويبات وتقسيمات مركبة، مع مجموعة عناوين فرعية لكي يسهل الوصول إلى تفاصيلها.

يمكن أن يزود الطلبة بصحائف تندرج عليها الفئات المختلفة مثل: التاريخ، والعنوان، والعلاقات الجديدة التي تم تعلمها والتعاريف الجديدة، وكيف تفعل شيئا جديدا، وأمور مهمة ينبغي تذكرها، فيكون كل ما ينبغي عليهم فعله هو الإجابة على كل فئة من هذه الفئات.

في معظم كتابات المهام المحددة، ينبغي أن يشجع الطلبة

على كتابة عبارات تامة بدلا من كتابة كلمات مفتاحيه فقط. لأن هذه المهام الكتابية – المحددة – سوف تجبر الطلبة على صياغة المفاهيم بعبارات واضحة ودقيقة، الأمر الذي ينجم عنه تعميق واضح في فهمهم، واستيعابهم الموضوع.

سجلات يومية الطالب Student Journals

قد يصبح سجل يومية الطلبة أكثر الأساليب المباشرة لتواصله واتصاله مع المعلم. وقد يكون هذا السجل ذا طابع يومي، ويميل إلى أن يكون تقريرا أقل التزاما بالمظاهر الشكلية والرسمية التي تسود سجل الطالب .

يشجع الطلبة على الكتابة حول ما قد تعلموه في الفترة الأخيرة، وتدوين ملاحظات حول الحقائق المهمة، والتعليق على خبرة التعلم الجديدة .

تصبح عملية قراءة المعلم للسجلات اليومية، من الأمور المرغوب فيها، كذلك الاستجابة للطلبة بالكتابة حول الموضوعات التي قرؤوها في الفترة الأخيرة.

فضلا عن إعانة الطلبة الذين يعانون من صعوبة صياغة فهمهم للموضوعات الرياضية الجديدة بعبارات واضحة، توفر عملية كتابة المهام المحددة في سجل يومية الطالب للمعلم فرصة ثمينة في تخمين، وتحديد فهم الطلبة للمبادئ والمفاهيم التي عرضت داخل الدرس.وسيجد الطلبة التعلم قد عزز وأن لديهم سجل كامل بما تعلموه.

سيبدأ الطلبة، الآن، بإدراك مشاركتهم في اتصال يومي ومباشر بالمعلم. إن العمل الإضافي الذي تتطلبه الكتابة في سجل اليومية هو أكبر من أن يكون وسيلة توفر للمعلم قدرة كافية لتلمس كثير من جوانب شخصية الطالب وعادات التعلم لديه.

العرض التفصيلي Exposition

إن الكتابة التي تستعرض التفاصيل هي أحد الأنشطة التي تستخدم لاستكشاف المزيد عن المواد التي يتم عرضها داخل الصف الدراسي، وذلك بغرض: مساعدة الطلبة على الفهم الأفضل للمواد المعروضة داخل الصف، ولتوسيع أو زيادة حجم المادة التي أخذت بنظر الاعتبار في الصف (انظر الفصل السابع حول"إثراء تدريس الرياضيات" للتمييز بين كلمتي "توسيع " و" زيادة").

يمكن استخدام بعض الأمثلة عن الكتابة الإيضاحية في سياق متابعة تدريس الرياضيات.

شرح مفهوم Explaining Concept: قد يطلب من الطلبة شرح مفهوم من المفاهيم الرياضية بأسلوبهم الشخصي، مثل "في أي من الحالات تستخدم عملية الضرب في حساب الاحتمالية؟" وفي أي الحالات يُستخدم الجمع في حساب الاحتمالات وهناك مثال آخر يصلح أن يكون موضوعا لكتابة الاستعراضية التي يحددها المعلم مثل "اربط مفهوم المحل الهندسي LOCUS باستخداماته السائدة في الحياة اليومية "، أو "اشرح أهمية نظرية فيثاغورث في علم المثلثات".

شرح خوارزمية (أو وصف عملية) Exploring An Algorithm (Or Describing A Process): يمكن أن يطلب من الطلبة عرض شرح، أو تفسير مكتوب عن كيفية إجراء عملية حسابية ما، مثل قسمة الكسور، أو تبسيط بعض الصياغات الجبرية . إن هذا النوع من النشاط يجذب الطلبة ويلفت انتباهم إلى ضرورة جرد أفكارهم وصياغتها بطريقة منطقية لجعلها واضحة وجلية عندما يطالعها الآخرون.

شرح نظرية Explaining Theorem: في هذا المقام، ستتم دعوة الطلبة بعدم الاقتصار على شرح وتوضيح نظرية محددة فحسب، بل إلى محاولة تبريرها والبرهنة على الفقرات المتعلقة بها.

قد تكون نظرية بسيطة أو معقدة، مثل" الخط المستقيم الذي يصل بين نقطتي منتصف ضلعي مثلث يوازي ضلعه الثالث ويساوي نصفه". ينبغي تشجيع لطلبة على شرح النظرية وتوضيحها بعباراتهم الشخصية دون الحاجة إلى إعادة صياغة ألفاظها، شريطة المحافظة على المعنى.

وصف أو تفسير رسم بياني Describing Or Interpreting A Graph: يمكن أن يعطى للطلبة منحنى رياضي ويطلب منهم محاولة توضيح انعطاف المنحنى Curve Inflection، ونقاط الانقلاب (Turning Point(s)، والميل Slope، أو أية خاصية يمكن استثمارها في وصف المنحنى.

وبالمقابل يمكن أن يعرض على الطلبة رسم وصفي Descriptive Graph، مثل رسم تخطيطي – إحصائي يتم انتقاؤه من إحدى الصحف، ويدعى الطالب إلى بيان وشرح ما يحمله هذا الرسم من معلومات للقارئ.

ينبغي أن لا تقتصر مساهمة الطالب على قراءة الرسم التخطيطي والشرح المباشر لما يراه، بل يجب تشجيعهم على تفسير ما يعرضه التخطيط .

وقد توفر الآلة الحاسبة – الرسومية مناخا يساعد الطلبة على تفسير الرسم التخطيطي للدوال متعددة الحدود أو الدوال المتسامية Transcendental.

مناقشة حل إحدى المسائل Discussing The Solution To A Problem: بعد الانتهاء من حل مسألة من المسائل،

يمكن أن يطلب من الطلبة كتابة شرح واضح للمسألة. ولن تقتصر فوائد هذا النشاط على إعطاء فرصة للطالب، أو لمجموعته، في التنعم بالنجاح في حل المسألة، ولكنها ستمنحهم عزما أكيدا على تأسيس هذا النجاح في التعبير عنه بألفاظ دقيقة. ولأن هذا الوصف اللفظي لتفاصيل حل المسألة سيساعد على ترسيخ فهمهم للحل.

كتابة مسألة Writing A problem: تعد عملية كتابة مسألة. وبالخصوص المسألة التي يعبر عنها بالكلمات Word Problem، إحدى التحديات الكبيرة التي تشخص أمام الطلبة، ومما ينعكس بشكل ملموس على موقفهم من هذا النشاط. لذا ينبغي تشجيعهم على كتابة المسائل، وأعداد إجابات لها.

يمكن أن تكون المسالة بالغة البساطة، مثل رسم أمثلة من الحياة اليومية، أو قد تغطي موضوعات عولجت داخل الصف في مراحل سابقة.

ينبغي عدم قصر تشجيع الطلبة على تغيير أرقام المسائل المنتشرة في الكتاب المنهج الدراسي، بل التوجه نحو دفعهم إلى اقتناص موضوع المسألة من خبراتهم اليومية، والتي ترتبط بصلة وثيقة مع التقانات والموضوعات التي تدور في درس الرياضيات بالمدرسة.

ربط الدلالة الرياضية مع مقالة محددة في جريدة أخبار Connecting the mathematical significance with a particular newspaper article: أما أن يطلب من الطلبة إيجاد مقالة تستخدم بعض الجوانب الرياضية لوصف موقف ما، أو قد يلجأ المعلم إلى اختيار بعض المقالات النموذجية من جرائد الأخبار المحلية ويكلف الطلبة بالكتابة عن الرياضيات الموجودة في تلك المقالات، وستكون هناك فوائد ملموسة من هاتين المهمتين.

ينبغي تشجيع الطلبة على التعبير بحرية عما يعتقدونه، وعن المكان الذي لاحظوا وجود تطبيق رياضي بين ثناياه.

وعليه، سيكون عملهم مستمرا دون أن تحدد له نهاية معلومة، الأمر الذي يسبغ على المهمة المحددة مزيدا من الإثارة والتشويق.

إعادة كتابة تفسير "غامض" بكتاب منهجي Rewriting An "Unclear" Textbook Explanation: قد يحدث في بعض الأحيان، بأن تفسير وشرح كتاب منهجي لمفهوم معين يتصف بغموض واضح بحيث يصعب على الطلبة فهمه.

وعندما يحس المعلم بأن عدم قدرة الطلبة على فهم الموضوع قد نشأ عن هذه الظاهرة، يستطيع أن يقترح على الطلبة إعادة كتابة التفسير بألفاظهم وعباراتهم الشخصية، وبأسلوب يسهل تناوله عند استخدام الكتاب المنهجي في درس قادم.

لذا سيكون على الطلبة أن لا يتوقفوا عند حدود التأكد من فهمهم للمفهوم، بل ستتوفر لهم فرصة إعادة صياغة ألفاظ الموضوع، الأمر الذي سيزيد من تعميق فهمهم وإدراكهم لتفاصيل المفهوم المطروح.

وصف شكل هندسي Describing A geometric Figure: إن افضل طريقة لأعداد مهمة محددة - مكتوبة تصف شكلا هندسيا، ستكون بجعل الطلبة يتخيلون بأنهم على وشك وصف ذلك الشكل لصديق ما على الهاتف.

ينبغي أن يطلب منهم، بعد ذلك، أعداد عبارات واضحة تعبر عن وصفهم للرسم الهندسي.

يتطلب هذا النشاط، من الطلبة، التفكير بطريقة منطقية، وعميقة، وانتقاء الكثير من الأفكار المهملة.

تعميم مفهوم Generalizing A Concept: كثيرا ما يعرض مفهوم ما، ويبقى حبيسا في صيغة مختصرة concise. يتسم التعميم بمحدودية استخدامه داخل الصف بسبب المحددات الزمنية. وقد يبعث المعلم روح التحدي، داخل الصف، بتأمل موضوع اليوم (على سبيل المثال، التحليل العاملي للعامل ثلاثي الحدود Trinomial) ودعوة الطلبة إلى تعميم الموضوع (على سبيل المثال، التحليل العاملي).

قد يطلب من الطلبة تأمل مبرهنة فيثاغورث وتحديد إمكانية تعميمها إلى أساس يزيد على 2 (مبرهنة فيرمات الأخيرة)، أو أن اعتبار الأبعاد الثلاثة قد يوفر فرصة للبرهنة على الوضوح Enlightening، أو فيما إذا كان ممكناً التعميم على المثلثات بدلا من المثلثات قائمة الزاوية (قانون جيوب التمام). في أي حالة من الحالات السابقة، ينبغي أن يكون التحدي مفتوحا وغير محدد، على أن يكون موضوع التعميم خيارا شخصيا للطالب. وقد تكون بعض التعميمات صحيحة، بينما تكون أخرى بعيدة عن الصحة. قد لا يتوقع المعلم بعض تعاميم الطلبة بين الفينة والأخرى (تبرهن، علاوة على ذلك، على كونها إلتفاتة مدهشة له).

إن هذا النوع من الواجبات المفتوحة ستؤدي إلى بعض التحريات المتعة للطلبة، والتي تمنح جميع طلبة الصف منافع متعددة نشأت عن الخيال الشخصي للطلبة.

تقرير الرياضيات The Mathematics Report: **يوجد حشد من الأنشطة التي يمكن أعداد التقارير عنها. فقد**

يناقش الطلبة موضوعات من السجل التاريخي للرياضيات، مثل نمو وتطور أحد فروع هذا العلم (على سبيل المثال، هندسة الإحداثيات، أو الهندسة اللااقليدية) أو تتبع تاريخ تهذيب قيمة أو ثابت رياضي مثل π.

ويستطيع الطلبة، كذلك، إجراء تحريات في تاريخ الرموز الرياضية.

هناك المزيد من موارد المفاجأة والدهشة المطمورة في هذا الموضوع. والتي تجعل منه موضوعا مغريا.

إن أحد الموضوعات السائدة في تاريخ الرياضيات يكمن في دراسة مختصرة لسيرة أحد مشاهير هذا العلم .

توفر الرسوم التخطيطية للوصف النقدي المتصل بمجموعة الكتب والمؤلفات في حقبة من الحقب صورة معبرة عن الرياضيات، فضلا عن تفاصيل ممتعة من قصة حياة ذلك العلم الرياضي.

وقد يناقش الطلبة الجدل والخلاف الذي ظهر عبر مراحل نمو الرياضيات وتطورها. فعلى سبيل المثال، هناك الكثير من النظريات التي أطلق عليها أسماء أناس لم يشاركوا في اختراعها - نظرية سمسون Simson's Theorem في الهندسة التي لم يكن يعرفها ألمع اختصاصي الهندسة في القرن السابع عشر روبرت سيمسون، لكنها على الأرجح قد نشأت على يدي العالم الرياضي وليم ولاس Wiliam Walace في عام 1797، بعد فترة طويلة من وفاة الأول!.

هناك جدل كبير يتركز حول هوية الرجل الذي قام بصياغة وتطوير حل مناسب للمعادلة التكعيبية غير القابلة للتحليل، هل هو كاردانو Cardano أم تارتاجليا Tartaglia؟.

يستطيع الطلبة، أيضا، أعداد تقارير تناقش الاكتشافات الجديدة في حقول الرياضيات، مثل الحل الأخير لمسألة الخريطة ذات الألوان الأربعة Four Color Map Problem، أو برهان نظريات فيرمات الأخيرة .

يوفر تاريخ الرياضيات بيئة شديدة الخصوبة لمن يريد استكشافها وإيداع مكنوناتها التاريخية والعلمية في كتاباته، لذا ينبغي توظيف هذا الموضوع داخل الصف واستثمار كنوزه الثمينة.

معايير تقويم نماذج كتابات الطالب
Criteria for Evaluating Student Writing Samples

1. يميل معظم الطلبة إلى الإيجاز مبتعدين عن الاستيعاب، وتتسم الكتابة لديهم أما بالغموض والالتباس، أو تفتقر إلى الدقة . ينشأ الإيجاز لديهم، عن الاعتقاد بأن الإيغال في التفاصيل سوف يزعج القارئ ذي المعرفة العميقة بالموضوع.
2. قد لا يدرك الطلبة الفرق القائم بين الشروط الكافية والضرورية عند وصف شئ ما.
3. قد يذهب الطلبة إلى تضمين ما يعده صحيحا أو محتوما دون تبرير مناسب للأمر.
4. قد لا يدرك الطلبة ماهية مكونات البرهان الصحيح .
5. قد يقوم الطلبة بأعداد أشكال غير دقيقة، وبالغة الصغر بحيث لا يمكن العمل عليها، أو تفتقر إلى مؤشرات كافية توضح محتوياتها.

إن مجمل ما ذكر سابقا، لا يزيد عن كونه جزءا يسيرا من الأمور التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند معالجة موضوع كتابة الطلبة.

وهناك الكثير من مواطن الضعف الأخرى الكامنة والتي ينبغي علينا الاهتمام بها في بداية المهام الكتابية - المحددة، وعلى المعلمين أن يساعدوا الطلبة على الكتابة حالما يلاحظون إمارات ضعف ظاهرة لدى طلبتهم.

يبقى السؤال المطروح حول تقييم الكتابة من وجهة نظر نحوية ولغوية يفتقر إلى إجابة حاسمة.

لسنين عديدة رفع الطلبة شعار "الصف الكامل هو الصف الذي يتقن اللغة الإنجليزية" " Every Class is English Class"، وهناك الكثير من المعلمين الذين يذهبون هذا المذهب وما زالوا يشاركون في تبني هذه الفلسفة.

وكذلك يوجد آخرون في مجتمع تعليم الرياضيات ممن يعتقدون بأن إيلاء قواعد اللغة اهتماما زائدا سوف ينجم عنه إبعاد الطلبة عن المضمون الرياضي، لذا تجدهم لا يأبهون بالضعف الموجود في البنية النحوية مبنى أو معنى والتي تسود في كتابات طلبتهم.

وإذا كان الأمر كذلك، ينبغي أن يوضح المعلم لطلبته بأن عدم التعليق على صرف الجملة ونحوها، ومباني عباراتها، ووضوح معانيها، لا يدل حتما على سلامة لغة الكتابة بمعايير العلوم النحوية والصرفية والدلالية، ولكن هذه العوامل قد تم تجاهلها لغرض تركيز الاهتمام كليا بالمضمون الرياضي الذي تعالجه.

فوائد أنشطة الكتابة في درس الرياضيات
Benefits Of Writing Activities In The Mathematics Classroom

قد تكون الكتابة حافزا على تنشيط المحادثة داخل الدرس، والتي بدونها لن يكون مثل هذا الأمر ممكنا. من أجل

هذا. وتساوقا مع معايير NCTM، ستكون مهام الكتابة – المحددة ضربة البداية لاستهلال هذا النوع من النشاط الإيجابي.

قد تصبح بيئة درس الرياضيات التي يقل الاهتمام فيها بالأمور الشكلية والرسمية، ومع زيادة وشائج الاتصال بين الطلبة ومعلمهم، أكثر ملائمة وتوافقا مع احتياجات الطلبة.

لذا، قد يستمتع الطلبة بعرض تقديمي للرياضيات اعد خصيصا لإشباع حاجاتهم، وسيكون المعلم أكثر إدراكا بمستوى التعلم لدى طلبته، وطبيعة احتياجاتهم، ومقومات شخصياتهم، وعمق إدراكهم للموضوع.

إن استعراض المواد التي تم تعليمها في مراحل سابقة، قد يصبح اعمق تأثيرا في المناخ التعليمي الذي تسوده أنشطة الكتابة بصيغ سجل الطالب، أو سجل اليومية، لذا استمر باعتماد استعراض المفاهيم التي تم تدريسها سابقا.

يمكن استخدام تقويم النظراء Peer Evaluation عند تبني آلية مهام الكتابة المحددة، سواء كانت المهام من نوع سجل اليومية، أو استعراضا تفصيليا، حيث يتم تبادلها بين الطلبة عند ألقيام بعملية تقويم كتابات نظرائهم.

على الرغم من أن هذا النوع من النشاط قد ينشب عنه مستوى جديد من القلق، وبالخصوص لدى المراهقين، فإن حسن التعامل معهم واحتواء آثاره الجانبية سيفيد من هذا النشاط بوصفه مصدر انتعاش، وتنوير معرفي للصف.

إن معلمي الرياضيات هم الفئة الأقل اقتناعا بجدوى وقيمة الكتابة في درس الرياضيات. وبعد كل هذا، أليس واضحا بأن المنهج الدراسي لمادة الرياضيات قد اثقل وأتخم بموضوعات أقرت رسميا في ضوء الحاجات التربوية للولاية؟.

إن جل المعلمين يعمدون إلى تقييم تقدم كل طالب من طلبتهم على طريق التعلم، ومن خلال الخبرة اليومية داخل الصف. إن استجابات الطلبة لهذه الاختبارات في سجلاتهم، وسجل اليومية، والتقارير، والأشكال الأخرى من الاستجابات المكتوبة، ستعكس بصورة ملموسة قدراتهم على الفهم، والإبداع، ومستوى الإنجاز المتحقق داخل الصف.

إن عينة الإجابات – المدونة الآتية، والخاصة بالمهام المحددة لليوم الأول من عمل الصف في درس الهندسة ستوفر بعض العلامات التوضيحية لجميع المعلمين، سواء كانوا ممن يمتلكون الخبرة والدراية، أو ممن باشروا بالخطوة الأولى على هذا الطريق.

سؤال Question: ماذا تتوقع من معلمك خلال الفصل الدراسي الحالي، وماذا يستطيع المعلم أن يتوقعه منك؟

إجابات Replies

جوان: أنا أتوقع أن أتعلم أشياء جديدة وكيفية حل المسائل كذلك أتوقع المشاركة في بعض الرحلات. وكذلك أتوقع إن قمت بأداء جيد داخل الصف بأنك ستقوم بإخبار والدي بالأمر.

باتريشا: في الصف، أتوقع أن يكون معلمي متفتح الذهن ومدركا لأسلوبنا في حل المسائل، ولا يقتصر على تعليمنا لنمط واحد من الطرق بحيث يجعل الطلبة محصورين داخل هذا النمط المنفرد. وينبغي أن تكون مدركا بأن لا تكلفنا بواجبات بيتيه كثيرة، بل بكمية معقولة منها بحيث نستطيع عند عودتنا إلى البيت استبقاء الموضوعات التي تلقيناها حاضرة في أذهاننا. الاختبارات ينبغي أن تكون كل بضعة أسابيع، وليست بصورة دائمية.

جايمي: سيكون الاحترام على رأس قائمة الموضوعات التي يتوقعها المعلم مني، وكذلك تقديم واجباتي اليومية في مواعيدها، وأن أكون لطيفة مع زميلاتي بالصف، وأن اقدم إلى الصف وقد أكملت تحضير الدروس، وأكون متهيئة له، وأن أصغي بانتباه إلى ما تقوله المعلمة.

فنزنت: ما تتوقعه مني هو بذل جهد متميز ومكرس، والمشاركة الفاعلة داخل الصف، وإذا احتجت إلى مساعدة ما فإني سألجأ إلى إخبارك بالطبع.

تم اقتطاع الفقرات الآتية من سجل يومية جملة من الطلبة بوصفها عينة يمكن الاستفادة منها.

طالب 1: تعلمت كيفية حل المعادلات الجذرية، في هذا اليوم. الجذر في المعادلة يعني الجذر ذا القيمة الموجبة فقط.

المعادلة التي تحوي جذرا يطلق عليها معادلة جذرية على سبيل المثال، $\sqrt{x} = 7$.

يمكن حل المعادلة الاعتيادية بالإضافة، أو الطرح من كلا طرفي المعادلة. لكن ينبغي التأكد من المعادلة الجذرية لأن الأجوبة قد لا تكون صحيحة على الدوام.

1. عرض المعلم الأمثلة الآتية:

$$\sqrt{2x-5} = 7$$
$$(\sqrt{2x-5})^2 = 7^2$$
$$2x - 5 = 49$$
$$2x = 54$$
$$x = 27$$

الجواب:

التحقق:

$$\sqrt{2x-5} = 7$$
$$\sqrt{2(27)-5} \overset{?}{=} 7$$
$$\sqrt{54-5} \overset{?}{=} 7$$
$$\sqrt{49} \overset{?}{=} 7$$
$$7 = 7$$

2. بعدها قام المعلم بعرض مثال آخر علينا، لكننا في هذه المرة لم نستطع التحقق من إحدى الإجابات.

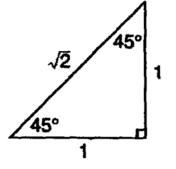
$$\sqrt{4x-3} = -4$$
$$\left(\sqrt{4x-3}\right)^3 = -4^2$$
$$4x - 3 = 16$$
$$4x = 19$$
$$x = \frac{19}{4}$$

التحقق:

$$\sqrt{4x-3} = -4$$
$$\sqrt{4(\frac{19}{4})-3} \overset{?}{=} -4$$
$$\sqrt{19-3} \overset{?}{=} -4$$
$$\sqrt{16} \overset{?}{=} -4$$
$$4 \overset{?}{=} -4$$ كلا

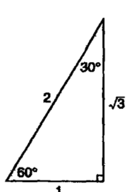
أتساءل لماذا حصل هذا؟

طالب 2: دار درسنا، هذا اليوم، حول مثلثين من نوع خاص هما مثلث 45 – 45 – 90، ومثلث 30 – 60 – 90 وهذه هي القواعد التي تنطبق عليهما:



إن المثلث أعلاه هو الذي يطلق عليه مثلث 45 – 45 – 90 لأنه عبارة عن نصف مربع.

والمثلث التالي هو 30 – 60 – 90 لأنه يشبه الشكل الرباعي – المثلث. وقد وضحت المعلمة موضوع مكافئة المثلث الأول لنصف المربع، والثاني النصف المستطيل لكنني لم استطع فهم ذلك.



بعدها قامت المدرسة بعرض مثالين استطعت تتبعهما وفهم مضامينها، تضمن الأول إن الضلع الذي يقابل زاوية 30^o يساوي نصف قياس وتر المثلث، والثاني تضمن إن الضلع المقابل لزاوية 60^o يساوي نصف قياس وتر المثلث مضروبا في $\sqrt{3}$.

أنا احب درس الهندسة لأنه يستخدم المخططات التوضيحية والرسوم بحيث تستطيع مشاهدة الأمور التي تقوم بها.

طالب 3: تعلمت في درس اليوم إيجاد مساحة متعدد الأضلاع المنتظم Regular Polygon بواسطة الصيغة

A = ½ (العامد) × (محيط الشكل)(*)

لقد عرض لنا المعلم طريقة اشتقاق هذه الصيغة باستخدام صورة لمتعدد الأضلاع المنتظم، ثم عمد إلى تقسيمه إلى مثلثين متساويي الساقين تتطابق قاعدتاهما وارتفاعاهما.

وبما أن مساحة كل مثلث منهما =2/1 القاعدة × الارتفاع، فإن مجموع جميع المساحات الصغيرة يساوي المساحة الكلية لمتعدد الأضلاع المنتظم.

خلاصة SUMMARY

إن الكتابة في درس الرياضيات قد اكتسبت قبولا وباتت أكثر شيوعا خلال السنين الأخيرة. يضاف إلى ذلك، ان اعتبار عملية الكتابة موردا خصبا لا يمكن إهماله أو غض الطرف عنه ضمن الأنشطة التي تسود الصف المدرسي، اصبح مصدرا يعود بالفائدة على المعلم الذي يحصل عليه من سجلات طلبته بأشكالها المتعددة.

ستتوفر للمدرسين فرصة عظيمة ومفيدة، في هذا المقام، لكي يباشروا عملية إنشاء اتصال منتظم مع طلبتهم من خلال هذا المورد المهم

(*) العامد Apothem: هو نصف قطر الدائرة التي تحيط بالشكل متعدد الأضلاع – المنتظم.

تمارين Exercises

1. كيف ستستجيب إلى التعليق الآتي، والذي طرح من تلميذ في أحد دروس الرياضيات "إننا لا نقوم بأية عملية حسابيه داخل درس اللغة الإنجليزية، فلماذا نلجأ إلى الكتابة داخل درس الرياضيات؟"
2. اختر موضوعا قد قمت بعرضه أثناء تعليمك مادة الرياضيات في أحد الصفوف. قارن واعمد إلى توضيح المادة التي قد دونها طالب من الطلبة في السجل مع آخر قد أودعها في سجل يومياته حول نفس الموضوع الرياضي.
3. طلبت إحدى طالباتك مساعدة في تخطيط مقطع من شرح توضيحي تود تدوينه حول مسلسلة فايبوناشي Fibonacci Sequence، أو مثلث باسكال Pascal Triangle. تأمل الطالبة أن تقدم بحثها إلى مجلة الرياضيات بالمدرسة لاحتمال الموافقة على نشرها. ما هي طبيعة المقترحات التي ستقدمها لهذه الطالبة؟.
4. حددت مهمة حول كتابة بحث يستهدف شرح أحد دروس الرياضيات التي قمت بأعدادها، تتدرج من الطالب العادي إلى الأفضل. اتسمت بعض الأوراق التي قدمتها الطالبة بكونها هزيلة، ومكتوبة بأسلوب روتيني تسوده اللامبالاة، وتعكس بوضوح افتقارها إلى أي جهد صادق أو حقيقي . ما هو طبيعة التصرف الذي ستقوم به ازاء هذه الحالة؟
5. قام طالب، لغته الأم ليست اللغة الإنجليزية، بتقديم ورقة بحث تحوي شرحا يمتاز بمحتوى علمي رصين لكنه يعاني من أخطاء نحوية كبيرة، وأخطاء إملائية، ودلالية، وأمور لغوية مقاربة. هل ستقوم بتصحيح عبارته الإنجليزية؟ ولماذا؟
6. اختر مقطعا صعبا من أي فصل من كتاب دراسي يستخدمه طلبتك. ثم ادعهم إلى إعادة كتابته بالطريقة التي يرونها أكثر وضوحا للقارئ. ثم دع، جميع الطلبة، يشاركون في مناقشة المقاطع التي أعادوا كتابتها في مجاميع سغيرة، واترك الفرصة لكل مجموعة تقرر أي مقطع من المقاطع المطروحة للمناقشة هو الأكثر وضوحا.

مراجع مقترحة Suggested References

التحفيز Motivation

Ames, Carole and Russell Ames, Eds. Research on Motivation. San Diego, CA: Academic Press, 1989.

Carr, Martha. Motivation in Mathematics. Hampton Press, 1995.

Henson, Kenneth T. Secondary Teaching Methods. Lexington, MA: D.C. Heath, 1981, 165 - 167.

Johnson, David R. Motivation Counts: Teaching Techniques That Work. Dale Seymour Publications, 1997.

LaConte, R. T. Homework as a Learning Experience. Washington, DC: National Education Association, 1986.

McEntire, Arnold, and Anita Narvarte Kitchens. "A New Focus for Educational Improvement Through Cognitive and Other Structuring of Subconscious Personal Axioms." Education 105, no. 2 (Winter 1984).

Orlich, Donald C., et al. Teaching Strategies: A Guide to Better Instruction. Lexington, MA: D. C. Heath, 1985, chap. 6.

Sobel, M. A., and E. M. Maletsky. Teaching Mathematics, A Sourcebook of Adis, Activities, and Strategies, 2d ed. Englewood Cliffs, NJ. Prentice - Hall, 1988.

Stipek, Deborah J. Motivation to Learn: From Theory to Practice. Englewood Cliffs, NJ: Prentice - Hall, 1988.

Weinert, Franz, and Rainer Kluwe, eds. Metcognition. Motivation, and Understanding. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

Wlodkowski, R. J. Motivation. Washington, DC. National Education Association, 1986.

المساءلة Questioning

Cangelosi, James S. "Increasing Student Engagement During Questioning Strategy Sessions." Mathematics Teacher 77 (1984): 470.

Costa, Arthur. "Teacher Behaviors That Enable Student Thinking." In Developing Minds: A Resource Book for Teaching Thinking. Arthur Costa, Ed. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development, 1985, 125 - 137.

Fey, James T. Patterns of Verbal Communication in Mathematics Classes. New York: Teachers College Press, 1970.

Gavelek, James, and Taffy Raphael. "Metacognition, Instruction, and the Role of Questioning Activities." Chap. 3 of Instructional Practices. Vol. 2 of Metacognition, Cognition, and Human Performance. D. L. Forrest - Pressley, G. E. MacKinnon, and T. Gary Waller, eds. Orlando, FL: Academic Press, 1985.

Henderson, Kenneth B. "Anent the Discovery Method." Mathematics Teacher 50(1970): 287.

Interactive Mathematics Program. Introduction and Implementation Strategies for the Interactive Mathematics Program. Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 1998.

Kilpatrick, Jeremy. "Inquiry in the Mathematics Classroom." Academic Connections. New York: The College Board, Summer 1987.

Orlich, Donald C., et al. Teaching Strategies: A Guide to Better Instruction. Lexington, MA: D. C. Heath & Co., 1985, pp. 161 - 200.

Redfield, Doris, and Elaine Rousseau. "A Meta - analysis of Experimental Research on Teacher Questioning Behavior." Review of Educational Research 51, no. 2 (1981): 237 - 245.

Swing, Susan, and Penelope Peterson. "Elaborative and Integrative Thought Problems in Mathematics Learning." Journal of Educational Psychology 80, no. 1 (1988): 54 - 66.

Walsh, Debbie. "Socrates in the Classroom." American Educator (Summer 1985): 20 - 25.

Wilen, W. W. Questioning Skills for Teachers. Washington, DC: National Education Association, 1987.

_____. Questions, Questioning Techniques, and Effective Teaching. Washington, DC: National Education Association, 1987.

Wolf, Dennis Palmer. "The Art of Questioning." Academic Connections. New York: The College Board, Winter 1987.

Wong, Bernice. "Self - Questioning Instructional Research: A Review." Review of Educational Research 55, no. 2 (Summer 1985): 227 - 268.

Effective Strategies الاستراتيجيات الفعالة

Bauer, Madeline J., and Joseph P. Fagan. "MATHCOUNTS." In Developing Mathematically Promising Students. Linda Sheffield, Ed. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1999, 297 - 302.

Bennett, Albert B., Jr., and Eugene Maier. "A Visual Approach to Solving Mixture Problems." Mathematics Teacher 89, no. 2 (February 1996): 108 - 111.

Bezuszka, Stanley. Tessellations: The Geometry of Patterns. Creative Publications, 1977.

Bidwell, James K. "Humanizing Your Classroom with History of Mathematics." Mathematics Teacher 86, no. 6 (September 1993); 461 - 464.

Blank, Rolf K., Doreen Langesen, Marty Bush, Suzanne Sardina, Ellen Pechman, and David Goldstein. Mathematics and Science Content Standards and Curriculum Frameworks. Washington, DC: Council of Chief State School Officers, 1997.

Boles, Martha, and Rochelle Newman. Universal Patterns. Pythagorean Press, 1990.

Brandon, Paul R., Barbara J. Newton, and Ormrod W. Hammond. "Children's Mathematics Achievement in Hawaii: Sex Differences Favoring Girls." American Educational Research Journal 24, no. 3 (Fall 1987): 437 - 461.

Britton, Jill, and Dale Seymour. Introduction to Tessalations. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications 1989. Palo Alto, CA.

Brookhart, Clint. Go Figure! Using Math to Answer Everyday Imponderables. Lincolnwood, IL: Contemporary Publishing Group, 1998.

Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry: 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1969.

Crowley, Mary L. "Student Mathematics Portfolio: More Than a Display Case." Mathematics Teacher 86, no. 7 (October 1993): 544 - 547.

Davis, Robert, Elizabeth Jocksuch, and Curtis McKnight. "Cognitive Processes in Learning Algebra." Journal of Children's Mathematical Behavior 2, no. 1 (Spring 1978).

Dossey, John A., Ed. Confronting the Core Curriculum: Considering Change in the Undergraduate Mathematics Major. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1998.

Educational Psychologist 23, no. 2 (Spring 1988).

Ellis, Arthur K. "Planning for Mathematics Instruction." Teaching Mathematics in Grades K - 8, 2d ed. Thomas R. Post, ed. Boston: Allyn & Bacon, 1992.

Geometry Center Hyperbolic Geometry Exhibit Welcome Page:

www.math.ubc.ca/~robles/hyperbolic/index.html.World Wide Web.

Greenberg, Marvin Jay. Euclidean and Non - Euclidean Geometries. New York: W. H. Freeman, 1993.

Gurkewitz, Rona, and Bennett Arnstein. 3 - D Geometric Origami. New York: Dover Publications, 1995.

Lefrancois, Guy R. Psychology for Teaching. 8th ed. Belmont, CA: Wadsworth, 1994.

Leinhardt, Gaea, and Ralph T. Putnam. "The Skill of Learning from Classroom Lessons." American Educational Research Journal 24, no. 4 (Winter 1987): 557 - 587.

Mathematical Sciences Education Board - National

Research Council. High School Mathematics at work: Essays of Examples for the Education of All Students. Washington DC: National Academy Press, 1998.

Mitchell, Julia H., Evelyn F. Hawkins, Pamela M. Jakwerth, Frances B. Stancavage, and John A. Dossey. Student Work and Teacher Practices in Mathematics. Washington, DC: National Center for Education Statistics, 1999.

Mu Alpha Theta. www.mualphatheta.org.

Owens, Douglas T. Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics. New York: Macmillan, 1993.

Piez, Cynthia, and Mary H. Voxman. "Multiple Representations: Using Efficient Prespectives to Form a Clearer Picture." Mathematics Teacher 90, no. 2 (February 1997): 164 - 166.

Reed, Stephan K., and Michael Ettinger. "Usefulness of Tables for Solving Word Problems." Cognition and Instruction 4, no. 1 (1987): 43 - 59.

Riley, Mary S., and James G. Greeno. "Developmental Analysis of Understanding Language about Quantities and of Solving Problems." Cognition and Instruction 5, no. 1 (1988): 49 - 101.

Schattschneider, Doris. Visions of Symmetry: Notebooks, Periodic Drawings & Related Works of M. C. Escher. W. H. Freeman, 1990.

Sommers, Kay, John Dilendik, and Betty Smolansky. "Class Activities with Student - Generated Data." Mathematics Teacher, 89, no. 2 (February 1996): 105 - 107.

Stigler, James W., and James Hiebert. The Teaching Gap. New York, NY: The Free Press, 1999.

Swing, Susan R., Karen C. Stoiber, and Penelope L. Peterson. "Thinking Skills Versus Learning Time: Effects of Alternative Classroom - Based Interventions on Students' Mathematics Problem Solving." Cognition and Instruction 5, no. 2 (1988): 123 - 191.

Takahira, Sayuri, Patrick Gonzales, Mary Frase, and Laura H. Salganik. Pursuing Excellence: A Study of Twelfth - Grade Mathematics and Science Achievement in Internationa Context. Washington. DC: National Center for Education Statistics, 1998.

Venters, Diana, and Elaine Krajernke Ellison. Mathematical Quilts. Key Curriculum Press, 1999.

Zhu, Xinming, and Herbert A. Simon. "Learning Mathematics from Examples and By Doing." Cognition and Instruction 4, no. 3 (1987): 137 - 166.

Writing Strategies استراتيجيات الكتابة

Azzolino, Aggie. "Writing As a Tool for Teaching Mathematics: The Silent Revolution." 1990 Yearbook, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

Barnes, Julia A. "Creative Writing in Trigonometry." Mathematics Teacher 92 (September 1999): 498 - 503.

Becker, Jerry P., and Shigeru Shimada. The Open - Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1997.

Countryman, Joan. "Writing to Learn Mathematics." In Functions. Princeton, NJ: Woodrow Wilson National Fellowship Foundation, 1985.

Davison, David M., and Daniel L. Pearce. "Using Writing Activities to Reinforce Mathematics Instruction." Arithmetic Teacher 36 (1988): 42 - 45.

Dougherty, Barbara J. "The Write Way: A Look at Journal Writing in First Year Algebra." Mathematics Teacher 89 (October 1996): 556 - 560.

Elliot, Portia C., Ed. Communication in Mathematics, K - 12 and Beyond. 1996 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1996.

Elliot, Wanda Leigh. "Writing a Necessary Tool for Writing." Mathematics Teacher 89 (February 1996): 92 - 94.

Evans, Christine Sobray. "Writing to Learn Math." Language Arts 61 (December 1984): 828 - 835.

Goldberg, Dorothy. "Integrating Writing into the Mathematics Curriculum." The Two - Year College Mathematics Journal 14 (November 1983): 421 - 424.

Havens, Lynn. "Writing to Enhance Learning in General Mathematics." Mathematics Teacher 82 (October 1989).

Hurwitz, Marsha. "Student - Authored Manuals As Semester Projects." Mathematics Teacher 83 (December 1990): 701 - 703.

Keith, Sandra. "Exploratory Writing and Learning Mathematics Classroom." Mathematics Teacher 81 (December 1988): 714 - 719.

Le Gere, Adele. "Collaboration and Writing in the Mathematics Classroom." Mathematics Teacher 84 (March 1991): 166 - 171.

Macintosh, Margaret E. "No Time for Writing in Your Class?" Mathematics Teacher 84 (September 1991): 423 - 433.

Mett, Coreen L. "Writing As a Learning Device in Calculus." Mathematics Teacher (October 1987): 534 - 537.

Miller, L. Diane. "Writing to Learn Mathematics." Mathematics Teacher 84 (October 1991): 516 - 521.

Nahrgang, Cynthia L., and Bruce T. Peterson. "Using Writing to Learn Mathematics." Mathematics Teacher 79 (September 1986): 461 - 465.

Powell, Arthur B. "Capturing, Examining and Responding to Mathematical Thinking Through Writing." Clearing House 71, no. 1, (September - October 1997): 21 - 25.

Pugalee, David, "Promoting Mathematical Learning

Through Writing." Mathematics in School, no. 1, Jan. 1998): 20 - 22.

Pugalee, David K. "Connecting Writing to the Mathematics Curriclulum." Mathematics Teacher 90 (April 1997): 308 - 310.

Robinson, Donita. "Student Portfolios in Mathematics." Mathematics Teacher 91 (April 1998): 318 - 325.

Schmidt, Don. "Writing in Math Class." In Roots in the Sawdust: Writing to Learn Across the Disciplines, Anne Ruggles Gere, Ed., Urbana, IL: National Council of Teachers of English, 1985, 104 - 116.

Self, Judy. "The Picture of Writing to Learn." In Plain Talk About Learning and Writing Across the Curriculum. Richmond, VA: Virginia Department of Education, 1987.

Socha, Susan C. "Math Class Logs." Mathematics Teacher 82 (October 1989): 511 - 513.

Williams, Nacy B., and Brian D. Wynne. "Journal Writing in the Mathematics Classroom: A Beginner's Approach." Mathematics Teacher 93 (February 2000): 132 - 135.



4 دور حل المسائل

The Role of Problem Solving

منذ سنين عدة بزغ موضوع حل المسائل بوصفه أحد الأمور التي تستأثر باهتمام بالغ في جميع مستويات الرياضيات المدرسية أشار المجلس الوطني لخبراء الرياضيات The National Council of Supervisors of Mathematics NCSM) إلى "أن تعلم حل المسائل هو المبرر الأساسي لدراسة الرياضيات" (NCSM, Position Paper on Basic Mathematical Skills, 1977) لم تتغير هذه القولة المنطقية كثيرا في هذه الأيام، بل أصبحت مسألة ومطلبا اكثر إلحاحا من السابق. وقد عبر المجلس الوطني لمدرسي الرياضيات (NCTM) بعبارة واضحة في "مبادئ ومعايير لرياضيات المدرسة" (NCTM, 2000) بأن "حل المسائل ليست الهدف الوحيد لتعلم الرياضيات فحسب، ولكنها أداة أساسية من أدواتها". وقد ذهب المجلس بعيدا في هذا الشأن بحيث ذهب إلى القول بأن "استراتيجيات حل المسائل قد تم تعلمها مع مرور الوقت، وطبقت في سياقات محددة، فأصبحت اكثر تهذيبا، واشد إحكاما، ومرونة نتيجة لتعدد استخداماتها في مسائل ومواقف معقدة". ولقد أصبحنا، بالحقيقة، على اتفاق شبه تام، بأننا قادرين على أن نخطو خطوة إضافية، بحيث نستطيع القول بأن حل المسائل هي ليست مهارة ينبغي تدريسها وتوظيفها في ميدان العلوم الرياضية، ولكنها منطق محكم يصلح لأن يوظف في تجاوز "المشاكل" اليومية التي تعترضنا على ارض الواقع، أو عند صنع القرار في مختلف الأنشطة، لذا فإنها ستسهم، دون شك، في خدمة الإنسان طيلة فترة حياته!.

وهذا هو بالحقيقة الموضوع الأساسي الذي سنتبناه طيلة رحلتنا مع مفردات هذا الفصل وفقراته المختلفة.

في حالات متعددة، يبدو بأن الطلبة يظنون (نتيجة لقلة خبرتهم وعدم كفايتها) بأن المسالة يمكن أن تحل بطريقة واحدة فحسب، وعلى وجه الخصوص، "النوع" الذي تمت دراسته داخل الصف المدرسي (يعني مسائل الحركة، ومسائل العصر، ومسائل المزيج، وهكذا).

ويشعر الطلبة، في أحيان كثيرة، بأن المعالجة الجبرية هي الوسيلة الوحيدة التي تنجح بالوصول إلى حل صحيح.

بيد أن التطورات التقنية المذهلة، خلال الأعوام القليلة الماضية، قد أحدثت تغييرا ملموسا في طريقة معالجتنا وزاوية منظورنا صوب الرياضيات، بحيث اصبح منظورنا السابق مهجورا وبحاجة إلى إعادة جوهرية في صياغاته.

فالكثير من أدلة المناهج الدراسية للولايات، بدأت الآن تشجع الطلبة على التفكير "خارج الصندوق الذي أسرتنا فيه المعالجات القديمة". وتحت هذه الظروف المستحدثة فإن الحل الجبري لمسألة ما لم يعد الحل الوحيد أو الإجراء المقبول، ولا الحل الذي يستخدم أنماطا مدركة، أو ذاك الذي ينشأ عن مخطط رسومي. وسيعرض هذا الفصل رسوما توضيحية لحلول متعددة.

في بعض الأحيان، لا يكون المعلمون على إدراك تام بالعدد الكبير من استراتيجيات حل المسائل، التي يمكن استخدامها للحصول على حلول فعالة ورائعة لكثير من المسائل الشائعة. فيقوم هؤلاء – دون قصد– بنقل مفهوم القائل "بعدم وجود سوى حل فريد للمسألة باستخدام المنهج الجبري" إلى

طلبتهم. في حين أننا نتفق على أن الجبر هو أحد الأدوات الأكثر فاعلية، وأنه لازال طريقا من بين حشد كبير من الطرائق التي ينبغي أن يأخذها الطلبة باعتبارهم عندما ينقبون عن حل ناجح لمسألة ما.

لقد صمم هذا الفصل للمعلم في أثناء الخدمة In Service، أو من يرغب بأن يكون في سلك الخدمة قريبا، والذي يمتلك رغبة صادقة في مساعدة الطلبة على السير باتجاه أن يكونوا ممن يحل المسائل الرياضية وما وراءها بنجاح وتميز.

سوف نقوم باختبار عشرة استراتيجيات، تستخدم على نطاق واسع بميدان حل المسائل في كل من الرياضيات وصنع القرارات في الحياة اليومية، أو مواقف حل المسائل المختلفة.

وستوفر هذه الاستراتيجيات، داخل قاعة الدرس، خطة بديلة لحل مجموعة من مواقف المسألة والتي تنشأ خلال المنهج الدراسي المقرر. لقد بالغنا في اختيار مسائل منتقاة لتوضيح هذه الاستراتيجيات، متوقعين بأن المعلمين سوف يستمتعون بالأمثلة الموضحة، ثم سيباشرون في تطبيق هذه الاستراتيجيات في برنامجهم التدريسي المنتظم.

ولتحقيق ذلك، فإن نوصي باستعراض ودراسة الأمثلة الخاصة بكل استراتيجية، بعناية، بحيث تصبح الاستراتيجية جزءا لا يتجزأ من عمليات التفكير لدى المعلم، أو يمكننا القول، بأن تكون جزءا مركزاً وناشطاً للأدوات المستخدمة في حل المسائل.

لقد نص المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM) في مبادئه ومعاييره الخاصة بالرياضيات المدرسية (2000) على انه "حالما يصل الطلبة إلى المراحل المتوسطة، ينبغي أن يكونوا ماهرين بتمييز متى تكون مجموعة الاستراتيجيات المطروحة مناسبة للاستخدام، وأن يكونوا قادرين على حسم موضوع: متى، وأين، وكيف يمكن استخدامها.

في المدارس الثانوية، ينبغي أن يكون الطلبة على احتكاك دائم بجملة واسعة من الاستراتيجيات، وقادرين على اختيار الاستراتيجية المناسبة للمسألة، وقادرين على تكييف وإبداع استراتيجيات".

كيف سنستطيع الوصول إلى هذه الأهداف المقصودة، هو هدف هذا الفصل، والغاية التي يصبو إلى تحقيقها على ارض الواقع.

على الرغم من أن جل المسائل يمكن حلها باستخدام تقانات التجريب – و – الصدق Tried – and – True للجبر والهندسة (وقد قمنا بعرض هذه الحلول أيضاً)، فإن المنهج الميكانيكي البحت يمتاز بالكفاءة، والجمال، والأناقة التي تتصف بها الرياضيات. وفي حالات كثيرة، تم عرض استراتيجيات حل المسائل كطرائق بديلة تسهم في جعل حلول المسائل اكثر سهولة، واكثر دقة وصفاء، وأقرب كثيرا من حدود الفهم، وعليه ستكون اكثر إمتاعا!.

حاولنا، خلال الفصل، أن نظهر للعيان كيف بزغت كل من هذه الاستراتيجيات وكيفية استخدامها في مواقف الحياة المختلفة. وقد نرى بين الحين والآخر أناس يوظفون بعض أو جزء كبير من هذه الاستراتيجيات في اتخاذ قراراتهم العادية دون أن يكون لديهم أية دراية بها.

إن هذا الانتقال إلى الحياة – خارج – المدرسة Life – outside – of – The – School سيضيف أهمية ملموسة للرياضيات التي يتناولها الطلبة بالدراسة، وسوف يحسن أداءهم اليومي بشكل كبير.

حاول أن تدرك وتؤمن بأن حل المسائل هو حجر الزاوية لكل برنامج رياضي ناجح، بعدها بادر إلى محاولة غرس أحاسيس ومواقف متحمسة حولها في برنامج تعليمك اليومي. إن هذا الجهد المركز سيجعل منك اكثر قدرة على حل المسائل، وبالمقابل، سيساعد على جعل طلبتك يسيرون على طريقك واستحقاقهم بجدارة لقب افضل من يحل المسائل.

ولن يكون التحسن لديهم مقتصرا على مواقفهم إزاء الرياضيات، بل سيشمل مهاراتهم، وقابلياتهم أيضاً. ينبغي أن يكون هذا الأمر هو الهدف الأسمى لديك.

ويجب أن لا يغيب عن بال أحدنا أهمية المفردات العلمية والموضوعات التي تم تدريسها، فبناء قاعدة صلبة لفهم وإدراك الرياضيات - هو بلا شك المهمة الملقاة على عاتق جميع معلمي الرياضيات - وسيبقى هدفا أساسيا. لقد رأينا بأن المنهج الموضوعي، لتعليم الرياضيات بصورة جيدة، سيتكامل بالتأكيد والتركيز على حل المسائل طوال برنامج التدريس. وبنفس هذا المنهج والروحية سيتم عرض موضوع حل المسائل في هذا الفصل.

هناك الكثير من الجوانب التي ترتبط بوشائج متينة مع حل المسائل، أحدها المنظور النفساني لمسألة حل المسائل، وكيف يدنو المرء من واقع المسألة وملابساتها، وكيف تؤثر الخصائص النفسية له أولها على أسلوب المعالجة والنجاح في حلها، وطبيعة الدور الذي تسهم به عملية حل المسائل.

سنحاول أن نستكشف هذه العوامل المؤثرة على حل المسائل بحيث يكون المعلم على اطلاع ودراية تامة بهذه المؤثرات، فيستطيع التغلب على المشكلات التي تجابه الطلبة، ويقترح طرائق مناسبة للعلاج.

إن حل المسائل مورد خصب ولا ينضب، وأداة مناسبة لإثراء مادة الرياضيات وزيادة خصوبة بيئتها التعليمية.

والمسائل التي تثير روح التحدي، في كثير من الأحيان تلك التي تمتاز بكونها "ذات مسار بعيد عن المألوف"of the beaten Path، وقد تؤدي إلى تحريات اكثر متعة في مواضيع رياضية تقيم خارج المنهج الدراسي التقليدي، كما أنها ستلعب دورا مهما بوصفها فرصة ثمينة لشحذ الذهن وتحريك آلة الفكر.

ينبغي أن يكون معلمو الرياضيات على استعداد دائم لتوفير بعض المواد المناسبة للطلبة النابهين والمتميزين، دون أن يفقدوا الاهتمام بالطلبة ذوي القابليات المحدودة، والذين سيفيدون من المسائل التي تذكي روح التحدي داخل الصف.

سنعرض في هذا الفصل لكثير من الآراء التي تتوجه صوب هذه الغاية مع أمثلة توضيحية تشد آزرها وتعمق فهمها.

طبيعة حل المسائل The Nature of Problem Solving

إن خصائص مكونات الفكر، العملياتي الحسي والعملياتي الشكلي، تبدو واضحة للعيان من خلال آلية التفكير السائدة في حل المسائل الرياضية. يستطيع الطالب العملي أن يرتب وينظم الأمور التي تعرض مباشرة، بينما يعجز عن تمييز، أو إدراك، أو تقييم الأمور التي تقع في دائرة الإمكان. ولن يكون هذا الطالب قادرا على تمييز خصائص وميزات الموقف الذي تختص به المسألة عندما يعاين بنيتها. إن طالب العملياتي الحسي لن يكون قادرا على توسيع المعالجة العقلانية لفرضية لا ترتبط بعرى وثيقة مع ارض الواقع الصلبة.

أما طلبة العمليات الشكلية Formal، فلهم القدرة على التعامل مع الفكر الافتراضي، والمقايسات المنطقية - الاستدلالية لقضية من القضايا. كما انهم قادرين على إنشاء جميع الارتباطات الممكنة للأشياء، وتمييز وعزل المتغيرات عند تحليلهم لموقف تتسم به مسألة ما.

تستخدم هذه الفئة من الطلبة استراتيجيات اكثر كفاءة من تلك التي يستخدمها الطلبة العمليون، من اجل هذا فهم افضل بكثير في ضوء متطلبات حل المسائل. وهم ميالون إلى توظيف عدد اكبر، واكثر تنوعا من العمليات التي يحاولون توجيهها صوب الهدف المطلوب، بالمقارنة مع طلبة العمليات الحسية. إن طلبة العمليات الشكلية قادرون على: رسم أشكال تخطيطية، وصياغة معادلات، وإنشاء علاقات مفتاحية Key Relationships، واستدعاء حقائق، وأمور أخرى تعد جميعها مهارات عقلية لها القدرة على إنتاج حلول ملائمة.

لقد أظهرت الدراسات، التي اهتمت بهذه الشريحة من الطلبة، بأنهم يستخدمون مجموعة متنوعة من العمليات، ويباشرون استدلالات عقلانية اكثر عمقا، وتقييماً لاحقاً لهذه الاستدلالات، من جانب

آخر فإن الشريحة الثانية من الطلبة، تبذل مزيدا من الجهود، وتجد صعوبة بالغة في حل مسائل بسيطة.

إن شريحة طلبة العمليات الشكلية تمتلك القابلية على إنجاز افضل للمسائل البسيطة والمعقدة في آن واحد. بالرغم من عدم كفاية البحوث التي عالجت موضوع تأثيرات مستوى التقدم والنمو على أداء حل المسائل، فانه لا تزال هناك إمكانية لمباشرة استدلالات منطقية بهذا الاتجاه.

وكلما ازداد الطلبة نضوجا، فانهم سيصبحون اكثر قدرة على تنظيم أفكارهم، بحيث يدخلوا في حسبانهم اكثر من متغير عند مباشرة حل المسائل. إن الاستدلال المنهجي، والتقريب المتعاقب هي اكثر الاستراتيجيات التي تكثر ملاحظتها كلما تطور إدراك الطالب وتعمقت معرفته.

إن هذه الخصائص تمتلك مضامين متنوعة تفيد في المناهج المعتمدة بتدريس حل المسائل. ويمكن إعداد بضعة اقتراحات للمنهج الدراسي والتي ستساعد الطلبة على تطوير وإنماء قابلياتهم.

إن من واجب المعلمين السعي باتجاه تنمية مهارات حل المسائل لدى جميع طلبتهم، سواء كانوا من فئة العمليات الحسية أو الشكلية. وينبغي أن يباشروا عملية بناء ترتكز إلى الإمكانيات التي يبديها طلبة هاتين الفئتين، مع إدراك تام لطبيعة العجز الذي يصاحب أنشطة: تنظيم، واختيار المنهج المناسب، أو تطبيق آليات حل المسائل بمهارة وإتقان، وخصوصا، عندما تتضمن المسألة متغيرات متعددة، أو علاقات متشابكة. إن المناهج المطلوبة لسد الفجوة المقيمة بين الحدس والعمليات الصورية هي تلك التي تساعد على تنظيم البيانات والعلاقات لأغراض العمليات المنهجية.

يضاف إلى ذلك، ينبغي تشجيع الطلبة على استخدام التخمين الذكي والاختبار، أو محاولة العمل على الاستراتيجية التي يميلون إلى توظيفها في حلهم. بهذه الطريقة، يمكن استيعاب وهضم المزيد من الاستراتيجيات المنظمة والفعالة، بصورة طبيعية، بناء على الفهم المدرك بالحدس أو البديهة، أو عمليات التخطيط التي يستطيع استخدامها الطالب على ارض الواقع.

ستتوفر لنا، بمرحلة لاحقة من هذا الفصل، فرصة مناسبة لتفحص جملة كبيرة من استراتيجيات حل المسائل، والتعامل معها بأسلوب يعمق فهمنا بمفرداتها ويرسخ مهارات إضافية على طريق توظيفها في العملية التعليمية.

هناك أسلوبان مناسبان لاختيار المسائل، والتدريس في حقل حل المسائل. الأسلوب الأول يركز على اختيار المهام التي تتطلب استخدام وتطبيق طرائق محددة. أما الأسلوب الثاني فيميل إلى اختيار المهام التي تتطلب فكراً حدسياً وخلاقاً وتسهم في تطوير قابليات حل المسائل العامة.

وهناك الكثير من الأمثلة على مسائل رياضية في أعمال مساق المدرسة الثانوية المعتاد، يمكن استخدامها في تنمية الإبداع وملكة الحدس لدى الطلبة.

إن جل محتويات رياضيات المدرسة الثانوية المعتاد يمكن أن تعلم مع أسلوب حل المسائل. ويعد كثير من المعلمين، هذا الأمر، من الموضوعات المستحدثة، والتي تتطلب خبرة، وجهدا مضافا، ومزيدا من التخطيط والتهيئة. يستطيع المدرسون البدء بتوجيه الطلبة للعمل على مسائل تؤدي حلولها إلى تحريات إضافية في المسار الذي يبتغيه المساق الدراسي، فينشأ عن ذلك تعميق في حب الاستطلاع، ويكون حافزا على الدراسة اللاحقة.

إن المعلمين الذين يميلون إلى متابعة حل المسائل من اجل ذلك فحسب، ينبغي أن يتيحوا لطلبتهم فرصة العمل على أزواج من المسائل التي تتشابه في هيكليتها، وتتضمن مهاما متماثلة. كما أن من المفيد للطالب أن يلجأ إلى تنمية الذاكرة لاحتواء المسائل، ويمتلك خبرة بجملة واسعة من هيكليات المسائل.

إن بعض النشاطات المفيدة قد تتضمن ما يأتي:

1- دع الطلبة يختارون من الزوج الثاني من المسائل، تلك التي تشابه الزوج الأول.

2- اطلب من الطلبة كتابة مسألة تحوي على نفس هيكلية العلاقات كما في الزوج الأول.

3- قم بتعميم بيانات وحل الزوج.

إن مثل هذه التمارين مع تمييز المسألة وترتيبها ستتيح للطلبة فرصة فحص العملية الشاملة لحل المسائل بحيث أن أنموذج ما وراء الإدراك Metacognition سيساعد على تطوير حساسية حل المسائل. إن هذا الأنموذج سيعمق، ببساطة، الوعي بالحاجة إلى مهارات حل المسائل والأهمية الخاصة التي تمتاز بها.

سنعالج، في هذا الفصل أيضاً، موضوع حل المسائل من منظور نفسي، مع رغبتنا بتنمية وإثراء استراتيجيات محددة لحل المسائل، تمتاز ببساطتها وسهولة استدعاءها.

كما سنقوم أيضاً بتفحص بضعة أمثلة على مسائل تحتوي على دعوة مفتوحة للمزيد من حل المسائل، وفهم اعمق المفاهيم الرياضية.

حل المسائل: رؤية نفسية
A Psychological View of Problem Solving

تتضمن جل آليات حل المسائل بعض أشكال المعلومات (مدركات حسية Perceptual، أو وظيفية Physiological، أو وحسية Sensory) مع توظيف مناسب لهذه المعلومات للوصول إلى حل مقبول.

عند أخذنا بنظر الاعتبار مسألة الفروق الفردية، سنجد في التنمية كما هو الحال في تنوع المحتوى، ومستويات التعقيد لحالات المسائل المختلفة، وجود صعوبة ملحوظة في الكشف عن حل بسيط، ومنفرد في دائرة حل المسائل (إذا تجاوزنا عن ذكر الأدوات أو الوسائل). منذ عام 1910، حدد جون ديوي John Dewey، في كتابه "كيف نفكر How We Think" (Boston: D. C. Health) خمسة خطوات لحل المسائل. وسنعرضها وفق الترتيب الآتي:

1- الإدراك بوجود المسألة (إدراك الصعوبة، والإحساس بالإحباط والفشل، أو التعجب، أو الشك).

2- تعيين المسألة – التوضيح والتعريف، ويتضمن بيان الهدف الذي ننشده، في ضوء تعريفه وفق الحالة التي تمخضت عنها المسألة.

3- توظيف الخبرات السابقة، مثل معلومات وثيقة الصلة بالمسألة، أو حلول سابقة، أو أفكار تفيد في إنشاء فرضيات، و قضايا تتعلق بحل المسألة.

4- فحص الفرضيات والحلول المحتملة، على التوالي، وإعادة صياغة المسألة إذا اقتضى الأمر ذلك.

5- تقويم الحلول واتخاذ قرار يستند إلى القرائن. ويتضمن ذلك، دمج الحلول الناجحة في ضوء الفهم الحالي، وتطبيقه في مراحل أخرى من المسألة ذاتها.

بالرغم من عدم اندراج معظم خصائص حل المسائل ضمن هذا الترتيب المنطقي، فإن تحليل ديوي لعملية التفكير في حل المسائل لم يواجه أية تعديلات أو تحسينات مقترحة لغاية هذا التاريخ.

لاحظ بأن هذا التحليل يتضمن كل من الجزء المأخوذ من المعلومات المستلم منها، والتعلم الاكتشافي Discovery Learning في سياق عمليات مترابطة – والتي يكون المتعلم فيها مشاركا فاعلا بعملية تعلمه الذاتي. ووفق التعاريف السائدة في الرياضيات، يعد عمل جورج بوليا George Polya في كتابه "البحث عن الحل How To Solve It" (Princeton University Press, 1945) عرضا لتقانات حل المسائل التي لا تقتصر على كونها ممتعة ومشوقة، ولكنها تهدف إلى ضمان بأن المبادئ التي تم تعلمها من الرياضيات سوف تنتقل على نحو واسع وعريض قدر الإمكان.

أطلق على تقانات اصطلاح البحث الموجه (الهيوريستيكا) Heurisitic (محاولة للكشف)، وهي استراتيجيات تساعد على حل المسائل. ولقد ذهب إلى القول بوجود "مقدار ضئيل من الاكتشافات" في حل أية مسألة. "قد تكون مسألتك متواضعة لكنها إذا شكلت تحديا لحب الاستطلاع لديك، وحملت أدواتك المبدعة على العمل، وإذا استطعت حلها بالمتاح لديك، فانك قد تعاني من التوتر، وستبتهج بلذة الاكتشاف".

لقد اقترح بوليا طرائق البحث الموجه الآتية:

1- حاول أن تفهم المسألة. ما هو الشيء المجهول؟ ما هي البيانات؟ ما هو الشرط؟ أرسم شكلا تخطيطيا، وضع مجموعة الرموز. وقم بعزل أجزاء الشرط.

2- ابتكر خطة، وحاول أن تجد الارتباطات المقيمة بين البيانات والمجهول. هل شاهدت مثلها من قبل؟ وهل تعرف مسألة مشابهة؟

3- باشر بتنفيذ الخطة، وقم بتفحص كل خطوة. هل تجد

بأن كل خطوة صحيحة؟ وهل تستطيع البرهنة على صحتها؟

4- انظر إلى الوراء، واختبر الحل الذي توصلت إليه. هل تستطيع فحص النتائج بطريقة أخرى، هل تستطيع أن تراها على عجل؟ وهل تستطيع استخدام النتائج، أو الطريقة في مسائل أخرى؟.

كشفت دراسة، في عام 1974، بأن المعلمين ينزعون بشكل عام إلى الاستجابات الاستظهارية باستثناء 5% من الصفوف الدراسية التي تمت مشاهدتها. وأن مثل هذا النوع من طرائق التعليم ينزع إلى تعزيز التفكير المألوف –الجامد– كما وأن التفكير المحدد Set Thinking يتعارض مع تقانات حل المسائل الأكثر فاعلية.

على سبيل المثال، اختبر سلسلة المسائل التي عرضها السيدين ليوشينز Luchins & Luchins في كتابهما الموسوم "جمود السلوك Rigidity of Behavior" (University Of Orgopness, 1959) تم تزويد الطلبة بالجدول الآتي، وطلب منهم حل كل مسألة تتعلق بجرار الماء Water Jars. بعد إعطائهم معلومات عن سعات Capacities الجرار الثلاثة، وطلب منهم احتساب كمية الماء المطلوبة في العمود الرابع من الجدول. (تم إدراج ثلاثة مسائل فقط من المسائل السبعة والتي أدرجت بالجدول الآتي).

رقم المسألة	سعة جرة الماء (Quarts)			الكمية المطلوبة
	A	B	C	(Quarts)
1	29	3	0	20
4	18	43	10	5
7	23	49	3	20

في كل من الحالات الستة الأولى، تم تعبئة الجرة الأكبر لحين امتلائها تماما، ثم بوشر بتفريغها في الجرار الأصغر حجما لحين الحصول على الكمية المطلوبة. وقد حاول، معظم الطلبة، حل المسألة السابعة بنفس الأسلوب، حتى عند تحذيرهم بضرورة "النظر بإمعان".

عرض بوليا جوانب متعددة لحل المسائل الرياضية، من الاستقراء Induction إلى المعالجة المعاكسة Working Backword.

دعنا نوضح، بالتفصيل، منهجه بالتعامل مع مسألة مشابهة لتلك التي نوقشت قبل قليل، والتي قام بعرضها لتوضيح آلية المعالجة المعاكسة.



1. دعنا نحاول إيجاد جواب للسؤال الدقيق: كيف تستطيع أن تجلب من النهر، ستة كوارتات Quarts بالضبط، من الماء إذا كان لديك وعاءان فقط، أحدهما دلو سعته أربعة كوارتات، والدلو الثاني سعته بستة كوارتات، ولا يحوي أي منهما على قياس؟.

[يبدأ فورا بتصوير الدلوين بدون أية علامة قياس (كما ذكرت المسألة)]. [بعدها] لا نعلم لغاية هذا الوقت كيف سننجح في قياس ستة كوارتات بدقة، ولكن، هل نستطيع أن نقيس شيئا آخر؟ (إذا لم تستطع حل المسألة المقترحة، حاول أن تحل – في البداية – مسائل مشابهة. وهل تستطيع أن تشتق أمرا مفيدا من هذه البيانات؟) [لاحظ المعلم بأن معظم الناس، عندما يواجهون بلغز a Puzzle، يعملون قدما، محاولين هنا وهناك، ومستمرين بالمثابرة].

2. لا يضيع الناس (ممن يمتلكون قدرات استثنائية) أو الذين توفرت لديهم فرصة كافية للتعلم في الرياضيات الصفية شيئا يزيد على العمليات التقليدية، وقتا كبيرا في مثل هذه المحاولات، وسيغيرون من مسارهم فيعملون بالطريقة المعاكسة [ذكر بايلو بأن الرياضي اليوناني بابوس Pappus قد أعطى وصفا مهما لهذه الطريقة – راجع وحدة إثرائية 93 "حل المسائل: الاستراتيجية المعاكسة"].

ماذا ينبغي علينا عمله؟ وما هو المجهول؟. دعنا نتصور الحل النهائي بأكبر وضوح ممكن. ودعنا نتخيل بأنه يوجد لدينا في هذا المكان 6 كوارتات، بالضبط، في الوعاء الكبير، وان الوعاء الصغير فارغ. (دعنا نبدأ من نقطة المطلوب، ونفترض بأن ما نبحث عنه هو موجود فعلا، يقول بابوس) [Polya, pp.198-199]. شرع بوليا بتوضيح الخطوات اللاحقة في حل المسألة. وقد طرح سؤالا "من أي سابقة Antecendent يمكن أن نشتق النتائج المطلوبة؟"، وقل إذا كان الوعاء الكبير ممتلئا تماما، وقد تم سكب ثلاثة كوارتات منه، بالضبط، يمكننا أن ننجز النتائج. كيف يمكن أن نفعل ذلك؟ حسنا، إذا بقي كوارت واحد فقط بالوعاء الصغير، إذن ينبغي أن نسكب ثلاثة بالضبط.

("دعنا نبحث في كم سيكون لاحق اللاحق؟"). لاحظ بأن هذا الأمر قد يحصل مصادفة، مهما حدث سابقا.

مما لا شك فيه، إن قيامنا بسكب أربعة كوارتات من الوعاء الكبير مرتان على التعاقب، "سنصل في آخر الأمر إلى شئ معروف مسابقا (هذه هي كلمات بابوس). وباتباع منهج التحليل، العمل بطريقة معاكسة، قد اكتشفنا التعاقب المناسب للعمليات".

ولما كان بوليا معلماً بارعاً فقد استخدم تقانات حل المسائل التي تتضمن كل من التعلم الجمعي والمتبصر. وقد أضاف جزءا مقوما Ingredient للحماسة الشخصية Personal Enthusiasm اموضوعه، واحتراما لقابليات طلبته.

قد نطلب اكثر مما يفعله مدرس في أي موضوع – والذي تم إعلامه، استخدم هذه المعلومات بأسلوب ماهر ومحنك، وبالمشاركة مع الطلبة، مع توفير فرصة مناسبة أمامهم: لاستكشاف، وتحليل، وتوضيح مهاراتهم.

تمهيدات حل المسائل

Problem Solving Preliminaries

حالما نبدأ مناقشتنا لحل المسائل في الصف، تظهر الحاجة إلى أن نأخذ بعين الاعتبار بعض القواعد الأساسية.

بصورة عامة، يتخذ الطلبة موقفا نفسيا محددا عندما يدنون من مسألة ما، وذلك بسبب توقعهم لحلول عددية بسيطة للمسألة، وعندما يظهر شئ صعب كجواب محتمل لها، يشكك الطلبة في عملهم فيعيدون المحاولة لمرة ثانية.

إن الموقف النفسي للطلبة قد يظهر جليا وبطريقة مثيرة. تأمل الأمثلة الآتية:

مسألة PROBLEM

أشر إلى كل من الأعداد المبينة في الشكل الآتي وبترتيب متتابع، مبتدئا بالعدد 1، وبأسرع وقت ممكن(*).

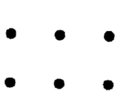
15	13 28	26 | 34	[illegible] 16 | 9	23	38 2
4 17	30	39	22 36	3	18
6 | 32	24	8 | 37	20 | 7 29 | 1	33 | 25	5
10	19 21	35	31 27	14	40 | 12

عندما يباشر الطلبة بهذا التحدي، الذي قد يبدو سهلا للوهلة الأولى، سيجدون بأن بوادر خيبة الأمل ومعالم الفشل ستظهر بسرعة. فالأمر ليس بالبساطة التي قد يتوهمها البعض، بالتنقل السريع بين عدد وآخر على الشكل، لأن الموقف النفسي سيولد انطباعا لدى الطلبة بأن الرقم اللاحق يمتلك نفس مقاس الرقم السابق.

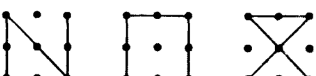
ولن يفلح الطلبة في تجاوز الموقف النفسي الموهم ما لم يدركوا حقيقته ويتجنبون – بوعي وإدراك تام – البحث عن أرقام بحجوم متساوية، الأمر الذي سيتيح لهم بالتنقل بين الأعداد، وفق التعاقب المطلوب، بسرعة اكبر.

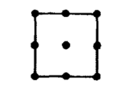
يمكن أن تنشأ أعراض متلازمة Syndrome – مشابهة مع المسألة الآتية.

مسألة PROBLEM باستخدام أربعة خطوط مستقيمة فقط، اربط بين النقاط التسعة الآتية، دون أن ترفع قلمك عن الورقة، أو إعادة الرجوع على نفس الخط المستقيم.



إن معظم الطلبة سوف يبدأون بإحدى المحاولات الآتية:



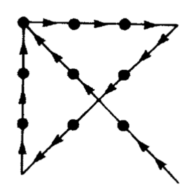


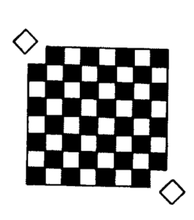
إن المحاولات الأخرى – المشابهة ستبوء أيضاً بالفشل. للتغلب على هذا الموقف النفسي، ينبغي تشجيع الطلبة على إبطال المحاولات الفاشلة. وسيجد الطلبة بأن البدء من إحدى النقاط، والبقاء داخل مصفوفة تتألف من تسعة نقاط هي محاولة لن تظفر بالنجاح. ولإبطال هذه المواقف النفسية يشجع لطلبة على إلغاء المحاولات الفاشلة. ويرون أن البدء ند نقطة واحدة وإبقاء في نفس المصفوفة المكونة من تسع نقاط أمر غير مجد.

ولإبطال هذا الموقف النفسي قل "لا تتحددوا بالمصفوفة فحسب، وبدلا من ذلك تأملوا قطعة الخط المستقيم التي تقع، جزئيا، خارج المصفوفة".

إن هذا النهج سيثمر عن الحل المطلوب كما يظهر أدناه:

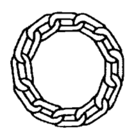
(*) اقترحت هذه المسألة بواسطة البروفيسور بريجيت روليت Brigitte Rollette من جامعة فيينا (النمسا).

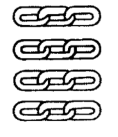




مسألة أخرى تعرض تقانة حل المسائل التي تعتمد مبدأ إبطال المحاولات الفاشلة ندرجها كما يأتي:

مسألة **PROBLEM** أعطيت لك أربعة قطع منفردة من سلسلة (طول كل منها ثلاثة حلقات)، بين كيف يمكن ربط هذه القطع الأربعة في دائرة مفردة، عن طريق فتح أو إغلاق ثلاثة حلقات، كحد أقصى.





إن المحاولة الأولى (التقليدية) ستتألف من قطع حلقة النهاية لكل من القطع الثلاثة الأولى. ابطل هذا الموقف النفسي بالقول "لا تقطع حلقة واحدة في كل قطعة" أو "اقطع جميع الحلقات في قطعة واحدة".

إن هذا سيؤدي إلى الحل بصورة مباشرة، نظرا لأن الحلقات الثلاثة المقطوعة يمكن استخدامها في ربط القطع المتبقية من السلسلة لتأليف الحلقة الدائرية المطلوبة.

إن مبدأ أساسيا آخر لحل المسائل سيرتكز إلى دعوة الطلبة بإدراج جميع المعلومات المتوفرة (أو المتضمنة) في المسألة. تأمل المسألة الآتية.

مسألة **PROBLEM**

تم إعطاؤك رقعة داما Checkerboard مع 32 قطعة حجر دومينو Dominoes (تغطي كل منها مربعين من رقعة الداما، بالضبط)، بين كيف يمكن لـ 31 قطعة من حجر الدومينو أن تغطي رقعة الداما مع إلغاء زوج مربعي الزوايا المتقابلة.

تظهر الخبرة بأن معظم الطلبة سيميلون إلى البدء بتظليل أزواج المربعات لأجل إكمال النمط المطلوب لحل المسألة. بيد إن هذه المحاولة لن يكتب لها النجاح. إضافة إلى ذلك، فإنها ستتمخض عن موقف يتسم بالفوضى، وبالخصوص، إذا استخدم الطالب مادة الحبر، بدلا من قلم الرصاص، في حل الرياضيات.

ينبغي تشجيع الطلبة على إعداد قائمة بجميع الحقائق التي تم إعطاؤها:

- يوجد 64 مربعا على رقعة الداما.
- يوجد 32 قطعة من حجر الدومينو، مساحة كل منها تساوي مربعين.
- تم إلغاء مربعين باللون الأبيض.
- تبقى 62 مربعا، فقط، على رقعة الداما المشذبة.
- يوجد 32 مربعا أسودا، و 30 مربعا أبيضا.
- عدد المربعات السوداء لا يساوي عدد المربعات البيضاء.
- كل قطعة حجر دومينو ينبغي أن تغطي مربعا اسودا وآخر ابيض اللون.

وعليه، فإن عدم تساوي عدد المربعات السوداء مع البيضاء، سيلغي إمكانية تغطية لوحة الداما المشذبة بواسطة 31 قطعة من حجر الدومينو، كما طلب في المسألة، وتكون المسألة قد حلت.

ينبغي أن يشدد المعلمون على أهمية إدراك أن هذه المسألة تعد محلولة، بالرغم من أن المطلب الأساسي في المسألة قد نجم عنه حل مخيب للرجاء!.

إن موقفا مناظرا للمسألة آنفة الذكر نجده شاخصا في سجل تاريخ الرياضيات حول حل ليونهارد ايولر Leonhard Euler الشهير" لمسألة التقسيم الثلاثي الأجزاء Trisection Problem". فلقد برهن ايولر على عدم إمكانية تقسيم أية زاوية تقسيما ثلاثي الأجزاء بواسطة المسطرة والفرجار، وهذا لا يعني بأننا لا نعرف كيف نفعل ذلك. إن مناقشة مثل هذا الحل يتطلب توظيف وقت جدير بالاهتمام!.

لا شك بأن افضل طريقة لتهيئة الطلبة كي يكونوا فعالين في حل المسائل تكمن في تزويدهم بعدة أمثلة تغطي جوانب متعددة من تقانات حل المسائل.

إن من الطبيعي أن يكون ذو فائدة كبيرة البدء بتصنيف التقانات المعروضة، رغم أن من الحكمة جعل الطلبة، يكتشفون بأنفسهم وبمرور الوقت التقانة المناسبة – غير المخصصة لحل مسألة محددة، لأن مثل هذا الأمر يتبوأ مكانة ميزة في عملية حل المسائل.

إن الإدراك الذاتي، وبالخصوص فيما يتعلق بعادات التعلم، سيساعد بشكل ملموس في عملية التعلم. إن ما وراء الإدراك أو المعرفة Metacognition يشير إلى المعرفة (والتصديق) بعمليات الإدراك، والتي تؤدي إلى التحكم النهائي بالنظام، والسيطرة أنشطة الإدراك.

عند عرض موقف مسألة ما، ينبغي أن تعالج البيانات الخام وتهذب إلى جواب مقبول. وتتألف المعالجة، بصورة عامة، من عملية متعددة المراحل Multi-Step تستلم كل مرحلة النتائج من المرحلة التي تقدمت عليها، مع استخدام كل ما يتوفر من معدات مخزونة في مستودع حلال المسائل من المهارات والمعرفة.

إن مرحلة التخطيط تتألف من عملية تطوير برنامج محدد التوقيتات للعمليات، والمصممة لمسائل محددة. ويعد القصور والإدراك الناجح للخطة الجيدة هو الإنجاز الأساسي في عملية حل المسائل، كما أنها تشكل الجزء الأكثر صعوبة من العملية التي سيتم تعليمها.

ذهب جون فلافيل John Flavell في مقاله الموسوم "مظاهر ما وراء الإدراك بحل المسائل"

("Metacognition Aspects of Problem Solving" (In The Nature of Intelligence, Erlbaum, 1976).

بأن ما وراء الإدراك هو عنصر أساسي في تطوير الطالب لخطة الحل. وبناء على ما ذهب إليه فلافيل فإن "ما وراء الإدراك يشير إلى عمليات الإدراك الذاتية أو أي شيء يرتبط بها، ولا تقتصر على الاطلاع على عمليات الإدراك، فحسب، ولكنها ترتبط أيضاً بمراقبة الذات، والانتظام، والتقويم، واتجاه النشاط الإدراكي".

تتضمن أنشطة ما وراء الإدراك إقامة الارتباط بين قضية المسألة، التي تم تفكيكها إلى أجزائها الجلية، والمعرفة والخبرات السابقة لدى الطلبة.

تستمر العملية لحين يمكن تصنيف المسألة إلى مجموعات مألوفة مسبقا، وجاهزة للحل.

إن القابلية على تصنيف والحصول على مجاميع لأنواع مختلفة من المسائل المتوفرة يعد أمرا ضروريا للعملية. وقد ظهر في بعض الأحيان الحاجة إلى تفكيك مكونات المسألة إلى أجزاء اصغر لكي تسهل عملية تبويبها وتصنيفها. إن مراقبة هذه العملية بواسطة حلال المسائل يعد أمر ضروريا، وسينجم عن الإدراك الذاتي القدرة على التحكم بالعملية.

إن مفتاح النجاح في حل المسائل يكمن في القدرة على التحكم بالعملية، لذا فإن من الطبيعي، بل من المرغوب فيه، أن تحدث نفسك (دون إصدار صوت Subvocaly) عندما تعمل على حل مسألة رياضية، ويعد هذا الأسلوب محاولة ذاتية للتحكم بعملية حل المسائل.

ولكي تكون متمكنا من عملية التحكم ينبغي أن تكون متضلعا بالمفردات الضرورية من البحث الموجه (الهيوريستيكا) بحيث تستطيع اختيار، ومتابعة النهج الصحيح للحل. إن تحدثك مع نفسك، سيتيح لك فرصة مراقبة عملية حل المسألة، وهو مفتاح سيمكنك من التحكم بالعملية.

هناك عدد من قرارات التحكم المكنة، والتي ينبغي أن تؤخذ بعين الاعتبار:

- قرارات طائشة **Thoughtless Decisions** تؤدي إلى دفع العلمية باتجاهات متبعثرة، ولا ترتكز إلى أية خبرات أو معرفة سابقة.
- قرارات نافذة الصبر **Impatient Decisions** قد تؤدي إلى إيقاف العملية كليا، أو إبقاء حلال المسألة بدون اتجاه محدد لطلب الحل الذي لا يقدر حتى على تحديد مسار واضح للاستنتاج سواء كان ناجحا ام فاشلا.
- قرارات بناءة **Construction Decisions** تتضمن مراقبة التحكم، بعناية، عند توظيف المعرفة والمهارات بطريقة ذات أهداف واضحة واستخدام طرق حلول مضبوطة وصحيحة، واجتناب تلك التي لا تمتلك فرصة النجاح.
- قرارات إجراءات فورية **Immediate Procedure Decisions** تتطلب عدم التحكم، لأنها تلجأ، ببساطة إلى طريق الحل المناسب المختزن في الذاكرة – طويلة الأمد.
- غياب قرارات **Nodecisions** وتنشأ عندما تكون قضية المسألة مربكة ومحيرة بحيث لا تنفع المعرفة أو الخبرة السابقة، ولا توفر دعما لحل المسألة، فيقر حلال المسائل بعجزه عن حلها!.

إن إدراك عملية حل المسائل تمثل الخطوة الأولى على تحقيق التحكم والذي سيمكن، بدوره، المتعلم من إيجاد طريق الحل الأمثل.

مقدمة إلى استراتيجيات حل المسائل
An Introduction to Problem-Solving Strategies

قبل أن تتوفر لنا فرصة مناقشة ماهية حل المسائل، ينبغي أن نحاول تحديد ما يكمن من معان وراء اصطلاح "مسألة".

إن المسالة هي عبارة عن موقف يجابه المرء ويتطلب حلا. ويمتاز الطريق الذي يؤدي إلى الحل بأنه لا يمكن معرفته بصورة مباشرة. في الحياة اليومية تبرز المسألة كأي شيء من المسائل الشخصية البسيطة مثل افضل استراتيجية لعبور الشارع (تتم، بصورة عامة، دون تفكير إضافي) إلى المشاكل الأكثر تعقيدا مثل كيف يمكن أن تركب دراجة جديدة. لا ريب أن عبور الشارع قد لا يكون مسألة سهلة في بعض المواقف، فعل سبيل المثال، إن الأمريكيين يكونون متيقظين بصورة جذرية عندما يزورون بلدا مثل إنجلترا، حيث لا تعمل إستراتيجيتهم التقليدية لعبور الشوارع، بصورة آمنة، في هذه البقعة الجديدة. والعكس صحيح أيضاً، لأن البريطانيين يعانون من نفس الشعور عند زيارة أحد بلدان القارة الأوربية حيث يكون النظام المروري باتجاه يعاكس ما يسود في بريطانيا.

إن هذه المواقف اليومية يمكن حلها، بصورة تقليدية، وبطريقة غير واعية Sub-consciously دون أن تضطرنا إلى اخذ ملاحظات صورية للإجراءات التي حققت لنا حلا مناسبا.

إن الشعور وإدراك ماهية طرائق واستراتيجيات حل المسائل (التي تسود حياتنا اليومية) تصبح اكثر وضوحا. عندما يسافر أحدنا خارج حدود البيئة التي يقطنها، فتشخص آنذاك أمامنا حقيقة عدم توافق أو تطابق أسلوب حياتنا اليومية وعاداتنا السلوكية مع الحالة الجديدة. من اجل هذا تبرز أهمية التكيف الواعي مع طرائق جديدة من اجل تحقيق أهدافنا التي تعبر إليها.

إن كثيرا مما نفعله يرتكز إلى خبراتنا القبلية Prior Experience، وكنتيجة لهذا الأمر، فإن تغيرا كبيرا سوف يحصل في مستوى التعقيد الذي نتبناه عندما نجابه المسألة التي تشخص أمامنا.

سواء تضمنت، المسألة التي نجابهها في حياتنا اليومية، اختيار الملابس التي نرتديها يوميا، أو الاتصال بصديق أو أحد معارفنا، أو التعامل مع مسألة تخصصية أو التدابير المالية الشخصية، فإننا نتصرف إزاءها بطريقة آلية، ودون أن نأخذ بعين الاعتبار النهج أو الاستراتيجية التي تكون اكثر ملائمة للموقف الذي تعانيه.

إننا نحاول مقاربة توجيه التحديات التي تفرضها حياتنا اليومية بمنهج يشابه الخوارزميات إلى حد كبير، وقد نصاب بخيبة أمل أو إحباط، لحد ما، إذا لم يعد هذا المنهج صالحا للتطبيق على حين غرة.

ويتطلب منا، في مثل هذه المواقف، إيجاد حل مناسب للمسالة، مما يعني ضرورة مباشرتنا لأعمال بحث واستقصاء في خبراتنا السابقة لإيجاد طريقة ما قمنا باستخدامها لحل مشاكل مشابهة في زمن ماض. (إن هذه ملاحظة قد صاغها ببلاغة وفصاحة متميزة جورج بوليا، 1957). ونستطيع، أيضاً، أن نتناول حقيبة أدواتنا الخاصة بحل المسائل لنعثر على ما يصلح فيها لحل العقبات التي تعترضنا عندما يجابه الطلبة مسائلا في حياتهم اليومية بالمدرسة، لأن نهجهم المعتمد في حلها لا يختلف كثيرا عما ذكر سابقا، فنراهم يميلون إلى معالجة المسائل بناء على ما توفر لديهم من خبرات سابقة.

هذه الخبرات قد تتأرجح بين: تمييز المسألة ومقاربتها لمسائل تم حلها في فترات سابقة، إلى اخذ تمارين كواجب بيتي تشابه إلى حد كبير المسائل المطروحة بالصف في ذلك اليوم. ان الطالب لا يمارس أيا من آليات حل المسائل، لكنه يقوم على الأكثر بتقليد (أو مزاولة) المواقف التي صادفته بأوقات سابقة. إن هذا هو السلوك الذي نراه في حشد كبير من الصفوف المدرسية بمختلف مستوياتها. وان تكرار مزاولة المهارة يفيد في بلوغ مرحلة تأصيلها ذاتيا، و يصح أيضاً هذا الأمر بميدان تأصيل مهارات حل المسائل لدى الطلبة.

إن استخدام مناهج مألوفة للتعامل مع ما يعتبره البعض مواقف مصطنعة (اخترعت، بصورة خاصة، لصفوف الرياضيات) لا يتوجه، دوما، بصورة مباشرة صوب فكرة حل المسائل بوصفها عملية ينبغي أن تنال دراسة وعناية لذاتها فحسب ولن يكون سهلا فحسب.

إن الناس لا يلجئون إلى حل "مسائل العمر"، أو "مسائل الحركة"، أو "مسائل الخليط" وما يشابها من مسائل في حياتهم الواقعية.

ما دامت دراسة مادة الرياضيات تعد، وفق المنهج التاريخي، بوصفها موضعية، وبدون بذل جهود واعية ومكثفة بواسطة المربين، فإن هذه الحالة ستبقى مستمرة دون تغيير. وتتوفر للمدرسين فرصة إعادة ترتيب المفردات السائدة في المنهج الدراسي بمراتب مختلفة، بيد أن المفردات ستبقى بوصفها موردا لارتباط الساقات الدراسية فيما بينها مفضلا ذلك على تضمين الطرق الإجرائية-الرياضية. ويخالف هذا النهج الطريقة

التي يفكر بها معظم الناس بصورة كلية!. فالاستدلال يتضمن طيفاً عريضاً من التفكير.

إن الطلبة الذين تلقنوا في قاعة درس الرياضيات أن حل المسائل مكتفية في ذاتها، وأنها ليست أداة نبلغ بها الغاية سيفيدون كثيرا من الصف، وكذلك من أمور حياتهم اليومية. فقد تكون تقانة حل المسائل الوسيلة التي نستخدمها لتقديم الطلبة إلى الجمال الكامن في علم الرياضيات وتطبيقاته، كما أنها ستسلك دورا يسهم في جمع وتوحيد الخيوط التي تشد أزر خبراتهم الرياضية مجتمعة في نسق كلي ذي معان عميقة.

إن أحد الأهداف القريبة سيكون بجعل الطلبة اكثر ألفة مع حشد كبير من استراتيجيات حل المسائل، مع التدرب على استخدامها. إن هذا الإجراء سيبتدئ بعرض الاستراتيجيات وطريقة معالجة المسائل ومن ثم إيجاد حلول لها. كما ان التدريب المستمر والكافي على هذا الإجراء سيجعل من تحقيق الأهداف-بعيدة المدى ممكنا، وبالخصوص، توجه الطلبة صوب استخدام استراتيجيات لا تقتصر على حل المسائل فحسب، بل في تجاوز المشاكل التي تعترضهم بالحياة اليومية. إن هذه النقلة النوعية بالتعلم (بالاتجاهين إلى أمام والى خلف) سيمكن إدراكها بطريقة افضل عن طريق زج استراتيجيات حل المسائل في كل من ميداني الرياضيات والحياة الواقعية وبصورة متلازمة.

إن إحداث تغيير في البرنامج التدريسي عن طريق، التخلي عن تأكيدها المطلق (الناشئ عن طول استخدامه في مناهج التدريس) على ضرورة فصل الموضوعات والمفاهيم، وتكريس الوقت للمنهج الإجرائي Procedural Approach، سيتطلب دعم المعلم لضمان نجاحه. وينبغي أن يدرك المعلمون بأن النتائج النهائية ستثمر عن تهيئة طلبة ذوي قدرات تتناسب مع روح العصر الراهن، حيث أضحت القابلية على مزاولة التفكير تزداد شيئا فشيئا مع استمرار زيادة التعقيد في التقنية لكي تتطور وتستخدم.

عندما يدرس أحدنا تاريخ الرياضيات، ستقع أنظاره على إنجازات وطفرات نوعية، والتي رغم بساطة فهمها، سيكون رد الفعل إزاءها "اوه، لم يدر ببالي أي فكرة حول ذلك النهج!". بنفس الطريقة، عند العثور على حلول أحد الطلبة اللامعين بمادة الرياضيات والتي تعرض بوصفها حلول بارعة وذكية، فإنها ستحدث نفس تأثير الاستخفاف بالذات Self-disparaging الذي أحدثته الطفرات الكبيرة في تاريخ الرياضيات. يجب أن يساعد المعلمون طلبتهم على تجنب مثل هذه القوالب العقلية، ومحاولة تعلم كيفية إعداد حلول ذكية كجزء من قاعدة معرفية لاستراتيجية حلول المسائل التي أمكنهم إحرازها، والتي ستتعمق تدريجيا، ومع مرور الوقت، خلال فترة البرنامج التدريسي.

بالمقابل ينبغي أن تتوخى الحذر بصدد وجود كلام كثير حول تقانة حل المسائل خلال بضعة العقود التي خلت. إن المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات بإصداراتها " Agenda for Action (1980)"، والأكثر قبولا وابتكارا " Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics (1989)"، وأحدثها إصدارا Principles and Standards for School Mathematics (2000)، قد لعبت دورا مهما في إحداث قبول عام بموضوع حل المسائل دفعة منهجية كبيرة. يبدو بأننا متفقون جميعا بأن حل المسائل والاستدلال يمثلان، وينبغي أن يكونا، الجزء المتمم لأي برنامج تدريسي جيد.

إن السؤال المطروح في هذا المقام هو "لماذا لم تتوفر لهذا الأمر فرصة المرور والنجاح؟". إن العائق الجوهري الذي يشخص أمام العنصر الناجح بحل المسائل في المنهج الدراسي – المدرسي النظامي يعود إلى التدريب الضعيف الذي تلقاه المعلمون بميدان حل المسائل، يضاف إليه فقدان الاهتمام الذي يصرف صوب الطرق التي يمكن من خلال توظيف هذه المهارات خلال البرنامج التعليمي النظامي.

ينبغي على المعلمين أن يركزوا انتباههم على ماهية حل المسائل، وكيف سيستثمرون هذه التقانة، وكيفية أسلوب عرضها على طلبتهم.

كذلك يجب أن يفهموا بأن حل المسائل يمكن أن تكون مورداً للفكر في ثلاثة طرق مختلفة.

1. حل المسائل هو موضوع للدراسة بذاته ولذاته.
2. إن حل المسائل هي طريقة لفهم مسألة محددة.
3. إن حل المسائل هي طريقة للتعليم.

بالرغم من صحة جميع هذه الطرق، فإن المفهوم الثالث هو السبيل الحاسم الذي ينبغي أن يوليه مدرسو الرياضيات عناية خاصة. وينبغي أن تصبح تقانة حل المسائل جزءاً مكملا لعملية التعليم التي يمارسونها.

يعرض هذا القسم عشرة استراتيجيات لحل المسائل، والتي قد تصبح القاعدة الأساسية لمثل هذا النهج بالتعليم.

في البداية، يجب على المعلمين تركيز اهتمامهم صوب قدراتهم الذاتية كي يصبحوا متفوقين في حل المسائل، وأن يتعلموا طبيعة استراتيجيات – حل المسائل المتاحة لهم، وماذا يستتبع عليها من نتائج، ومتى ،وكيف يمكنهم استخدامها. بعدها ينبغي عليهم أن يتعلموا كيفية تطبيق هذه الاستراتيجيات، دون الاقتصار على القضايا والمواقف الرياضية

فحسب، بل يجب عليهم أن يوجهوا التطبيق صوب مفردات الحياة اليومية وخبراتها.

بصورة عامة، يمكن استخدام مسائل بسيطة بطرق ذكية وماهرة. لتوضيح وبيان هذه الاستراتيجيات. بصورة طبيعية، فإن مسائل تحمل طابع التحدي (سوف تظهر بوضوح) قدرة استراتيجيات حل المسائل.

عبر تعلم الاستراتيجيات، والبدء بأمثلة سهلة عن تطبيقاتهم، ثم الانتقال تدريجيا باتجاه حل مسائل اكثر صعوبة وتعقيدا. فإن الطلبة ستتوفر لهم فرص مناسبة للنمو في ظل الاستخدام اليومي لمهارات بحل المسائل. ينبغي أن نتذرع بالصبر مع الطلبة عند تكليفهم بالمسألة، وماذا تعني لهم هذه المغامرة الجديدة بميدان الرياضيات.

بعد أن يكون المعلمون قد حققوا انغمارا مناسبا في هذا النهج البديل صوب الرياضيات، بصورة عامة، وحل المسائل، بصورة خاصة. وبعد أن يكونوا قد نجحوا في تنمية الحساسية باتجاه حاجات التعلم. والخصوصية التي يمتاز بها الطلبة، بعدها، وبعد ذلك فقط. يستطيع المعلمون أن يتوقعوا رؤية بعض التغير الإيجابي والحقيقي في الأداء الرياضي لطلبتهم.

من النادر جدا، ان تجد مسألة يمكن حلها باستخدام جميع الاستراتيجيات العشرة المعروضة في هذا القسم. وبنفس الأسلوب، فمن النادر جدا، أن استراتيجية واحدة فقط يمكن استخدامها لحل مسألة ما. على العكس، فإن توحيد الاستراتيجيات وتكامل استخدامها هو المبدأ الأكثر وجودا في دائرة حل المسائل. وعليه، فإن من الأفضل أن تكون أعمق معرفة بجميع الاستراتيجيات، وتنمية التسهيلات الخاصة باستخدامهم عندما تكون هناك فرصة مناسبة لذلك.

إن الاستراتيجيات التي تم اختيارها، في هذا القسم، لا تمثل جميع الاستراتيجيات المتوفرة، ولكنها تعرض أنموذجا لأكثر الاستراتيجيات القابلة للاستعمال والتطبيق في تدريس الرياضيات داخل المدرسة. إن المستخدم، سوف يحدد مدى ملائمة استراتيجية ما لمسألة محددة. كما إن تحديد الاستراتيجية المناسبة تشابه إلى حد كبير ما يقوم به موظف الترميم Repairman، الذي، عندما يستدعي لإصلاح مشكلة ما. يجب عليه ان يحسن اختيار أي أداة سوف يستخدمها بعمله. وكلما كثر عدد الأدوات المتوفرة لديه، وتعمقت معرفته بالاستخدام الأمثل لها، فإننا سنتوقع له تحقيق افضل النتائج بعمله.

من ناحية ثانية، كما أن كل مهمة سينهض بأعبائها موظف الترميم ستكون ممكنة باستخدامه للأدوات الموجودة في صندوق الأدوات العائد له، كذلك فإن المسألة الرياضية لن تكون قابلة للحل باستخدام الاستراتيجيات المعروفة هنا، أيضاً. وفي كلا الحالتين تلعب الخبرة وملكة الحكم دورا مهما بهذا المضمار. وعلى كل مدرس (لكي يساعد الطلبة على تعلم واستخدام استراتيجيات حل المسائل) أن يمتلك مجموعة يستطيع أن يختار منها أمثلة مناسبة.

تلصق لوحة تسمية Label بكل استراتيجية بحيث يمكن استخلاصها واستدعائها بسرعة أن ظهرت الحاجة لها. يلجأ موظف الترميم، عند اتخاذه قرارا بصدد اختيار الأداة المناسبة، إلى الإشارة إليها بالاسم (يعني، لوحة تسمية).

إن وجود لوحة التسمية (أو إطلاق اسم) ملتصقة باستراتيجية ما، سيجعل الأمر اكثر سهولة لحلال المسائل عند استدعائه إياها للاستخدام في العملية.

إن جميع الاستراتيجيات المعروضة يمكن، ويجب، تطبيقها بصورة منتظمة على عملية اتخاذ القرارات في الحياة اليومية (أو حل المشاكل في مواقف الحياة الواقعية).

إن هذه الممارسة ستسهم في تمتين استخدامهم، وفهمهم، وتجعل من عملية تطبيقها على القرائن الرياضية أمرا طبيعيا.

لكي نفهم الاستراتيجيات المعروضة في هذا القسم، بصورة افضل، سنقوم بتقديم كل منها مع وصف مناسب، وتعمد إلى تطبيقها على موقف مسألة من الحياة اليومية، ثم نعرض مثالا يبين كيفية تطبيقها في ميدان الرياضيات في كل حالة من الحالات، لم تعد الأشكال التوضيحية لكي تكون نموذجية بالضرورة، ولكن تم عرضها بحيث توضح استخدام استراتيجية محددة قيد المناقشة بأفضل وصف ممكن.

تظهر أدناه الاستراتيجيات التي ستؤخذ بنظر الاعتبار في هذا الكتاب:

1. العمل الارتجاعي.
2. إيجاد نمط.
3. تبني أسلوب آخر.
4. حل مسألة بسيطة مماثلة (تخصيص دون فقدان العمومية).
5. اعتبار الحالات القصوى.
6. إعداد رسوميات (عرض مرئي).
7. التخمين الذكي والاختبار (متضمنا التقريب).
8. احتساب جميع الاحتمالات (التروين الشامل).
9. تنظيم البيانات.
10. الاستدلال المنطقي.

كما ذكرنا سابقا، لا يمكن ان ندعي بوجود حل فريد لمسألة ما لا يشاركه غيره، فبعض المسائل تتوفر أمامها مجموعة متنوعة من طرائق الحل.

ينبغي أن نعتمد قاعدة عامة تهدف إلى تشجيع الطلبة على اعتبار حلول بديلة للمسالة، مثل التفكير كليا بحلول "رفاق الصف" ومقارنتها بالحلول النموذجية "المعيارية" (وهي حلول تعطى في الكتاب المنهجي، أو تزود من قبل المعلم).

كما ينبغي أن لا يغيب عن ذهنك، على الدوام، بأن هناك حشد من المسائل التي تتطلب إلى اكثر من استراتيجية لضمان حلها، لأن البيانات التي تتضمنها قضية المسألة وليست طبيعة المسألة هي العامل الأكثر أهمية في تحديد افضل استراتيجية يمكن استخدامها في حل المسألة. كذلك ينبغي دراسة وتمحيص جميع جوانب مسألة ما قبل أن نباشر بتوظيف استراتيجية معينة لحلها.

دعنا نتأمل مسألة يعمد معظم الناس إلى حلها بواسطة أسلوب المحاولة والخطأ الحدسي أو العشوائي. Intuitive (or random) Trial and Error والذي قد يستغرق وقتا طويلا للحصول إلى الإجابة. لكي نوفر لك فرصة مناسبة لتلمس استخدام استراتيجيات حل المسائل المذكورة قبل ان نعالج كلا منهم بصورة منفردة، ينبغي علينا ان نعاين، بعناية، مسألة توظف فيها بضعة استراتيجيات من القائمة السابقة.

مسألة Problem

ضع الأعداد من 1 إلى 9 في الشبكة أدناه، بحيث أن مجموع أي صف، أو عمود، أو قطر فيها يكون متساويا (يطلق بصورة عامة على هذه الشبكة اصطلاح "المربع السحري" Magic Sequare).

الحل SOLUTION

بالخطوة الأولى من الحل سنحاول استخدام الاستدلال المنطقي.

سيكون مجموع جميع الأعداد في الخلايا التسعة مساويا.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + 7 + 8 + 9 = 45$

إذا كان على كل صف أن يمتلك نفس المجموع، ينبغي أن يكون مجموع أعداد أي صف مساويا $15 = \frac{45}{3}$ ستهدف الخطوة الثانية إلى تحديد أي عدد ينبغي أن يوضع في خلية المركز Center Cell. باستخدام التخمين الذكي والاختيار مع قليل من الاستدلال المنطقي، نستطيع البدء بمحاولة بعض الحالات القصوى. هل يستطيع الرقم 9 أن يتبوأ خلية المركز؟ وإذا صح هذا الأمر، ينبغي أن يشاركه الرقم 8 نفس الصف، أو العمود، أو القطر مما يجعل مجموع الأعداد اكبر من العدد 15. وعليه لن يكون موقع العدد 9 في خلية المركز، بأي حال من الأحوال. وبنفس الطريقة، سنتوصل إلى عدم وجود فرصة أمام الأعداد 6، 7، أو 8 للاستقرار بخلية المركز. لأنهم سوف يشاركون العدد 9 بنفس الصف، أو العمود، أو القطر مما يجعل مجموع الأعداد الثلاثة المستقرة فيها اكبر من 15.

تأمل الآن الحالة القصوى الأخرى، هل يستطيع الرقم 1 أن يتبوأ خلية المركز؟ وإذا صح هذا الأمر، سيشاركه بنفس الصف، أو العمود، أو القطر العدد 2، لذا فإننا بحاجة إلى العدد 12 لكي نحصل على مجموع قدره 15. وكذلك الحال بالنسبة للأعداد 2، 3، أو 4 فإنها لا تمتلك أدنى فرصة للاستقرار بخلية المركز.

بعد احتساب جميع الاحتمالات، ستترك لنا العدد 5 بوصفه المرشح الوحيد للجلوس في خلية المركز.

	5	

والآن، باستخدام التخمين الذكي والاختيار، نستطيع محاولة وضع الرقم 1 في خلية الركن Corner Cell. وبناء على صفة التناظر السائدة في خلايا الشبكة، لا تأثير لموقع الركن الذي سنختاره للرقم 1. بأي حال من الأحوال، فإن هذا الأمر سيجبرنا على وضع الرقم 9 في الركن المواجه Opposite Corner، إذا أردنا الحصول على قطر مجموع إعداده 15.

1		
	5	
		9

إن وجود الرقم 9 في أحد الأركان، ينبغي أن يكون مجموع العددين اللذين يشاركانه بنفس الصف مساويا 6، أي العددين 2، 4.

إن أحد هذين العددين (2 أو 4) سيكون مشترك، أيضاً، مع العدد 1 بنفس الصف أو العمود سيجعل إمكانية الوصول إلى المجموع 15 في ذلك الصف أو العمود مستحيلا.

وعليه لن تتوفر فرصة للعدد 1 بالاستقرار في ركن من الأركان. إن وضعه في خلية منتصف الصف الخارجي أو العمود سيجبرنا على وضع العدد 9 في الخلية المقابلة للحصول على مجموع قدره 15.

	1	
	5	
	9	

الرقم 7 لن يكون بنفس الصف أو العمود مع العدد 1، لأنه سيحتاج عددا مساويا آخر (7 ثانية) للحصول على مجموع قدره 15.

7	1	?
	5	
	9	

وبهذه الحالة، نرى ضرورة تواجد العددين 6، 8 في نفس الصف أو العمود (وبمواقع الركن، بالطبع) مع العدد 1.

8	1	6
	5	
	9	

إن هذا الأمر سيحدد الركنين المتبقيين (4 ، 2) لكي نسمح للقطرين بأن يكون مجموعهما 15.

8	1	6
	5	
4	9	2

لإكمال المربع السحري، سنضع، ببساطة، العددين المتبقيين (7،3) في الخليتين الشاغرتين للحصول على مجموع قدره 15 في العمود الأول والثالث.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

إن ما قد تمت ملاحظته خلال آلية هذا الحل للمسألة المطروحة هو كيف أن مجموعة من الاستراتيجيات قد استخدمت في كل خطوة من خطوات الحل.

يمكن للمسائل (و ينبغي) أن تحل بأكثر من طريقة.

دعنا نمتحن منهجا بديلا لحل نفس المسألة السابقة. فإذا ابتدأنا بالحل من النقطة التي شرعنا بها، والتي تضمنت مبدأ أن مجموع أعداد كل صف، أو عمود، أو قطر ينبغي أن يساوي 15، يمكننا إدراج قائمة بجميع الاحتمالات الممكنة للأعداد الثلاثة من المجاميع التسعة والتي ينبغي أن يساوي مجموعها 15 (احتساب جميع الاحتمالات). إن تنظيم البيانات بهذه الطريقة، سيثمر عن الحصول على الإجابة بسرعة.

2,6,7	1,5,9
3,4,8	1,6,8
3,5,7	2,4,9
4,5,6	2,5,8

ينبغي علينا الآن أن نتبنى أسلوبا آخر، فنتأمل موقع الخلية، وعدد مرات تعدادها في المجموع 15 (استدلال منطقي). ينبغي أن نقوم بعد المربع الوسيط أربعة مرات، مرتان مع القطر، ومرتان إحداهما مع عمود، والثانية مع صف. إن العدد الوحيد الذي يظهر لأربعة مرات في ثلاثية الأعداد المذكورة أعلاه هو العدد 5، لذا فإن هذا العدد يعود إلى الخلية الوسيطة.

	5	

إن خلايا الأركان الأربعة، تستخدم كل منها ثلاث مرات، لذا سنقوم بوضع الأعداد المستخدمة ثلاث مرات (الأعداد الزوجية: 8 ,6 ,4 ,2) في هذه الأركان

8		6
	5	
4		2

أما الأعداد المتبقية (الأعداد الفردية) قد استخدمت كل منها مرتان في المجاميع أعلاه، وعليه ينبغي أن نضعها في خلايا الوسط المحيطية Peripheral Center Cells (لاستخدامهم بواسطة مجموعتين فقط) لكي تمتلئ خلايا المربع السحري جميعا.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

إن الاستدلال المنطقي قد تم إجراؤه بطريقة سهلة باستخدام العرض المرئي للمسألة.

من الضروري أن يعي الطلبة بأننا قد قمنا بحل نفس المسألة بطريقتين متباينتين، وينبغي أن يباشروا بمحاولة تطوير وتنمية بدائل أخرى لها، وعليهم أن يتأملوا إمكانية استخدام أرقام متتالية غير (1–9). إن الطلبة الطموحين والتواقين للمعرفة قد يحاولوا باتجاه إنشاء مربع سحري بخلايا 4×4 أو حتى 5×5.

وكما ذكرنا سابقا، فإن من النادر جدا أن تجابه مسألة يمكن حلها بكفاءة باستخدام كل من استراتيجيات حل المسائل العشرة. ولكن، قد نعثر على مسائل تفتقر حلولها إلى استخدام اكثر من استراتيجية واحدة، سواء بمفردها أو بالتوفيق بين اكثر من واحدة، وبوجود تغاير ملحوظ في مستوى الكفاءة لكل منهم.

ليس ثمة شك، بأن مستوى كفاءة الأداء الذي تختص به كل طريقة يرتبط ارتباطا جوهريا، ويتغير بتغير هوية المستخدم. دعنا نأخذ نظرة فاحصة على مثل هذه المسألة، وهي مسألة شائعة، وقد تكون من المسائل التي اعترضتك سابقا.

سنحاول السعي باتجاه حلها بواسطة مجموعة من الاستراتيجيات المختلفة.

مسألة PROBLEM

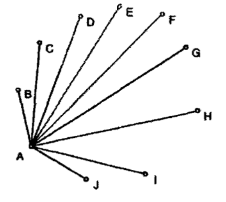
في غرفة بعشرة أشخاص، صافح كل منهم بقية الحاضرين مرة واحدة فقط. كم عدد المصافحات التي تمت هناك؟

الحل SOLUTION I:

دعنا نستخدم استراتيجية العرض المرئي عن طريق رسم مخطط. إن النقاط العشرة، والتي تمتاز بأن ثلاث نقاط منها لا تقع على استقامة واحدة Collinear، تصف الأشخاص العشرة. أبدأ بالشخص الموصوف بالنقطة A.



نبدأ بوصل النقطة A بالنقاط التسعة المتبقية لبيان التصافحات التسعة التي حدثت أولا.



والآن سيتبقى أمام النقطة B ثمانية تصافحات إضافية (نظرا لأن النقطة A قد تصافحت مع النقطة B، وقد تم رسم المستقيم $\overline{AB}$). بنفس الطريقة، سيتبقى أمامنا رسم سبعة خطوط من النقطة C إلى بقية النقاط (المستقيمان $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ قد رسما مسبقا)، ومن النقطة D سيكون هناك 6 قطع مستقيم إضافية أو تصافحات، ويستمر الأمر على هذا المنوال.

عندما سنصل النقطة I، سيتبقى أمامنا تصافح واحد فقط ينبغي أن نقوم برسم مستقيمة بين نقطتي I، J، نظرا لأن النقطة I قد تصافحت مسبقا مع النقاط (A,B,C,D,E,F,G,H).

لذا فإن مجموع التصافحات سيكون مساويا:

$$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$$

بصورة عامة، فإن هذه العملية تشابه استخدام صيغة جمع n من الحدود الطبيعية:

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad n \geq 1 \text{ حيث}$$

(لاحظ بأن الرسم النهائي سيكون عبارة عن شكل عشاري الزوايا Decagon بجميع أقطاره الظاهرة).

الحل 2 SOLUTION

يمكننا أن ندنو ثانية من المسألة عبر استراتيجية حساب جميع الاحتمالات. تأمل الشبكة الآتية، والتي تؤشر إلى تصافح الأشخاص، ...,A,B,C أو÷و- فيما بينهم. ان القطر بالرموز x يؤشر إلى ان الأشخاص لا يستطيعون التصافح مع أنفسهم. أما بقية الخلايا فتشير إلى أزواج التصافحات المتحققة مع البقية (بمعنى آخر، A تصافح B، و B تصافح A).

وعليه سنقوم بإحصاء العدد الكلي للخلايا، (10^2)، مطروحا منه الخلايا الموجودة في القطر (10)، وتقسيم النتيجة على الرقم (2).

وستكون النتيجة، بهذه الحالة، كما يلي:

$$\frac{100-10}{2}=45$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X									
B		X								
C			X							
D				X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

في حالة عامة لشبكة بخلايا n × n، سيكون العدد $\frac{n^2-n}{2}$.

الحل 3 SOLUTION

دعنا الآن نختبر المسألة عن طريق تبني أسلوب آخر. تأمل الغرفة بالأشخاص العشرة، والذي سيصافح كل منهم 9 أشخاص آخرين. إن هذا الأمر يوحي بوجود 9×10 أو 90 تصافح بينهم. ولكننا ينبغي أن نقسم النتيجة على الرقم 2 لإلغاء التكرار (نظرا، لأنه عندما يصافح الشخص A، الشخص B. كما أن الشخص B يصافح الشخص A).

$$\frac{90}{2}=45$$

الحل 4 SOLUTION

دعنا نحاول حل المسألة عن طريق البحث عن نمط. أدرجنا في الجدول الآتي عدد التصافحات الحادثة داخل الغرفة بازدياد عدد الأشخاص الموجودين فيها.

عدد الأشخاص الموجودين بالغرفة	عدد التصافحات للشخص الإضافي	مجموع عدد التصافحات في الغرفة
1	0	0
2	1	1
3	2	3
4	3	6
5	4	10
6	5	15
7	6	21
8	7	28
9	8	36
10	9	45

إن العمود الثالث، والذي يعكس مجموع عدد التصافحات، يعطي تعاقب الأعداد المعروف بـ "الأعداد الثلاثية"، والتي تزداد فروقها المتوالية بمقدار 1 لكل مرة. لذا يمكن الاستمرار بسهولة في أعداد الجدول لحين وصولنا إلى المجموع المناظر لـ 10 أشخاص، أو بطريقة أخرى، يمكننا ملاحظة النمط عند كل عملية إدخال يساوي نصف حاصل ضرب عدد الأشخاص (في ذلك الصف) (عدد الأشخاص في الصف السابق).

الحل 5 SOLUTION

يمكننا أن ندنو من المسألة بالاستخدام المناسب لاستراتيجية تنظيم البيانات. فالجدول المبين أدناه يظهر كل شخص من الأشخاص الموجودين في الغرفة، وعدد تصافح الأيدي لكل مرة، مع العلم بأنهم قد تصافحوا مع سابقيهم ولن يصافحوا أنفسهم!.

إذن الشخص رقم 10 سيصافح 9 أيدي، والشخص رقم 9 سيصافح 8 أيدي، وهكذا بالنسبة للبقية، حتى نصل إلى الشخص رقم 2 والذي سيتبقى أمامه يدا واحدة كي يصافحها، بينما لن يصافح الشخص رقم 1 أي من الموجودين بالغرفة، لأنهم قد صافحوه من جهتهم.

وسيكون المجموع ثانية 45.

البيانات المنظمة

رقم الشخص	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
عدد التصافحات	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

العرض المرئي	عدد التصافحات	عدد الأشخاص
•A	0	1
A———B	1	2
A, B, C	3	3
A, B, C, D	6	4
A, B, C, D, E	10	5

الحل SOLUTION 6

نستطيع أن نجمع بين الاستراتيجيات: حل مسألة بسيطة مماثلة، وعرض مرئي (رسم صورة)، وتنظيم البيانات، و إيجاد نمط. ويؤخذ شكل واحد ممثلاً بنقطة واحدة. وواضح أنه سيكون هذا صفر من التصافحات، وسع عدد الأشخاص إلى 2 وتمثل بنقطتين. سيكون هناك مصافحة واحدة. ومرة أخرى، دعنا نوسع عدد الأشخاص إلى 3. وهنا سنحتاج إلى 3 تصافحات. استمر إلى 4 أشخاص و 5 أشخاص وهكذا. أصبحت المسألة الآن مسألة هندسية حيث الجواب هو عدد الأضلاع "n-gon". لذا يصبح الشكل العاشري (decagon) لعشرة أشخاص وعدد الأضلاع n=10. ولعدد الأوتار نستخدم الصيغة : $d=\frac{nn-3)}{2}$ ، حيث n>3 ، وعليه :

$$d=\frac{(10)(7)}{2}=35$$

وعليه سيكون عدد التصافحات الكلية = 10+35=45.

الحل SOLUTION 7

قد يدرك بعض الطلبة سهولة حل هذه المسألة باستخدام صيغة التوافيق Combination لعشرة أشياء، يؤخذ منها اثنان في كل مرة.

$${}_{10}C_2=\frac{10.9}{1.2}=45$$

بالرغم من كون هذا الحل فعال بشكل ملحوظ، ومختصر، وصحيح، فانه لا يستثمر أي نوع من الفكر الرياضي (غير تطبيق مباشر للصيغة) كما انه يتجنب نهج حل المسائل بصورة تامة.

لذا رغم انه حل بحاجة إلى مناقشة، فإن علينا أن نجذب اهتمام الطلبة وانتباههم إلى الحلول الأخرى.

ستزداد ألفتك، تدريجيا، بالاستراتيجيات المطروحة، وستتمرن على استخدامها حتى تتقنها، وفقط عند هذه النقطة تستطيع أن تعرضها على طلبتك.

بهذه الطريقة، تستطيع أنت وطلبتك – على السواء – تنمية براعة ذاتية تصاحب استخدام الأدوات الأساسية لحل المسائل.

ويمكنك أن تعرض الأدوات عن طريق إعادة تشكيل أسلوب تعليمك لحل المسائل، مرة بعد أخرى. والتي ستكون بتشجيع طلبتك على أن يكونوا اكثر إبداعا في التعامل مع المسائل، وحضهم على حل المسائل بطرائق متعددة، وادعهم إلى البحث عن اكثر من حل صحيح للمسألة الواحدة.

دع طلبتك يعملون سوية بمجاميع صغيرة عند حل المسائل

ويتبادلون الآراء والأفكار، بحرية، فيما بينهم، ويسعون إلى العمل لغيرهم ومد يد المساعدة لهم.

وكلما ازداد حديث الطلبة وتشعب عن المسائل، وحلولها، كلما ازدادت مهاراتهم بهذا المضمار وتعمقت.

إن الإشارة إلى استراتيجيات ومناهج حل المسائل المختلفة بأسمائها سوف يضمن حسن استخدامها واستيعابها عند ظهور الحاجة إليها.

وتذكر بأن مفهوم ما وراء الإدراك (والتي تعني أن يكون المرء مدركا بعمليات تفكيره) تشكل عاملا مهما في تقانة حل المسائل. وان تشجيع الطلبة على التحدث مع أنفسهم عندما يجابهون مسألة، ويحاولون إيجاد حل مناسب لها،

الاستراتيجيات العشر لحل المسائل
The Ten Problem-Solving Strategies

العمل باتجاه عكسي Working Backwards

رغم كثرة استخدامنا لهذه الاستراتيجية في قضايا اتخاذ القرارات بحياتنا اليومية، فليس من الطرق الفطرية استدعاءها عندما نريد أن نعالج مسألة رياضية.

نستخدم هذا المنهج عند أعداد مخطط لجملة من المهام التي ينبغي استكمالها تحت سقف زمني محدد. بصورة عامة، تكون نقطة بداية عملنا فيما ينبغي فعله، والزمن المطلوب لإكمال جميع الأعمال، وكم هو الوقت الذي تستغرقه كل مهمة من المهام. بعدها سنبدأ العمل باتجاه عكسي عند تحديد البعد الزمني لكل مهمة، لكي نستطيع الوصول إلى الوقت المناسب لشروعنا بالعمل.

تستخدم استراتيجية العمل باتجاه عكسي، أيضاً، على نطاق واسع في تحريات المرور السائدة بالحياة اليومية. فعندما يتحرى رجل الشرطة حادثا لسيارة، ينبغي أن يعمل باتجاه عكسي مبتدءا بزمن الحادثة لكي يتبين ما هي طبيعة الأسباب، وأي سيارة انحرفت فجأة قبل الاصطدام، ومن ارتطم بالآخر. ومن من السائقين كان مخطئا، وما هي ظروف الجو في وقت حصول الحادثة، وغيرها من تفاصيل التحري، والتي يمارسونها لإعادة صياغة مفردات الحدث المكاني والزماني المصاحبة للحادثة. عندما نمعن النظر بالإجراءات التي تظهر بوضوح في كراريس الطلبة، وبكثير من تمارين كتبهم المنهجية، سنتلمس وجود تقانات مفيدة بين ثناياها. ولسوء الحظ، فإن هذه الأمور تعد صحيحة ومحتومة ويسلم بها جدلا، ولا تلفت النظر إلى انتباه الطلبة.

قد يحتاج الطلبة إلى الاستنتاج بطريقة معكوسة، بالرغم من عدم إخبارهم بعمل من هذا النوع. ولعل المثال الواضح على ذلك يكمن في الإجراءات التي ينبغي على الطالب استخدامها عند كتابة البراهين في فصل الهندسة بالمدارس الثانوية. في تلك الحالة، ينبغي عليهم البدء باختبار ما يريدون برهنته قبل عمل أي شئ آخر. وعليه فإن محاولة البرهنة على تطابق خط مستقيم قد تنشأ من البرهنة على تطابق زوج من المثلثات. هذا الأمر، بالمقابل، سيقترح بأن ينظر الطلبة صوب الأجزاء الضرورية للوصول إلى إثبات تطابق المثلث. إن استمرار الطلبة، بهذا الأمر، سيقودهم نحو اختبار المعلومات المتوفرة. وانهم، بالضرورة، يعملون باتجاه عكسي.

عندما يكون الهدف فريدا، ولكن تشخص أمامنا الكثير من نقاط البيانات المحتملة، يبرز دور حلال المسائل الماهر بالبدء في العمل باتجاه عكسي من الاستنتاج المطلوب إلى النقطة التي تصل بنا إلى المعلومات المتوفرة.

عندما توجد نقطة نهاية فريدة (وهي التي ينبغي البرهنة عليها)، ومجموعة متنوعة من السبل للوصول إلى نقطة الشروع، ستكون استراتيجية العمل باتجاه عكسي على رأس قائمة الأمور المطلوبة. ومع ذلك، لازالت طريقة العمل باتجاه عكسي تعد من اكثر الطرق الطبيعية استخداما، وإنها بالحقيقة تستخدم في حل معظم المسائل.

نحن لا نقول بأن جميع المسائل ينبغي أن تعالج بمنظور استراتيجية العمل باتجاه عكسي، ولكن، بعد اختبار المنهج القطري (إلى أمام، بصورة عامة)، يمكن محاولة استخدام استراتيجية الاتجاه العكسي لمعرفة فيما إذا كانت ستوفر حلولا للمسألة: اكثر كفاءة، و اكثر إمتاعا، أو إقناعا.

رغم أن كثير من المسائل بحاجة إلى استدلال معكوس Reverse Reasoning (حتى ولو اقتصرت على معالجات محدودة)، فهناك بعض المسائل التي تسهم استراتيجية العمل باتجاه معاكس على تسهيل حلولها بشكل كبير.

تأمل المسألة التالية، وانتبه إلى حقيقة أن هذه المسألة ليست نمطية بالنسبة للمنهج المدرسي، ولكنها بيان واضح للقدرات الكبيرة التي يمتاز بها العمل باتجاه عكسي.

إذا كان مجموع عددين يساوي 12 وان حاصل ضربهما يساوي 4.

جد مجموع مقلوب العددين.

سيحاول معظم الطلبة إنشاء معادلتين

$x+y=12$ و $xy=4$

حيث x = العدد الأول، y = العدد الثاني. لقد تلقن الطلبة على هذا الزوج من المعادلات معا بطريقة التعويض، Substitution . وإذا لم يرتكب الطلبة، خلال هذا المثال المعقد، أي خطأ جبري، فستنتهي رحلتهم مع هاتين المعادلتين إلى قيمتين غير سارتين للمتغيرين x, y وهي $x = 6 \mp 4\sqrt{2}$ و $y = 6 \mp 4\sqrt{2}$. بعدها، ينبغي عليهم احتساب مقلوب هاتين القيمتين، ثم احتساب مجموعهما. هل ستحل هذه المسألة بهذه الطريقة؟ نعم، بالطبع!

لكن هذه الطريقة تتسم بتعقيد ملحوظ، ويمكن تبسيطها إلى حد كبير عن طريق البدء من نهاية المسألة، وبالخصوص ما نريد إيجاده $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

يمكن للطلبة أن يسألوا أنفسهم: "ماذا نفعل، بصورة عامة، عندما نجد أمامنا كسرين نود الحصول على حاصل جمعهما؟ كيف نقوم بجمعها؟" إذا احتسبنا المجموع بالطريقة التقليدية، سنحصل على $\frac{x+y}{xy}$.

بما أن مجموع x+y يساوي 12، كما ورد في المسألة، وكذلك قيمة xy تساوي 4. ستكون قيمة حاصل القسمة $\frac{12}{4} = 3$.

(لاحظ بأن الطلبة لن يطالبوا القيمة النهائية لكل من x,y، ولكنهم مطالبون بمجموع مقلوباتها).

ينبغي الاعتناء في تجنيب الطلبة، تثبيط الهمة بسبب فشلهم، أو اخذ موقف سلبي من المسألة بقول أحدهم "إنني لن أكون قادرا على الوصول إلى حل بارع للمسألة".

بدلا من ذلك حاول تشجيعهم على رؤية هذه الاستراتيجية الثمينة، وغير التقليدية لحل المسائل بمنظور يجعل منها الأداة المفيدة التي سيألفون استخدامها، كما أن الاستخدام الجيد سيمكن إحرازه بمزيد من التمرين والتطبيق الميداني.

إيجاد نمط Finding A Pattern

إن أهم القيم الجمالية التي تكمن في الرياضيات هي المنطق والتناسق اللذان تستبطنهما. إن هذا المنطق يمكن أن نراه كنمط أو مجموعة أنماط، بمنظور فيزيائي.

إن غير الرياضي يفضل الهندسة لأجل الأنماط المتناسقة التي توفرها. أما الرياضي فيستثمر الأنماط كوسيلة مساعدة لحل المسائل. ليس فقط في دائرة الهندسة، ولكن في حقول أخرى، أيضاً.

وجدنا مسائل الرياضيات في المنهج الدراسي للمدارس الثانوية بحاجة إلى تمييز الأنماط، بصورة ملموسة، لأجل إكمال حلولها. فعلى سبيل المثال، لإيجاد العددين التاليين في التعاقب 1, 3, 4, 7, 11, 18,___,___ ينبغي أن نبحث أولا، ثم نميز نمطا محددا. إن النمط المحتمل الذي يمتلكه أي عدد، بعد أول عددين ، كحاصل جمع العددين السابقين، إن تمييز هذا النمط هو مثال على متوالية فايبوناشي Fibonacci-Type Sequence (يعرف بإعداد لوكاس Lucas Number) الذي يؤدي إلى العددين التاليين وهما 47, 29.

يوجد في الواقع أكثر من طريقة معقدة (واكثر إرهاقا) لإيجاد الأعداد التي تلي العدد 18 في التعاقب المعطى.

من ناحية ثانية، تأمل عملية إيجاد الحديين التاليين من التعاقب 1، 10، 2، 7، 3، 4، 4،—— ، —— يبعد احتمال حل هذه المسألة بأي طريقة من الطرق، سوى تلك التي تميل إلى تمييز هذا التعاقب على أساس نشوءه عن امتزاج تعاقبين منفصلين.

يتألف التعاقب الأول من الأعداد ذات المواقع الفردية: 1،2، 3، 4 (والتي تختلف عن بعضها بـ 1+). ويتألف التعاقب الثاني من الأعداد ذات المواقع الزوجية:4، 7، 10 (والتي تختلف عن بعضها بـ 3−).

من أجل هذا سيكون العددان التاليان 5 ، 1 .

تمتاز هذه المسائل بأنها ذات طبيعة خاصة تجعل حلولها مقتصرة على تمييز النمط فحسب. وفي هذه الحالات، فإن استخدام أسلوب البحث عن نمط، قد أعلن نتيجة الميزات الفريدة التي تمتاز بها المسألة.

سوف نتأمل مسائل حيث لا يتوقع استخدام النمط في حلولها، وذلك لكي نبرهن على الدور الثمين الذي توفره هذه الاستراتيجية في حل المسائل، فيكون حل هذه المسائل اكثر سهولة من الحلول التقليدية أو الطرق المألوفة للحل.

في قضايا ومواقف حياتنا اليومية (في بعض الأحيان بطريقة غير واعية) نسعى إلى توظيف تمييز النمط في التعامل مع المشاكل التي تعترضنا.. على سبيل المثال، عندما تبحث عن عنوان بعدد زوجي في شارع ما، ستحاول النظر إلى الجانب الذي توجد عليه الأرقام الزوجية، ثم ستحاول البحث عنه من خلال التعاقب العددي. وإذا أمعنا بالتنقيب في مفردات الحياة اليومية فنجد سيادة تمييز النمط في كثير من مواقفها.

بصورة عامة، يستثمر رجال الشرطة نتائج البحث البوليسي كاستراتيجية أنماط بطريقة أخرى، أيضاً. فعلى سبيل المثال، عندما يجابه رجال الشرطة سلسلة من الجرائم (افترض، سرقات)، فانهم يسعون دائما إلى إيجاد نمط سائد بالجرائم،

مثل سعيهم لإيجاد طريقة التنفيذ Modus Operandi والتي قد ترشدهم إلى مجرم محدد.

ويستثمر العلماء المشتغلون في البحوث الطبية اكتشاف استراتيجية نمط يتيح لهم تثبيت وفصل المتغيرات المتشابهة، بحيث يثير استنتاجات حول فايروس محدد أو بكتريا يسعون إلى اختبارها. إن البحث عن نمط في مسألة رياضية تفتقر إلى إيجاد نمط يسهم في حلها، لا يمثل جميع ما في تقانة حل المسائل هذه من تفاصيل.

إن تقانة إيجاد نمط ما بمسألة يمتاز بأهمية خاصة عندما لا تستلزم المسألة إيجاد نمط. تأمل المثال الآتي:

مسألة Problem

جد مجموع الأعداد الفردية العشرين الأولى.

الحل Solution

تتطلب المسألة عملية جمع بسيطة، وان استخدام آلة حاسبة سيجعل المهمة عادية ومبتذلة، بيد أنها ستستنفد وقتا لا بأس به.

إن العدد الفردي العشرين، تسلسلا، هو العدد 39، وعليه فإننا نبغي احتساب مجموع الأعداد: 1+3+5+7+...+33+ 35+37+39.

قد يقرر بعض الطلبة ببساطة حل هذه المسألة بكتابة جميع الأرقام الفردية من 1 إلى 39 ثم إضافتهم إلى بعضهم البعض. وقد يلجأ البعض الآخر إلى تطبيق استراتيجية البحث عن نمط بأسلوب يماثل ما ذهب إليه الطالب الحدث كارل فردريش جاوس عندما كان في المدرسة الابتدائية Elementary School. سيتضمن هذا الحل إدراج الأرقام العشرين – الفردية 1,3,5,7,...,33, 35,37,39.

والآن لاحظ بأن مجموع العددين: الأول، والعشرين هو: 1+39=40

وان مجموع العددين: الثاني والتاسع عشر هو أيضاً 40 (4+37) ويستمر الأمر بنفس المنوال مع بقية الأعداد. إن هذا الأمر يحتاج إلى إحصاء عدد المرات التي ستضاف بها الأربعينات لأن هناك منها 20 عدداً ويظهر بأن لدينا عشرة أزواج من الأرقام، لذا بضربنا 10x40 تكون الإجابة النهائية مساوية لحاصل الضرب 400.

يمكننا أن نختبر هذه المسألة بواسطة استراتيجية البحث عن نمط ولكن بطريقة أخرى.

العدد المضاف Addends	عدد الإضافات	المجموع
1	1	1
1 + 3	2	4
1 + 3 + 5	3	9
1 + 3 + 5 + 7	4	16
1 + 3 + 5 + 7 + 9	5	25
1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11	6	36

يظهر الجدول بوضوح أن مجموع (n) من الأعداد الفردية الأولى هو (n^2) وعليه سيكون حل مسألتنا، ببساطة هو 20^2=400.

مرة ثانية، إن اكتشاف نمط سائد (بالطبع، إن كان موجودا) سوف يكون مفيدا إلى حد بعيد في حل المسائل.

تبني أسلوب آخر
Adopting a Different Point of View

إن هذه الاستراتيجية هي إحدى الطرق المفيدة التي تتطلب "إجبار" نفسك على محاولة حل المسألة عن طريق التفكير بها من عدة اتجاهات. تأمل المسألة الخاصة بعصبة تتألف من 25 فريقا يحاولون إيجاد عدد المباريات الواجب ممارستها لتحديد البطل Champion في التسقيط الفردي Single-elimination لدورة رياضية.

إن حل الطلبة الذين يجابهون بهذه المسألة سوف يكون، بالتأكيد، محاكاة Simulate الموقف فيبدءون بخروج 12 فريق بعد الجولة الأولى (تتطلب خوض 12 مباراة)، وبعدها يتم اعتبار الفائزين فقط، مع ترك الخاسرين ينسحبون من الدوري. إن هذا المنهج بالمعالجة سيؤدي بنا إلى الحل الصحيح، رغم كونه مملا إلى حد ما. إن تبني أسلوبا جديدا وبمنظور مختلف، سيكون باعتبار عدد الخاسرين، بمعنى آخر، ما هو العدد اللازم من الخاسرين في هذا الدوري؟. ينبغي أن يكون هناك 24 خاسرا لكي تحصل على البطولة، وعدد المباريات المطلوبة للحصول على 24 خاسر هي 24 مباراة بالطبع. إذن قد تم حل المسألة بسهولة ويسر عندما استخدمنا منهجا آخر في الحل.

في حياتنا اليومية، تساعدنا المناقشة الدائرة مع أحد الأصدقاء على اعتبار وجهة نظر ومنهج صديقنا كأسلوب آخر لحل المسألة التي تشخص أمامنا. وفي حالة المناظرة تكون هذه الاستراتيجية الأفضل على الدوام.

إن توضيحا آخر يظهر أهمية هذه التقانة والفوائد المترتبة عن استخدامها، وسيكون حول أخذ الحضور في صف ما. وبدلا من قراءة أسماء الطلبة الحاضرين، تأمل إمكانية تبني أسلوبا

آخر لاستعراض وإحصاء المتغيبين، وسيكون البقية هم الحاضرون.

إن توضيحا آخر سيسهم في مساعدتك على تقدير هذه التقانة والميل نحو توظيفها.

تأمل المسألة الآتية:

مسألة Problem

تعقبت قطة فأرا، يبعد عنها بـ 160 مترا. فإذا علمت بأنه كلما يعدو الفار 7 أمتار، فإن القطة تعدو مسافة 9 أمتار. فما هي المسافة التي تقطعها القطة لكي تظفر بالفأر المسكين؟.

الحل Solution

تعد هذه المسألة مثالا نموذجيا على المسائل الحركة المنتظمة Uniform Motion، بيد إنها تحوي على جانب غير متسق: وهو عدم إيجاد سرع عدو القطة أو الفأر بالطريقة الشائعة (متر/دقيقة) أو (متر/ثانية). لذا لن تتوقع حلا وشيكا من كتاب منهجي تقليدي. ينبغي على الطالب الانتباه إلى أن السرعة النسبية، قد توفرت بالمسألة، نظرا لأنه مهما اختلفت الفاصلة الزمنية. سواء كانت ثانية، أو دقيقة، أو ساعة، فإن السرع يمكن تعريفها (على سبيل المثال) 9× أو 7× متر/دقيقة (أو أي نوع من الفواصل الزمنية).

حالما توصلنا إلى اتفاق بصدد هذا التعقيد أو المضاعفة Complication يمكن أن تحل بقية المسألة بالطرق الاعتيادية. ألا وهي، إذا كانت المسافة التي سيقطعها الفأر هي d، ستكون المسافة التي سيقطعها القط (d+160).

لذا فإن الزمن الذي سيعدو فيه الفأر هو $\frac{d}{7x}$، وان الزمن الذي سيعدو فيه القط هو $\frac{d+160}{9x}$.

ونظراً لتساوي زمني العدو بالنسبة للفأر والقطة

$$\frac{d}{7x}=\frac{d+160}{9x}$$

وتكون d=560

وعلى القط أن يعدو مسافة 720 = 160+560 = مترا لكي يظفر بفريسته!.

يمكننا أن ننظر إلى المسألة بأسلوب آخر.

تكسب القطة 2 = 7−9 مترا لكل فاصل مسافة قدره 9 أمتار تقطعه بعدوها. لاحتواء فرق مساحة نقطة الابتداء مباراة العدو بينهما والبالغة 160 مترا، ينبغي على القطة أن تعدو $\frac{160}{2}=80$ فاصلا.

ولما كان فاصل المسافة، بالنسبة للقطة هو 9 أمتار، فإن المسافة المطلوبة هي 720 = (9)(80) مترا.

إن افضل طريقة تستخدمها في حل المسألة، هي تلك التي تجعل المتعلم يشعر بالراحة معها، ويستطيع فهمها بصورة حقيقية. قد يعجز بعض الطلبة عن ممارسة مستوى كاف من التجريد عند محاولة فهم الطريقة التي تستخدم استراتيجية تأمل أسلوب أو منهج آخر بالتعامل مع المسالة.

وقد يشعر هؤلاء الطلبة بارتياح بالغ عند استخدام إجراءات اكثر آلية أو ميكانيكية. بالنسبة للطلبة الذين يفضلون الطريقة الثانية (بالطبع الأكثر أناقة)، فإن على المدرس التزام بيان توضيح تلك الطريقة.

وكلما ازداد عدد الحلول التي يعرضها المدرس على طلبته، كلما ازداد مقدار ما سيصل إلى كل متعلم، وسيكون برنامج التدريب اكثر شمولا واتساعا.

إن هذا التوسع في التدريس هو أمر مرغوب فيه على الدوام بوصفه مظهرا من مظاهر الإثراء المرغوبة.

حل مسألة أبسط-مماثلة

Solving A Simpler Analogues Problem

إن إحدى الطرق التي تظهر، في بعض الأحيان، بوصفها الأكثر وضوحا، هي تلك التي تحيل المسألة المطروحة إلى أخرى اكثر سهولة بالحل، وعند حل هذه المسألة المساعدة، وتوفر البصيرة المطلوبة لحل المسألة الأصلية.

إن هذه الاستراتيجية المخصوصة، حل مسألة أبسط مماثلة، يمكن أن يرجع إليها بوصفها تفصيلا دون فقدان العمومية. أي، إذا لم تطرح أية محددات في المسألة، يمكننا اختيار حالة خاصة للموقف المطروح لغرض الاختبار.

رغم أن المثال الآتي، يبدو بأنه يطوف حول تخوم الدقة Exactness، فإنها تشكل طريقة عملية للتعامل مع المسائل اليومية التي لا تفتقر إلى إجابات دقيقة.

عندما يسافر الأمريكيون إلى الخارج، يجدون بأن درجة الحرارة تعطى دائما بالدرجات (المئوية) السيليزية Celaius. لذا ينبغي عليهم تحويل درجة الحرارة السيليزية إلى الدرجة الحرارية الأكثر استخداما لديهم بمقياس فهرنهايتي Fahrenheit Scale.

وبدلا من استخدام الصيغة الشائعة:

$$F=\frac{9}{5}C+32$$

يمكنهم تقريب النتيجة بواسطة مضاعفة درجة الحرارة

السيليزية المعطاة ثم إضافة 30 درجة إليها.

رغم أن الدرجة الفهرنهاتية هي مقاربة لحد ما، لكنها مناسبة وكافية للاستخدامات والأغراض اليومية. لقد رأينا، هنا، بأن حل مسألة أكثر بساطة، قد قادتنا إلى إجابة مفيدة.

تستخدم هذه الاستراتيجية، في معظم الأحيان، لجعل المسألة اسهل تناولا عن طريق استبدال بعض الأرقام أو المتغيرات بأخرى اكثر سهولة ومن ثم العودة إلى الوراء للمسالة الأصلية.

على سبيل المثال، في بعض الأحيان تظهر المسألة كأنها مربكة بشكل غير مألوف، ولكن قيامنا بتأمل حالة اكثر بساطة للموقف المطروح، ستسهل عملية التعامل معها وإدارة متغيراتها.

خذ على سبيل المثال المسألة (*) الآتية:

مسألة Problem

إذا كان $_{X}P_{Y}=\frac{((25!)!)!}{((3!)!)!}$

ما هي قيمة x-y؟

الحل Solution

من النظرة الأولى إلى المسألة، يبدو بأن مجموعة المضروب Nest of Factorial تورث إرباكا وقلقا!. وباعتبار مسألة اكثر بساطة، حيث: $_{7}P_{3}=\frac{7!}{(7-3)!}$ نلاحظ بأن المقام Denominator هو المتفرد بالدور الأساسي في احتساب قيمة x-y. لذا فانه ينبغي علينا احتساب العامل ! (3!) والذي يساوي 720 للحصول على الجواب. ان فحص مسألة مشابهة اكثر بساطة، أعطانا المفتاح المطلوب للحل، وبالخصوص، أن البسط لا يلعب أي دور ملموس في الإجابة عن السؤال.

إن المسألة الآتية هي مثال آخر على حل مسألة مشابهة تمتاز بكونها اكثر سهولة وبساطة.

مسألة Problem

إذا علمت بأن مجموع الزوايا في جميع الإشكال الخماسية Pentagrams (يعني، نجوم بخمسة أركان) هو عدد ثابت، احسب مجموع هذه الزوايا (كتلك الموجودة في شكل 1).

الحل Solution

نظرا لعدم بيان نوع الشكل الخماسي، نستطيع أن نفترض بأن هذا الشكل أما أن يكون منتظما، أو محاطا بدائرة (يعني، بأن جميع رؤوس الشكل الخماسي تقع على الدائرة) (شكل 2).

في الحالة الأخيرة، نلاحظ بأن كل زاوية من زواياه هي زاوية محوطة للدائرة، لذا فإن قياسها يساوي نصف قياس القوس الذي تتقاطع معه، وعليه نحصل على ما يلي:

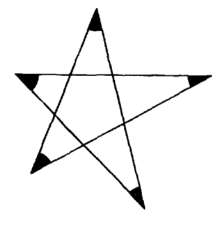
$m\angle A=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{CD}$

$m\angle B=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{ED}$

$m\angle C=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AE}$

$m\angle D=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB}$

$m\angle E=\frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BC}$



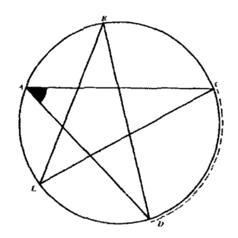
شكل (1)

$$m\angle A+m\angle B+m\angle C+m\angle D+m\angle E=\frac{1}{2}\left(m\overset{\frown}{CD}+m\overset{\frown}{ED}+m\overset{\frown}{AE}+m\overset{\frown}{AB}+m\overset{\frown}{BC}\right)$$

هذا يعني، بأن مجموع قياس زوايا الرؤوس (القمم) يساوي نصف قياس الدرجات لمحيط الدائرة، أو 180^{o}. مرة أخرى، لا يوجد أي فقدان بالعمومية بأن نجيز لشكل الخماسي – غير المحدد بافتراض وضع اكثر فائدة. والآن، فإن التغيير قد جعل المسالة اكثر سلاسة (وقابلة للحل بيسر) أن تبنى أسلوبا آخر في المعالجة قد وفر لنا مسألة اكثر بساطة، ومسألة مماثلة للحل، مسألة سوف ترشدنا إلى حل مباشر وسريع للمسألة الأصلية.

يمكن استخدام حالة خاصة، أخرى، لبيان هذه الاستراتيجية، والتي ستفترض بأن الشكل الخماسي شكل منتظم، ثم نجد مجموع الزوايا (حيث تمتلك كل زاوية منها نفس القياس).

(*) قدم هذه المسألة الدكتور Stephen E Moresh.



شكل (2)

اعتبار الحالات القصوى
Considering Extreme Case

لتحليل بعض والمواقف، سواء من خلال منظور رياضي، أو منظور من نوع آخر، يبدو بأن تأمل الحالات القصوى أمراً مفيدا.

إن إبقاء بعض المتغيرات ثابتة، بينما تتغير الأخرى باتجاه قيمها القصوى، قد يوفر في بعض الأحيان استبصارا مفيدا بموقف ما. قد تحل بعض المسائل بسهولة بالغة عند اعتبار الحالات القصوى للمواقف المطروحة في مثل هذه الحالة، وينبغي أن يكون المرء شديد الحرص في اعتبار الحالات القصوى التي لا تغير طبيعة المتغيرات الحاسمة في المسألة.

يضاف إلى ذلك، ينبغي أن نكون متيقظين بعدم تغيير المتغير الذي يحمل تأثيرا على غيره من المتغيرات.

إن الاستخدام المثالي لاعتبار الحالات القصوى يعد من اكثر الاستراتيجيات المفيدة في حل المسائل الرياضية بالإضافة إلى تلك التي تحتشد بكثرة في حياتنا اليومية.

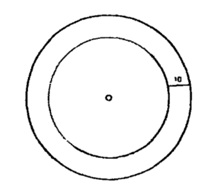
إننا نكثر من استخدام هذا النوع من الاستنتاج عندما نكون موشكين على أن نقابل شخصا آخر في موقف مفاوضات Negotiation افترض انك تشعر بأن موقفك هو الموقف الصائب، لكنك قلق من دفع موضوعك بعيدا جدا بحيث ينجم عن ذلك مشاكل أخرى.

بصورة عامة، فإننا نمتحن مثل هذه المواقف في ضوء القرينة، كيف ستكون "أسوأ سيناريوهات الحالة". أي، ما هو أسوا أمر تتوقع حدوثه إذا كانت محبتك ستعاني انحرافا؟ بعدها سوف نستمر إن التعجيل في حدوث سيناريو أسوأ حالة هي شكل من أشكال اعتبار الحالة القصوى.

إننا نستخدمها بكثرة في حياتنا اليومية عندما نضع ميزانية للوقت، وميزانية لاستثماراتنا المالية، وأمور أخرى مشابهة. لكي نذكر قيمة هذه التقانة وتتلمس فوائدها الجمة تأمل المسألة الآتية.

مسألة Problem

تبتعد دائرتان متحدتا المركز عن بعضهما بـ 10 وحدات كما في الشكل المبين أدناه. ما هو الفرق بين محيطي هاتين الدائرتين؟



الحل Solution

إن الطريقة المباشرة – التقليدية لحل هذه المسألة تتجه صوف إيجاد قطري هاتين الدائرتين، وإيجاد محيطهما، ثم إيجاد الفرق بينهما.

بما أن أطوال أقطار هاتين الدائرتين لم يذكر في المسألة المطروحة، فإنها اكثر تعقيدا، لحد ما، من المعتاد.

افترض أن d يمثل قطرا الدائرة الصغيرة، لذا سيصبح قطر الدائرة الكبيرة $d + 20$. إن محيطي الدائرتين سيكون $d\pi$، و $\pi(d + 20)$ على التوالي. في ضوء ذلك سيكون الفرق بينهما

$$\pi (d + 20) - \pi d = 20\pi$$

إن الإجراء الماهر سوف يتوجه صوب استخدام حالة قصوى. دع الدائرة الأصغر من هاتين الدائرتين، تزداد صغرا لحين تصل إلى الحد الأقصى بصغرها فتتحول إلى "نقطة دائرية". وفي هذه الحالة ستصبح مركزا للدائرة الأكبر، وستتحول المسافة الموجودة بينهما لتصبح نصف قطر الدائرة الأكبر.

إن الفرق بين طول محيطي هاتين الدائرتين تحول الآن إلى محيط الدائرة الكبيرة، وهو 20π.

رغم أن النهجين قد أثمرا نفس الجواب، يمكنك ملاحظة كيف أن الحل التقليدي قد تطلب عملا اكبر وذلك يأخذ الفرقين بين أطوال محيطي الدائرتين.

إعداد رسوميات (عرض مرئي)
Making a Drawing (Visual Representation)

في هذا القسم سنحاول بيان استخدام الرسوميات لحل

المسائل حيث لا يكون العرض المرئي شائع الاستخدام بناء على طبيعة المسألة المطروحة.

تظهر في حياتنا اليومية، مجموعة من القرارات التي نشأت بناء على العرض المرئي للبيانات والعلاقات، حيث تسلك هذه التقانة دورا اكثر سهولة مما يتوقع لها كعنصر من الموقف.

في علم الاجتماع، على سبيل المثال، هناك مخططات اجتماعية Sociograms تعكس، بصورة مرئية، العلاقات الداخلية للمجموعة.

إن نظرية المخطط Graph Theory توفر مناخا مناسبا لفحص العلاقات الهندسية، والتي تعتمد على الموقع والتواقف المتبادل Interdependence اكثر من اعتمادها على الحجم والشكل.

إن المسألة المشهورة لـ "جسور كونجسبرغ Bridges of Konigsberg" يمكن حلها أو توضيحها بسهولة عن طريق اعداد مخطط شبكي Network Diagram كعرض مرئي للموقف (انظر الوحدة الإثرائية 96). إننا نستخدم المخططات أو المرتسمات بكثرة في حياتنا اليومية، فنستخدم الخارطة Map لتحديد كيفية الوصول إلى هدف محدد، ونقوم في أحيان أخرى بعمل مخطط أولي لخرائط الشخصية لتوضيح المسار أمام شخص آخر، عندما لا نفلح في وصف الرحلة بكلماتنا وعباراتنا.

إن رسم صورة ما يجعل الوصف اكثر وضوحا، واسهل اتباعا. وبعد كل هذا، قد قيل لمرات عديدة بأن صورة واحدة تعدل أكثر من 1000 كلمة !.

تأمل المسألة الآتية، والتي لا يتوقع أن يرسم مخطط أثناء حلها !.

مسألة Problem

في الساعة الخامسة، قرع جرس الساعة 5 مرات خلال خمسة ثوان. كم تستغرق نفس الساعة، وبنفس السرعة، لكي تقرع 10 مرات في الساعة العاشرة ؟ (افترض بأن قرعة الجرس ذاتها لا تستغرق وقتا).

الحل SOLUTION

إن الجواب لن يكون 10 ثوان !. فطبيعة هذه المسألة لن تؤدي بنا إلى التفكير بضرورة إعداد مخطط رسومي. ولكن، دعنا نستخدم مخططا رسوميا للموقف لكي نرى بدقة ماذا يحدث في ثنايا هذه المسألة. في الرسم، تمثل كل نقطة قرعة جرس، وعليه سيظهر لنا في الشكل الآتي خمسة نقاط تمثل الثوان الخمسة مع أربعة فواصل زمنية تقيم بينها.

① ② ③ ④ ⑤

لذا فإن كل فاصل زمني ينبغي أن يستغرق $\frac{5}{4}$ ثانية. والآن دعنا نتوجه صوب اختبار الحالة الثانية:

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

هنا نستطيع أن نرى من المخطط بأن قرعات الجرس العشرة سوف ينشأ عنها 9 فواصل زمنية. وبما أن الفاصل الواحد يستغرق $\frac{5}{4}$ ثانية، فإن الفترة الزمنية الكلية التي يقرع خلالها جرس الساعة عند الساعة العاشرة ستكون مساوية $9.\frac{5}{4}$ أو $11\frac{1}{4}$ ثانية.

التخمين الذكي والاختبار (متضمنا التقريب)
Intelligent Guessing and Testing (Including Approximation)

تعرف هذه التقانة أيضاً بطريقة "المحاولة – والخطأ Trial-and-Error"، ولكن في هذه التسمية مبالغة في تبسيطها، لأن هذه الاستراتيجية تتسم بكونها معقدة لحد ما.

إن استراتيجية التخمين الذكي والاختبار تكون مفيدة بشكل ملموس عندما تظهر الحاجة إلى حصر قيم المتغيرات لجعل الحل اكثر طواعية وانقيادا. وسيكون من المفيد أيضاً عندما تكون الحالة العامة اكثر تعقيدا، ولحد بعيد، بالمقارنة مع الحالة الخاصة. بواسطة التقريب نستطيع محاولة تضييق الخيارات في مسعى للتركيز على الجواب الصحيح. وباستخدام هذه الاستراتيجية، فإننا نباشر تخمينا، ثم نبدأ باختباره قبالة ظروف المسألة المطروحة.

إن كل تخمين تال قد استند إلى المعلومات المستقاة من اختبار التخمين السابق.

حاول أن تبقي في ذهنك، على الدوام، حقيقة وجود فرق كبير وملموس بين "التخمين" و "التخمين الذكي".

إن حل معادلة ما، هو بالحقيقة، لا يزيد عن كونه شكلا من أشكال التخمين الذكي والاختبار. إن ما نقوم به في الحل هو وضع من التخمين المتقدم والوصول إلى الحل بذكاء ببعض من الحرفنة الرياضية. إنه جزء من الفحص أو التحقق للاختبار أو التخمين الذي هو في الواقع عمل صائب. إن الاستخدام الشائع لهذا الإجراء يشابه تحريك الجمرات الذي نقوم به عندما نطهو شريحة من اللحم ونلكزها للتأكد من كونها صالحة للتقديم. إننا ندرس مقياس درجة الحرارة Thermometer في

لب قطعة اللحم بدلا من قطع الشريحة قبل أوان فتحها. نستطيع أن نقرأ درجة الحرارة في لب شريحة اللحم للتأكد من تخميننا الشخصي، والذي سيتيح لنا إمكانية الحكم على تحديد حالة نضجها. إننا نخمن ونختبر.

إذا كان قد ظهر بطلان تخميننا الأولى بأن الشريحة ناضجة عند اختبارنا للتخمين بواسطة مقياس درجة الحرارة، فسوف نستمر لعملية طهي اللحم لبضعة دقائق أخرى، لحين نصبح جاهزين لإصدار تخمين جديد.

إن نفس هذا الإجراء يتبناه النجار الذي لا يستطيع الحصول على قياسات دقيقة لقطعة خشب ذات شكل خاص لغرض وضعها في مكان محدد. سيقوم هو، أيضاً، بقياس حجم وشكل قطعة الخشب، وبعدها، عن طريق الاختبار المستمر لملاءمتها، وإعادة تغيير شكلها، سوف يصل إلى حل هذه المسألة الإنشائية.

إن السؤال المطروح "جد الإعداد الثلاثة – المتتابعة والتي حاصل ضربها 24"، يفتقر إلى حل جبري يتسم بتحد كبير. إن المعادلة ستكون كما يلي:

$$(x)(x+1)(x+2)=24$$

وهي معادلة تكعيبية يصعب حلها. ولكن باستخدام استراتيجية التخمين الذكي والاختبار، نستطيع إيجاد الأعداد الثلاثة بسهولة: 2, 3، 4. يمكننا العثور على مثال اكثر واقعية عن هذه الاستراتيجية في المسألة الآتية.

مسألة Problem

جد العددين الصحيحين–الموجبين اللذان حاصل الفرق بينهما 5، وأن مجموع جذريهما التربيعيين هو 5 أيضاً.

الحل Solution

إن النهج التقليدي للحل يلجأ إلى صياغة منظومة من المعادلات كما يأتي:

ليكن x = العدد الصحيح الأول.

وليكن y = العدد الصحيح الثاني.

إذن،

$$y=x+5$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$$

بتربيع طرفي المعادلة، نحصل على:

$$x+x+5+2\sqrt{x(x+5)}=25$$

بالتبسيط:

$$2\sqrt{x(x+5)}=-2x+20$$

بتربيع طرفي المعادلة، ثانية، نحصل على:

$$4x^2+20x=4x^2-80x+400$$

$$100x=400$$

$$x=4$$

$$y=9$$

إن العددين الصحيحان هما 4 ، 9.

يبدو واضحا بأن هذا الإجراء بحاجة إلى معرفة في المعادلات والجذور، إضافة إلى ممارسة جبرية متأنية. وكخيار بديل للحل، دعنا نستثمر استراتيجية التخمين الذكي والاختبار بحل هذه المسألة.

بما أن مجموع الجذور التربيعية للعددين الصحيحين هو 5، فإن الجذور التربيعية لكل منهما هو 4 و 1 أو 3 و 2. لذا فإن الأعداد يمكن أن تكون 16 و 1، أو 9 و 4. ولكن فقط العددان 9، 4 يكون حاصل الفرق بينهما 5، لذا فإن هذا الجواب هو الجواب الصحيح للمسألة.

احتساب جميع الاحتمالات
Accounting for All Possibilities

إن اعتبار جميع الخيارات قد يكون نهجا فعالا لحل مسألة ما. بالرغم من وجود حالات لا تعد فيها هذه الاستراتيجية من اكثر الإجراءات تعقيدا، فإنها قد تكون الأسهل استخداما، نظرا لكونها غير مبالغة في التجريد. من ناحية أخرى، فإن قضية احتساب جميع الاحتمالات هي الأكثر حسما في استخدامات هذه الاستراتيجية.

إن افتقار المرء إلى إجراء منظم لاحتساب جميع الاحتمالات، سيؤدي بالاستراتيجية إلى الإخفاق أو الانحراف.

إننا نستخدم على الدوام استراتيجية حل المسائل هذه في حياتنا اليومية دون أن نكون مدركين لتوظيفنا إياها في هذا القطاع وذاك.

افترض انه طلب منك الاشتراك في لقاء بأحد الفنادق الذي يبعد حوالي 150 ميلا. إن الطريق الذي يقرر سلوكه معظم الناس، كأفضل وأسرع طريق إلى اللقاء سيكون في ضوء إعداد قائمة سبل النقل المحتملة (يعني سواء كانت الوسيلة: قطارا، أو طائرة، أو سيارة، أو حافلة نقل ركاب، أو هليوكوبتر، ... الخ)، أما كتابة أو عقليا، ثم باعتماد مبدأ الحذف، أو الاختيار المباشر (في ضوء الموازنة على أساس الكلفة، الوقت المستغرق، ... الخ)، مستعد إلى اختيار الأسلوب الأمثل.

عندما يكون أداء برنامج الحاسوب سيئا، ونريد أن نحدد السبب، فإننا، بصورة عامة، نبدأ بإعداد قائمة (ربما في الذهن، ثانية) تحوي مختلف الأسباب المحتملة لسوء الأداء. بعدها، سنقوم بفحص النقاط المدرجة على القائمة، واحدة فواحدة، حتى نجد السبب الذي يكمن وراءه سوء الأداء.

إن نهجا مقاربا يستخدم عندما نحاول تحديد سبب عدم عمل المصباح، سنقوم بإدراج قائمة بأهم الأسباب المحتملة لسوء الأداء (يعني، سلك رديء، أو احتراق بصلة المصباح، أو عطب خارجي، ... الخ)، بعدها سنبدأ باستبعاد النقاط التي لا تعاني من خلل في الأداء، واحدة فواحدة، حتى نضع أيدينا على سبب الخلل.

عندما يتخذ الناس مقعدا في مطعم من المطاعم، فانهم يمسكون بقائمة المأكولات التي تعج بأصناف متعددة من المقبلات، والسلاطات، وأطباق الطعام الرئيسية، والحلويات. ويتوقع أن يعمدوا إلى اختيار الأطباق التي توفر لهم وجبة متكاملة.

إن الإجراء الاعتيادي الذي يتبناه معظم الناس في اختيار الطعام، يتألف من قراءة جميع محتويات قائمة المأكولات، ثم وضع طلب يزورهم بوجبة متوازنة، ومشبعة.

بالرغم من عدم إدراك زبائن المطعم فانهم بالحقيقة يستخدمون استراتيجية احتساب جميع الاحتمالات في اختيار وجبة العشاء اللذيذة.

توجد في حقل الرياضيات أمثلة متعددة حيث تكون استراتيجية احتساب جميع الاحتمالات الأكثر تفضيلا من غيرها.

تأمل المسألة الآتية:

مسألة Problem

إذا قذفت بأربعة قطع نقدية، فما هي احتمالية ظهور وجهين، على الأقل؟

الحل Solution

بصورة طبيعية، فإننا نستخدم طرائق حساب احتمالية للحصول على هذا الجواب بسرعة ملحوظة – وإذا كنا على دراية بالصيغة المناسبة التي ينبغي استخدامها.

ومع ذلك، فإن من السهل عمل قائمة بجميع الاحتمالات (فضاء العينة Sample Space) ثم البدء بتأشير تلك التي تتطابق مع المطلوب، وهو ظهور وجهين على الأقل.

أدناه القائمة الشاملة لجميع الاحتمالات الممكنة:

HHHH	**HHHT**	**HHTH**	**HTHH**
THHH	**HHTT**	**HTHT**	**THHT**
HTTH	**THTH**	**TTHH**	HTTT
THTT	TTHT	TTTH	TTTT

إن الأحداث المؤشرة بخط عريض (Bold) هي تلك التي يظهر فيها وجهان أو اكثر وتحقق الشروط المطلوبة.

هناك 11 حالة منها 2 وعليه، فإن الاحتمالية المطلوبة هي $\frac{11}{16}$.

إن توضيحا آخر حيث يكون استخدام هذه الاستراتيجية مفيد جدا، يمكن ملاحظته في حل المسألة الآتية:

مسألة Problem

في المثلث ABC، $\cos\angle A.\cos\angle B.\cos\angle C>0$

فما هو نوع المثلث ABC؟

الحل Solution

سيحاول بعض الطلبة تعويض قيم الزوايا C, B, A ثم يحاولوا حل المسألة، بيد ان هذا المنهج يؤدي، في معظم الأحيان، إلى مصاعب جمة. وسنقوم بحل المسألة باعتماد مبدأ احتساب جميع الاحتمالات لأنواع المثلثات المختلفة.

1. المثلث ABC قائم الزاوية:

إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية، فسكون قياس إحدى زواياه مساويا 90^o، ونحن نعلم بأن $\cos 90^o = 0$.

وعليه فإن قيمة $\cos\angle A.\cos\angle B.\cos\angle C=0$

وهو متعارض مع مطلوب المسألة.

2. المثلث ABC منفرج الزاوية:

إذا كان المثلث ABC منفرج الزاوية، فسيكون قياس إحدى زواياه (دعنا نفترضها الزاوية B) اكبر من 90^o، بينما تكون الزاويتان A, C كلاهما حادة.

وعليه سيكون: $\cos\angle B<0$

بينما $\cos\angle A>0$

$\cos\angle C>0$

إذن: $\cos\angle A.\cos\angle B.\cos\angle C<0$

ومرة ثانية، هناك تعارض بين النتيجة ومطلوب المسألة.

3. المثلث ABC مثلث حاد الزاوية:

إذا كان المثلث ABC حاد الزاوية، فستكون جميع زواياه حادة أيضاً.

وعليه سيكون: $\cos\angle A>0$

$\cos\angle B>0$

$\cos\angle C>0$

وسينتج عن ذلك:

$\cos\angle A.\cos\angle B.\cos\angle C>0$

إذن إن مثلثنا هو مثلث حاد الزاوية.

تنظيم البيانات Organizing Data

ليس غريبا أن نجد طالبا، قد أعيته لحد ما مسألة من المسائل، وأن هذا الارتباك والحيرة قد نشأ عن سوء تنظيم البيانات المستقاة من قضية المسألة وبطريقة تختلف عن

الأسلوب الذي عرضت فيه.

إن عملية إعادة الترتيب هذه، قد تكون مرئية، أو قد تكون ببساطة طريقا بديلا لأسلوب معاينة الموقف.

وإن استراتيجية حل المسائل هذه، قد تكون مرئية، أو قد تكون ببساطة طريقا بديلا لأسلوب معاينة الموقف.

إن استراتيجية حل المسائل، هذه، تقحم نفسها باستمرار في عمليات التخطيط التي تسود حياتنا اليومية. إننا نقوم بتنظيم البيانات، مرئيا، عندما نعمل على ميزانية المنزل، ونرتب قوائم المدفوعات على شكل مجاميع. كذلك، عندما نجابه بعدة مهام، ومشكلة اختيار أي طريق افضل للتعامل معهم، آنذاك نسعى إلى تنظيم المهام وفقا للزمان، أو المكان، أو الصعوبة، أو في ضوء خصائص أخرى تمتلك أهمية ملموسة.

على سبيل المثال، إننا نستخدم استراتيجية تنظيم البيانات عندما نرغب بالاستثمار الأمثل للوقت المتاح في جولة تسوق. فنقوم بإعداد قائمة بالمواد التي نرغب بشرائها، ثم نعمد إلى تنظيمها بحيث نتجنب ازدحام الناس في بعض مواطن السوق، أو نقلل زمن التنقل بين المخازن المختلفة. بنفس الطريقة، فإن السائح الذي يروم زيادة مساحة مشاهداته، سوف يعمد إلى تنظيمها حسب الموقع.

عندما نعمد إلى لم شمل المعلومات المطلوبة لغرض إعداد ضرائبنا السنوية، تصبح طريقة: تنظيم الوصولات الشخصية، والشيكات، ونماذج W-2، ونماذج 1099، وغيرها، أمرا حرجا للغاية.

إذا لم نحسن تنظيم هذه الأوراق والوثائق، ستصبح عملية إملاء نماذج الضريبة وقوائمها بصورة كفوءة ودقيقة أمرا مستحيلا. إن عقبة اجتياز اختبار بالتاريخ، تعتمد في بعض الأحيان، على قدرة المرء على تنظيم البيانات.

إن تنظيم البيانات قد يساعد أحدنا على تحليل المفاهيم، وإنشاء مواضيع شائعة في التاريخ، والتي قد تؤدي بدورها إلى تحديد سياسة أو مبدأ من المبادئ.

إن مثل هذا السؤال قد يظهر في اختبار ما، بحيث أن الطالب الذي يمتلك القدرة على تنظيم البيانات والآراء أولا، ثم يعمد إلى تحليلها، سيكون ذو ميزة باهرة وجلية.

إن تنظيم البيانات في حل لمسألة رياضية قد تظهر أهميته جلية في عدة طرق، ويمكن ان نلحظ إحداها في حل المسألة الآتية.

مسألة Problem

جد اكبر حاصل ضرب ممكن لعدديين طبيعيين مجموعهما 41.

الحل Solution

يستطيع الطلبة صياغة المعادلة $y = x\,(41 - x)$

حيث x = قيمة أحد العدديين.

$(41 - x)$ = قيمة العدد الآخر.

y = حاصل ضرب العدديين.

وعند استخدامهم لأسلوب رسم مخطط بياني، سيحصلون على قطع مكافئ بعدها سيتمكنون من إيجاد النقطة القصوى في القطع المكافئ في إيجاد القيمة المطلوبة.

من ناحية ثانية، نستطيع حل هذه المسألة، ببساطة، عن طريق تنظيم البيانات على الشكل جدولي.

الأعداد		حاصل الضرب
1	40	40
2	39	78
3	38	114
:	:	:
15	26	390
16	25	400
17	24	408
18	23	414
19	22	418
20	21	420

إن اكبر حاصل ضرب ممكن هو (420).

إن أنموذجا آخر على تنظيم البيانات يمكن ملاحظته في الحل الخاص بالمسألة التالية.

مسألة PROBLEM

إذا كانت كلفة A من التفاح تساوي D من الدولارات، فما هي الكلفة بالسنتات لـ B من التفاح بنفس القيمة؟

الحل SOLUTION

هناك مجموعة من الطرق التي يستطيع الطلبة بواسطتها التعامل مع هذه المسألة. في كثير من الأحيان، سيستخدمون الأعداد بدلا من الرموز، ثم يحاولوا إعادة إقحام الحروف لإيجاد الجواب النهائي.

إن هذه الطريقة قد تؤدي ببساطة إلى إرباك وحيرة، ولسوء الحظ، إلى إجابة غير صحيحة.

لذا فقد قد تعلم بعض الطلبة على التنقيب عن أسعار الوحدة ثم يستأنف طريقه من هذه النقطة. وهذا الأسلوب، يؤدي أيضاً إلى إرباك، كقاعدة عامة. وعليه فإن مسألة بهذا الشكل يمكن أن يكون افضل حل لها عن طريق تنظيم البيانات بطريقة تضفي عليها معنى.

سنستخدم، هنا، التناسب مع ملكة الحس العام

Common Sense. يمكن الحصول على التناسب عن طريق تثبيت نفس وحدات القياس في كل مجموعة كسرية.

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{كلفة A من التفاح}}{\text{كلفة B من التفاح}} = \frac{100D}{x}$$

لاحظ بأننا استخدمنا الحس العام في الحصول على الكسر الأخير. نظرا لأن المسألة تتطلب الحل بالسنتات، فقد استخدمنا الكسر بالسنتات كوحدة قياس بدلا من الدولارات.

وعليه، عندما سنجد قيمة x، سنحصل على الجواب أما ما تبقى فهو سهل لا صعوبة فيه.

$$\frac{A}{B} = \frac{100D}{x}$$

$$x = \frac{100BD}{A}$$

الاستدلال المنطقي Logical Reasoning

عندما تتعامل مع الأصدقاء والزملاء، نجد بأن ما نقوله يثير دائما إجابات محددة، وان هذه الإجابة تؤدي، بدورها، إلى إجابة أخرى، وهكذا.

وإذا حاولنا التنبؤ بسيناريو المحادثة، أو طبيعة المناقشة/ البرهان، فإننا بالحقيقة، نستخدم الاستدلال المنطقي.

على سبيل المثال، إذا قلت A، فانك ستتوقع أن تكون الإجابة B، والتي ستؤدي بدورها إلى القضية C، والتي ستستجيب للقضية D.

إن ممارسة الاستدلال المنطقي بأسلوب مؤثرة سيؤدي إلى تحسين العلاقات القائمة بين الأشخاص وذلك بمساعدته على حل (أو اجتناب) المشاكل قبل ظهورها.

إننا، بصورة عامة، نلجأ إلى تحليل موقف ما دون أن نعي ما هي العملية الحقيقية التي نمارسها، من جهة ثانية، فإننا نحاول في درس الرياضيات أن نجعل طلبتنا على إدراك تام لهذه العملية العقلية، ونسعى إلى إرشادهم، أو تدريبهم، على التفكير بصورة منطقية.

بما أن البعض قد يميل إلى البرهنة على أن التفكير الاستقرائي Inductive Thinking (يعني، البدء بمجموعة أمثلة جزئية للوصول إلى تعميمات) طبيعيا لحد ما، فإن الصيغة المنطقية للاستدلال بحاجة إلى بعض من التمرين.

في مواقف الحياة اليومية، فإننا نميل إلى الاستدلال المنطقي، بصورة نموذجية، لتخطيط استراتيجية تصلح لحظة عمل ما، أو قد نستخدمه للبرهنة على نقطة محددة أثارت نقاشا مع زميل أو مدير لنا.

إن قوة البرهان أو الحجة تعتمد، بصورة دائمة، على صحة الاستدلال المنطقي تعني الفرق القائم بين نجاح وفشل برهان من البراهين.

إن أسلوب وضع البرهان وطرحه قد يؤثر على نجاح أو التقدم بالعمل، بالإضافة إلى المرتبة.

يضاف إلى ذلك، إن النجاح أو الفشل بصفقة تجارية يعتمد إلى حد كبير على براعة المرء بالاستدلال المنطقي. إن كل مسألة رياضية، تقريبا، نتعامل معها تتضمن درجة ما من الاستدلال المنطقي، وحتى عندما نميل إلى اختيار اكثر استراتيجيات حل المسائل كفاءة. إن المنطق الصوري Formal Logic هو الأساس المتين الذي ترتكز إليه الرياضيات البحتة Pure Mathematics والبراهين. بصورة عامة، فإن الاستدلال المنطقي الذي لا يبدو بصورة برهان يساعدنا على تحليل المسألة.

عندما يكون أعداد البراهين مناسبا للطلبة، نقترح بأن يتم إعطائهم مسائل "برهن – أو– انقض برهان Prove -or- Disprove" والتي ستكون كافية بالنسبة لهم على تنمية عادة امتحان الحدس قبل محاولة البرهنة على صحته.

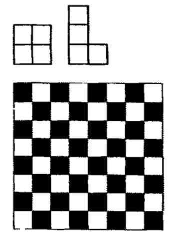
إن هذا الأسلوب هو الجزء الطبيعي الآخر لدى الرياضيين الذين يجابهون حدسا غير مألوف. ولسنا بحاجة إلى أن نقول، بأن بعض المسائل المطروحة على طاولة "برهن–أو انقض البرهان" سوف تنتهي إلى نقطة ينقض فيه برهانها.

مسألة PROBLEM

برهن على استحالة المكانية تغطية رقعة الداما بواسطة خمسة عشر 3×1 من قطع حجارة الدومينو الرباعية ذات الشكل L (إن حجارة الدومينو الرباعية Quadrominoes هو اصطلاح يؤشر إلى أشكال تتألف من أربعة مربعات متصلة، بحيث أن المربعات المتلاصقة تشترك بزاوية) وواحدة أخرى تتألف من 2×2 مربع من نفس الحجارة.

الحل SOLUTION

إن هذه المسألة هي ملحق سار جدا للمسألة التي عرضت سابقا، والمتعلقة بإحدى وثلاثين قطعة من حجارة الدومينو، ورقعة الداما بالزوايا المتقابلة الملغاة.



عند اختيار النمط اللوني لرقعة الداما المعيارية لن نصل إلى أي استبصار مفيد بهذه المسألة، لأن كل من الشكلين المستخدمين في هذه المسألة يغطيان مربعين باللون الأبيض، ومربعين باللون الأسود.

إن المنطق يأمر بنمط لوني يميز بصورة جلية بين نوعي حجارة الدومينو الرباعية المطروحة في هذه المسألة . ينشأ ابسط أنواع النمط اللوني عن شق مساحة من رقعة الداما (بحيث، على سبيل المثال، يكون لون كل صف معاكسا للصف/أو الصفوف التي تحاذيه).

والآن، فإن كل حجارة دومينو بشكل L ينبغي أن تغطي ثلاثة مربعات من لون واحد، والمربع الرابع سيتكفل بتغطية مربع واحد من اللون الآخر، بغض النظر عن أسلوب وضعها. أما حجارة الدومينو المربعة فستغطي مربعان من كل لون.

بما أن حاصل ضرب فردي × فردي يثمر عن نتائج فردية، فإن القطع الخمسة عشر ذات شكل حرف L ينبغي أن تغطي عددا فرديا من المربعات البيضاء، وعددا فرديا من المربعات السوداء أيضاً. وبما أن حاصل مجموع فردي + زوجي ينبغي أن ينتج عددا فرديا، فإن عدد المربعات السوداء التي ستغطي بواسطة القطع الستة عشر من حجارة الدومينو المربعة سيكون فرديا أيضاً، وأن العدد الكلي للمربعات البيضاء التي ستغطيها القطع الستة عشر من حجارة الدومينو سيكون بلا ريب، فرديا أيضاً.

لكن عملية الشق سينتج عنها 32 مربعا اسود اللون، و32 مربعا ابيض اللون، لذا فإن التغطية المذكورة لن تكون ممكنة بأي حال من الأحوال .

مسألة PROBLEM

برهن أو انقض برهان قضية أن الشكل رباعي الأضلاع الذي يحوي على أقطار متعامدة، وبأطوال متساوية، والذي يحوي على الأقل، على قطر واحد ينصف القطر الآخر، ينبغي أن يكون مربعا.

الحل SOLUTION

إن نقض البرهان (بواسطة مثال مخالف) قد يتألف، ببساطة، من رسم طيارة ورقية، متناظرة أفقيا Symmetrically Horizontal وليست متناظرة عموديا، والتي يكون فيها طول شعاع التقاطعcrossbeam مساويا للشعاع العمودي Vertical Beam.

إن الاستدلال المنطقي يؤدي إلى توفير حجم كبير من العمل والجهد المستنفد في حل بعض المسائل. وقبل أن ننغمس في حل جبري للمسألة، يستطيع المرء أن يتأمل محاولة "الاستدلال بالحل". إن التوضيحين الآتيين يظهران بوضوح كيف يمكن أن يتحقق هذا الأمر.

مسألة PROBLEM

إن العدد الذي يتألف من أربعة أرقام x56y، حيث x و y هما الرقمان الأول والأخير على التوالي، يقبل القسمة على 9. فما هي قيمة x+y؟

الحل SOLUTION

بصورة تقليدية، سيحاول الطالب ببساطة تعويض قيم مختلفة لكل من x و y لكي يرى أي قيمة لهما ستثمر عن جعل العدد يقبل القسمة على 9.

رغم أن هذا الأسلوب هو شكل من أشكال التخمين والاختبار، لكنه ليس كافيا، لذا ينبغي أن ندمجه مع الاستنتاج المنطقي الذي يتعامل مع المعلومات المتوفرة.

نذكر بأنه لكي يكون العدد قابلا للقسمة على 9، ينبغي أن يكون مجموع أرقامه إحدى مضاعفات 9. وعليه:

$x+5+6+y=9M$

أو

$x+y+11=9M$

إن اكبر قيمة للرقمين x, y هي 17=9+8.

ولكن 17+11=28

والعدد 28 لا يقبل القسمة على 9.

هل نستطيع الحصول على 27؟ وفي ضوء ذلك ينبغي أن يكون x+y=16، و 9+7=16.

إن حاصل الضرب الأقل – التالي الذي تم احتسابه – رجعيا من العدد 27 هو 18.

إذن x+y=7، وسيكون مضاعف العدد 9 صغيرا جداً ليفي بالشرط ولن نجد سواه، فعليه سيكون مجموع x+y=16 أو 7.

مسألة PROBLEM

جد جميع أزواج الأعداد الأولية التي يساوي مجموعها 999.

الحل SOLUTION

إن كثيرا من الطلبة سيبدءون الحل باختيار قائمة من الأعداد الأولية ومحاولة اختيار أزواج منها، ثم يلجئون إلى إيجاد حاصل جمعها، ويعاودون الكرة لعلهم يفلحون بالوصول إلى مجموع الإعداد يبلغ 999.

ويبدو واضحا بأن هذه الطريقة مملة جدا، إضافة إلى ابتلاعها وقتا طويلا دون طائل، ولن يكون الطلبة متأكدين تماما من اختيارهم لجميع أزواج الأعداد الأولية دون ان يفلت أحدها من بين أيديهم.

دعنا نستخدم استراتيجية الاستنتاج المنطقي لحل هذه المسألة. من اجل الحصول على حاصل جمع فردي لعددين (أوليين أو غير ذلك)، ينبغي أن يكون أحدهما زوجيا. ونظرا لوجود عدد أولي واحد زوجي هو 2، لذا ينبغي أن يوجد زوج واحد من الأعداد الأولية التي مجموعها 999، وان هذا الزوج هو 2 و 997.

إن هذه الاستراتيجيات العشرة، لحل المسائل، ينبغي أن تمارس مع مسائل محفزة تظهر القدرة المتميزة لهذه الاستراتيجيات. ولابد من استخدام أسماء هذه الاستراتيجيات، حيثما استخدمت، لأن البحوث الميدانية قد أظهرت بأن عملية التكرار تؤدي إلى تحسين استرجاع الاستراتيجية.

إنا نقترح الرجوع إلى الكتاب الآتي لأغراض التقوية المطلوبة، ولكي تصبح أكثر ألفة مع هذه التقانات

Posamentier, A.S. and S. Krulik, Problem-solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher, Thousand Oaks, CA: Crowin Press, 1998.

متى تعودت على استخدام هذه الاستراتيجيات، حاول أن تنقب عن طرق لتطبيقها على مسائل الكتب المنهجية وتمارينها، وبالتالي تعميق استخداماتها.

كذلك حاول أن تستخدم الاستراتيجيات لإيجاد طرق بديلة للحل، ولكن شريطة أن لا تقتنع، بسهولة، عند ظفرك بالحل. إن كيفية الحصول على الحل عادة ما تكون كأهمية الحصول عليه. وتذكر، أن هناك "طريقة الشاعر Poet's" و "طريقة القروي Peasent's Way" للحصول على حل. وإننا نرغب بأن يستخدم جميع طلبتنا، باستمرار، طريقة الشاعر.

ابتكار مسائل رياضية
Creating Mathematical Problems

إن التغييرات الحاصلة في اثنتين من مسلمات اقليدس الخمسة (مسلمة التوازي، ولا تناه الخط المستقيم) نجم عنها ثورة مفاهيمية بالرياضيات فتمخضت عن ظهور الهندسات اللااقليدية.

إن تقانة إحداث تعديلات صغيرة أو كبيرة في الظروف المحيطة بالمسألة الرياضية "فقط لأجل الاستمتاع بها" لها تراث مشترك بين الرياضيين وطلبة الرياضيات. وكانت نتائجها مبهرة.

إن مثالا آخر هو امتداد للحقيقة القائلة بوجود ثلاثية فيثاغورية Pythagorean Triples (x,y,z) والتي تحقق $x^2+y^2=z^2$. من جانب آخر، قد لا يتوفر لأحدنا وقت كاف لمحاولة إيجاد الأعداد الصحيحة x,y,z التي تحقق المعادلة $x^n+y^n=z^n$، للعدد الصحيح $n>2$.

بالحقيقة، إن مثل هذه المحاولة ستؤدي إلى القضية المعروفة بـ "نظرية فيرمات الأخيرة" (والتي تمت برهنتها بواسطة A-Wiles في حزيران عام 1993 ثم عدلت في تشرين أول من عام 1994).

يمكن تدريب الطلبة على إعداد وحل أسئلة يقومون بإعدادها شخصيا، عن طريق إجراء تعديلات، قد تكون طفيفة على أمثلة موجودة. وعندما ينجح الطلبة في ابتكار مسائلهم الشخصية، يستطيعون، بين الحين والآخر، إعداد مسائل تفوق قدراتهم الذاتية على حلها. وقد تكون بعضها غير قابلة للحل.

إن كل مسألة مطروحة قد تحوي على بعض الشروط التي يمكن تغييرها لإعداد أسئلة جديدة، أو إجراء تعديلات على الأسئلة الأصلية.

لذا، فإن على المعلم تحديد بعض خطط-التقييم البديلة لمنح الطلبة فرصة مناسبة لا تقتصر على المطلب التقليدي الذي يهدف دائما إلى ضمان حلهم للمسائل بصورة صحيحة، فحسب، ولكن لكي تجعلهم قادرين، أيضاً، على ابتكار المسائل.

وخلال بذل هذه الجهود الخلاقة سيبدأ الطلبة، بالفعل، في إدراك ماهية وأهداف المسائل المنتشرة حولهم.

ولتوفير مورد مساعد للمعلمين، والمعلمين المحتملين، حاولنا عرض بعض الاقتراحات حول كيفية تغيير مسائل محددة لتوليد مسائل جديدة. ويمكن استخدام هذه الاقتراحات لتوضيح موضوع أنواع التعديلات الممكنة للطلبة لكي يتعمق فهمهم لها.

إن الإبداع الحقيقي، سوف ينشأ عن التعديلات الخاصة بالطالب على المسألة فتبزغ كثير من الأمور التي كانت تكمن في الظل.

مسألة PROBLRM

لدى داؤد 45 قطعة نقود، تتألف من فئتي النيكل والدايم(*). إذا كانت القيمة الكلية لنقوده هي 3.5$. كم قطعة نقود من كل فئة من النقود موجودة لديه؟.

التغييرات الممكنة Possible Variations

1. ما هو اكبر عدد للنيكلات والدايمات التي يمكن أن يمتلكها والتي تصل قيمتها الكلية إلى 3.5$ ؟.
2. ما هو أصغر عدد ؟.
3. كيف ستتغير المسألة إذا أضيفت فئة الأرباع Quarters إلى النيكلات والدايمات ؟
4. هل من الممكن ان يكون لديه فقط دايمات وأرباع بدلا من الدايمات والنيكلات ؟.
5. بكم طريقة يمكن وصف مبلغ 3.5$ في النيكلات والدايمات؟

مسألة PROBLEM

بواسطة التركيب Construction (باستخدام مسطرة عدلة وفرجار) حدد موقع نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة AB:

A————B

التغييرات الممكنة Possible Variations

1. هل توجد أية طريقة لتحديد نقطة منتصف قطعة ما؟.
2. افترض أن طالبا قد غفل عن جلب مسطرة معه إلى المدرسة. هل هناك إمكانية لتحديد نقطة المنتصف بواسطة الفرجار فقط ؟.
3. بواسطة مسطرة فقط ؟
4. افترض أن طالبا لديه فرجارين قد أصابهما الصدأ بحيث لا يمكن تكييفه أو تضبيطه. هل يمكن تنصيف قطعة المستقيم $\overline{AB}$ بواسطة الفرجارين غير المضبوطين ؟.

مسألة PROBLEM

عند نقطة بمستوى سطح الأرض وتبعد 100 قدم عن قاعدة عمود الراية، كان قياس زاوية الارتفاع لقمة العمود مساويا لـ31^{o} جد ارتفاع عمود الراية مقربا إلى اقرب قدم.

التغييرات الممكنة Possible Variations

1. افترض أن ذات العمود يميل بـ 15^{o}. كيف ستقوم باحتساب طول العمود؟

افترض أن عمود الراية الأصلي يشخص عموديا فوق تل يرتفع بـ 15^{o}. كيف ستقوم باحتساب ارتفاع العمود ؟.

مسألة PROBLEM

برهن أن أوتار الدائرة تكون متطابقة عندما تبعد بنفس المسافة عن مركز الدائرة.

التغييرات الممكنة Possible Variations

1. بين وبرهن عكس المسألة.
2. بين وبرهن معكوس المسألة.
3. بين وبرهن عكس المعكوس Contra positive للمسألة.
4. هل توجد هناك أية تغييرات أخرى؟.

الإبداع في حل المسائل
Creativity In Problem Solving

إذا كانت هناك ثمة مصاعب في تعليم الطرائق الفعالة لاستخدام تقانات حل المسائل، فهناك بالطبع، صعوبات جمة تظهر عند تعليم "الإبداع".

إن إحدى هذه الصعوبات تكمن في صياغة تعريف دقيق للإبداع ذاته. كان يعتقد، في أوقات سابقة، بأن الإبداع هو قدرة كامنة في الجينات تمنح لقلة من البشر المحظوظين، ولكن في وقتنا الراهن عمد عدد كبير من علماء النفس إلى تأكيد أن العمليات التي تصاحب الإبداع هي قابلة للتعلم (أو على الأقل يمكن تحفيزها في ذات الفرد). وبالنسبة للأهداف التي وضعناها نصب أعيننا، في هذا الكتاب، فإننا نميل إلى تعريف الإبداع بوصفه القدرة على استنباط حلول غير تقليدية، وعميقة الفائدة، أو منفردة للمسائل المطروحة.

(تذكر بأن مثل هذه الحلول ليس من الضروري أن تحصل بسرعة. لأن جون كبلر قد استغرق عشرين عاما بكاملها لكي يتم صياغة قوانينه الثلاثة حول حركة الكواكب – والتي تعد من أهم الإنجازات الإبداعية في تاريخ العلم).

بينما تستمر التحريات والتنقيبات لإيجاد العلاقة المحتملة بين الإبداع والذكاء، فإن الاكتشافات الأولية تشير إلى أن هذين الميدانين غير متماثلين في كثير من جوانبهما.

فليس من الضروري أن يكون الطلبة ذوي الإبداع المتميز ممن يحصلون على أعلى درجة باختبارات الذكاء IQ.

إن تنوع اختبارات الإبداع، قد تكون مسؤولة، لحد ما، عن وجود بعض علماء النفس يتفقون بأن اختبارات الذكاء لا توفر قياسا دقيقا لنفس العمليات السائدة في موهبة الإبداع.

(*) Nickle = 25 $1 ، 1 Dime = 50 $

ندرج أدناه بعض المقترحات التي ستسهم في تشجيع الفعل الإبداعي داخل الصف.

1 وفر مناخاً صفياً يشجع على حرية التعبير.
2 احترم الأسئلة غير المألوفة، وحاول أن تعد مثالا بالاعتماد على تقصيك الشخصي وقدرتك على الإبداع.
3. احترم الأفكار غير المألوفة واعمد على مكافأة أصحابها.
4 وفر فرصا مناسبة للتعلم الذي يتضمن البحث عن الحلول الشخصية للطالب دون أن تكون عرضة لاحتساب الدرجات.
5 لا تثبط الخلاف.
6 شجع الطلبة على تقييم أفكارهم الشخصية وان يعمدوا إلى تدوينها في قوالب ثابتة، كلما كان ذلك ممكنا.
7 اشترك بمناقشة أمثلة حول الجهود التي بذلها مشاهير الناس المبدعين ـــ والعقبات التي اعترضتهم.
8 شجع الطلبة على اكتساب المعرفة في ميادين متعددة.
9 عندما تعطي واجبا محددا، وفر فرصا مناسبة للأصالة، والاستكشاف.
10. شجع جهود التعلم التعاوني على صياغة مسائل إبداعية.

خلاصة SUMMARY

إن العبارة البليغة والوجيزة التي يمكن أن تلخص هذا الفصل برمته هي: " إنا نتعلم حل المسائل افضل تعلم عن طريق مباشرة حلولها بأنفسنا".

إن هذه هي الحالة سواء كانت المسائل من الأنواع القياسية الموجودة في الكتب المنهجية لمادتي الجبر والهندسة، أو من أنواع التحديات التي قد نقع عليها في بعض الكتب المنهجية بالإضافة إلى الألغاز الخاصة، أو كتب المسائل (أنظر قائمة المراجع المقترحة).

إن من المستحيل أن يتضمن أي فصل (يناقش موضوعا من الموضوعات) عينات من كل أنواع الحلول، وعلى العكس، فقد حاولنا قدر استطاعتنا إفشاء مشاعر وحساسية عميقة تجاه جميع المواضيع التي تقطنها تقانة حل المسائل، والتي سترسي بدورها أسساً متينة: للاهتمام، وسيادة روح التحدي، وفرعا رياضيا مثمراً، بالإضافة إلى إنها ستوفر دعما لا محدودا للمرء عند اتخاذه للقرارات المختلفة في حياته اليومية.

إن حل المسائل، هي بالطبع من اكثر التقانات الرياضية التي تشحذ قدرات الطالب على التحليل وتعمق من قدراته الحرجة.في نفس الوقت، فإنها قد تساعد على تنمية إحساس بالإنجاز والإتمام لدى الطلبة. وقد لا نبالغ إذا قلنا بأن اكتشاف (أو تطوير) حقول شتى في ميادين المعرفة الرياضية ما هي إلا نتيجة مباشرة من نتائج أعمال استراتيجيات حل المسائل المختلفة. إن جزءا لا يستهان به من نظرية الاحتمال قد نشأ عن حلول مسائل مطروحة وتحديات شخصت أمام علما رياضيين.

إن كل ما نستطيع قوله حول الإنجازات الرياضية من خلال تقانة حل المسائل ينطبق على الطلبة الذين يسعون إلى الالتحاق بالجامعات، والطلبة الذين لا يسعون إلى ذلك.

إن تدريس الفن الدقيق في حل المسائل لجميع الطلبة هو بالطبع تحد للطلبة والمعلمين على حد سواء.

تمارين EXERCISES

1. اكتب مخطط درس لمجموعة صغيرة لصياغة وحل مسألة تتعامل مع الحركة المنتظمة Uniform Motion، والقطع النقدية، والخليط، والاستثمار.
أ. أوصى باستخدام الآلة الحاسبة، والحاسوب، والأشكال التوضيحية. والجداول.
ب. اقترح عرض نتائج كل مجموعة على جميع طلبة الصف بواسطة ممثل عن المجموعة.

2 أعرض درسا عن كيفية قيامك بتعليم الطلبة موضوع ابتكار مسائل جديدة عن طريق تغيير جزء من فرضية أو الشروط المطروحة لكل من:
أ.مسائل جبرية.
ب. مسائل هندسية.

3. اكتب أي مسألتين لفظيتين Verbal إحداهما في الجبر والثانية في البرهان الهندسي والتي تمتلك:
أ. بيانات غير كافية.
ب. بيانات زائدة.

اكتب مخطط درس يبين كيفية طرحك لهذا النوع من المسائل على صف مدرسي بمادتي الجبر (أو الهندسة).

4. انظر إلى أحد المراجع المدرجة في نهاية هذا الفصل، واختر منها خمسة مسائل تحد، وحلولها التي تتناسب مع مستوى الرياضيات المدرسية في المدارس المتوسطة، أو المدارس الثانوية (أنت حر باختيارك المستوى). ثم بين

كيف ستستخدم هذه المسائل في صفوفك.

5. ادرج خمسة أنشطة يمكن وصفها كحلول للمسائل لصف بالمستوى الأول.

6. تأمل مسائل التحدي الآتية. في أي نوع من الصفوف ستقوم بعرضها؟ وضح الفوائد التي تعتقد بأن الطلبة يستطيعون استنباطها من هذه المسائل.

أ. إن إحدى الطرق للحصول على حاصل ضرب عددين، افترض 43 و75 قد أدرجت كما يأتي:

43	75
21	150
(10)	(300)
5	600
(2)	(1200)
1	2400

والتي من خلالها:

$43 \times 75 = 75 + 150 + 60 + 2400 = 3225$

أولا: استخدم هذه الطريق لضرب العددين 120×73.

ثانيا: وضح سبب صلاحية هذه الطريقة.

ب. جد، مقربا إلى اقرب مائة، قيمة ما يلي:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

ج. حل المعادلات:

$$x + y = 5xy$$
$$y + z = 7yz$$
$$z + x = 6xz$$

د. إذا كانت $3^{2x} + 9 = 10(3^x)$. قم بحل المعادلة بدلالة x.

هـ. حدد أيهما اكبر $\sqrt[9]{9!}$ أو $\sqrt[10]{10!}$.

و. كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من أو تساوي 1 مليون هي مربعات أو مكعبات عددية؟

7. اقرأ كتاب (كيف تحلها How To Solve It) من تأليف جورج بوليا (Princeton University Press, 1945)، ثم ناقش كيف أن بعضا من استراتيجيات البحث الموجه (الهيوريستيكا) لبوليا يمكن تطبيقها في المناهج الدراسية للرياضيات بالمدارس الثانوية. اعتبر ثلاثة استراتيجيات في إجابتك كحد أدنى.

8. اقرأ كتاب (كيف تحل المسائل How To Solve Problems) من تأليف واين أ. ويكيلجران (W. H. Freeman & Co., 1974)، ثم ناقش كيف أن استراتيجية البحث الموجه (الهيوريستيكا) لدى ويكيلجران يمكن تطبيقها في المناهج الدراسية للرياضيات بالمدارس الثانوية. اعتبر ثلاثة استراتيجيات في إجابتك كحد أدنى.

9. اقرأ الكتاب السنوي لعام 1980 والصادر عن المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات "حل المسائل في رياضيات المدرسة" ثم اعد تقريرا حول الفصل الثالث "البحث الموجه (الهيوريستيكا) في الصف" الذي أعده الان ر. شوينفيلد.

10. اختر واحدة من مسائل التحدي من كتاب "الرياضيات بوصفها أداة لحل المسائل" من تأليف الكسندر سويفر (Center for Excellence in Mathematics Education, 1987)
ثم خذ المسألة التي اخترتها، وبين كيف أن الطبيعة غير المألوفة للمسألة أو الحلول التي أوردها المؤلف تفيد في نمذجة مهارات الطلبة نتيجة لإدخالها ضمن نشاطاتهم بميدان حل المسائل. كرر هذا التمرين على مسألتين أخر في الكتاب.

11. يضم كتاب "فن حل المسائل: مورد لمدرس الرياضيات" من تأليف ألفريد س. بوزامينتر وفولفانج شولتز (Crown Pres, 1996) عشرين فصلا، كتبت جميعا من قبل المؤلف الذي اظهر تخصصا فريدا في حقل حل مسائل الرياضيات. اختر أحد الفصول واعد تقريرا مختصرا حول كيف يمكن أن تكون المواد الموجودة في الفصل مفيدة في تعليم أحد مواضيع رياضيات المدارس الثانوية أو حقولها المتعددة.

12. اقرأ كتاب "استراتيجيات حل المسائل للإجابات الكفوءة والماهرة: مورد لمدرسي الرياضيات" من تأليف أ. س. بوزامنيتر و س. كروليك (Crown Press, 1998). جد مسألة جديدة تصف الاستراتيجيات العشرة المطروحة في الكتاب غير تلك التي وردت بمعرض مناقشاته للمسائل المحفزة.

13. استخدم كتابا منهجيا لرياضيات المدارس الثانوية، واختر خمسة تمارين منه. وحاول أن تعرض لكل منها، كيفية استخدام إحدى أو بعض استراتيجيات حل المسائل- العشرة، والتي يمكن توظيفها في إجراء التمرين.

Suggested References مراجع مقترحة

Sources For Problems موارد للمسائل

Abraham, R. M. Winter Nights Entertainments. London. Constable, 1932. Reprinted as Easy-to-do.

Entertainments and Diversions with Coins, Cards, String, Paper and Matches. New York: Dover. 1961.

Ainley, Stephen. Mathematical Puzzles. London: Bell, 1977.

Andreescu, T. and Feng Z. Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from Around the world.

Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Alcuin (attrib.). Propositiones Alcuini doctoris Caroli Magni Imperatoris ad acuendos juvenes. Translated and annotated by John Hadley and David Singmaster as "Problems to Sharpen the Young." Mathematical Gazette 76, no. 475 (March 1992): 102-126.

Alexanderson, Gerald L., Leonard F. Klosinski, and Loren C. Larson. The William Lowell Putnam Mathematical Competition-Problems and Solutions: 1965-1984.

Washington, DC: Mathematical Association of America, 1985.

Allen, Liz. Brainsharpeners. London: hodder & stroughton, New English Library, 1991.

Ap Simon, H. Mathematical Byways, New York: Oxford University press, 1984.

Ap Simon, H. Mathematical Byways in Ayling. Bleeding & Ceiling. New York: Oxford University press, 1990.

Aref, M.N., & W. Wernick, Problem & Solution in Euclidean Geometry, New York: Dover, 1986.

Artino, R. A., A. N. Galione, & N. Shell, The Contest Problem Book IV. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1982.

Barbeau, E., M. Klamkin, & W. Moser. 1001 Problem in High School Mathematical Congress, 1976, 1978, 1980, 1985.

Barbeau, E., M. Klamkin, & W. Moser. Five Hundred

Mathematical Challenges, Washington, DC:

Mathematical Association of America, 1995.

Barr, Stephen, A Miscellany of Puzzles, New York: Crowell, 1965.

Barr, Stephen, A Miscellany of Puzzles, New York: Macmillan, 1969. Reissued as Mathematical Brain Benders, New York: Dover, 1982.

Barry, D. T., & J. R. Lux. The Philisps Academy prize Examination in Mathematics. Palo Alto. CA: Dale Seymour Publication, 1984.

Bates N. B. and S. M. Smith 101 Puzzle Problems Concord, MA: Bates Publishing Co., 1980.

Berloquin, Pierre, 100 Numerical Games, New York: Scribner's, 1976.

Berloquin, Pierre, 100 Numerical Games, New York: Scribner's, 1976. Reprinted as Geometric Games, London: Unwin, 1980.

Berloquin, Pierre, 100 Numerical Games, New York: Scribner's, 1977. Reprinted as Games of logic, London: Unwin, 1980.

Berloquin, Pierre, The Garden of The Sphinx, New York: Scribner's, 1985.

Berloquin, G and S. B. Maurer, The Contest Problem Book V. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1997.

Berloquin, Claude, Mathematical Puzzles and Problem London: Allen & Unwin, 1971.

Brandes, Louis Grant, The Math Wizard, Rev. ed, Portland ME: J. Weston Walch, 1975.

Bridgman, George, Lake Wobegon Math Problem Rev. and enlarged ed. Minneapolis: George Bridgman 1981.

Brousseau, Brother Alfred A. Saint Mary's College Mathematics Contest Problem. Palo Alto, A: Creative Publication, 1972.

Bryant. S. J., G. E> Graham, and Trigonometry. New York: McGraw-Hill, 1965.

Bryant, Victor and Raymond Postill. The Sunday Times Book of Brian Teasers-Book I. London: Unwin, 1980, Reprinted with Book I omitted form title, New York: Martin's Press, 1982.

Bryant, Vector and Raymond Postill, The Sunday Times Book of Brain Teasers-Book 2, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.

Burkill, J. C., and H. M. Kundy. Mathematical Scholarship Problem, London: Cambridge University press, 1961.

Butts, T. Problem Solving in Mathematical. Glenview, IL: Scott, Foreman, 1973.

CEMREL. Elements of Mathematics, Problem Book (Vols. 1 & 2). St. Louis, MO: CEMREL, 1975.

Charosh, M. Mathematical Challenges, Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1965.

Clark, Barry R. Puzzles for Pleasure. Cambridge: Cambridge University press, 1994.

Clark, Barry R., Rex Gooch, Angela Newing, and David Singmaster. The Daily Telegraph Book of Brian Twisters No I. London: Pan, 1993.

Conrad, S. R. and D. Flegler, Math Contest for High School, Volumes 1 and 2, Tenafly, NJ: Math

Leagae press, 1992, 1995.

Conrad, S. R. and D. Flegler, Math Contest Grades 7 and 8, Volumes 1 and 2, Tenafly, NJ: Math Leagae press, 1992, 1994.

Conrad, S. R. and D. Flegler, Math Contest Grades 4, 5 and 6, Volumes 1 and 2, Tenafly, NJ: Math Leagae press, 1994.

Crux Mathematicorum, Ottawa, On: Canadian Mathematical Society.

Dorofeev, G., M. Potapov, and N. Rozov Elementary Mathematics. Selected Topics and Problem Solving Moscow: Mir Publishers, 1973.

Dorrie, H. 100 Great Problem Mathematics. New York: Dover, 1965.

Dowlen, N., S. Powers, and H, Florence, College of Charleston Mathematics Contest Book. Palo Alto. CA: Dale Seymour Publication, 1987.

Dudney, H. E. Modern Puzzles. Pearson, 1926: new edition, [1936].

Dudney, H. E. Puzzles and Curious problem. London: Nelson, [1932]: revised by J. Travers. [1936?].

Dudney, H. E. A Puzzles Mine, J. Travers, Ed. London: Nelson, [1941].

Dudney, H. E. The Canterbury Puzzles. New York: Dover Publication, 1958.

Dudney, H. E. 536 Puzzles and Curious problems. Edition by Martin Gardenr from Modern Puzzles and Puzzles and Curious Problem. Contains almost all of Both Books, New York: Scribner's, 1967.

Dudney, H. E. Anusement in Mathematics, New York: Dover Publication, 1970.

Dudney, A, Mathematical bafflers, New York: Mc Graw-Hill, 1964.

Dudney, A. F. Second Book of Mathematical bafflers, New York: Dover Publication, 1983.

Dynkin, Eugene B., and V. A. Uspenskii, Multicolor Problems, Heath, 1963.

Edwards, J. D., D. J. King and P. J. O'Halloran, all the Best From The Australian Mathematics Competition. Melbourne, Australia: Ruskin Press, 1986.

Emmet, Eric Revell, Brain Puzzler's Delight. Buchanan, NY: Emerson Book: reprint New York: Steeling, 1993.

Emmet, Eric Revell, Mind Tickling Brain Teasers Buchanan, NY: Emerson Books 1976.

Emmet, Eric Revell, The Puffin Book of Brain Teasers London Putting 1970.

Emmet, Eric Revell, A Diersity of puzzles, New York: Barnes & Noble: 1977.

Emmet, Eric Revell, puzzles for Pleasure, Buchanan, NY: Emerson Books, 1977.

Emmet, Eric Revell, The Great Detective puzzles Book, New York: Barnes & Noble: 1979.

Emmet, Eric Revell, The Island of Imperfection puzzles Book, New York: Barnes & Noble, 1980.

Emmet, Eric Revell. The Penguin Book of Brain Teasers. Compiled by David Hall and Alan Summers from Emmet's posthumous notes. New York: Viking, 1984.

Emmet, Eric Revell, and Donald B. Eperson. Patterns in Mathematics. Oxford: Blackwell, 1988.

Engel, Arthur. Problem Solving Strategies. New Yors: Spring-Verlag, 1998.

Filipiak, A. S. Mathematical Puzzles. New York: Bell Publishing, 1942.

Fisher, L., and B. Kennedy. Brother Alfred Brousseau Problem Solving and Mathematics Competition, Introductory Division. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.

Fisher, L., and W. Medigovixh. Brother Alfred Brousseau Problem Solving and Mathematics Competition, Senior Division. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.

Fisher, F. O., Mathematics Contests: A Guide for Involving Students and Schools. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1990.

Friedland, Aaron J. Puzzles in Math and Logic. New York: Dover, 1970.

Frohlichstein, Jack. Mathematical Fun, Games and Puzzles. New York: Dover, 1962.

Fujimura, Kobon. The Tokyo Puzzles. Martin Gardner, Ed. New York: Scribner's, 1978.

Gamow, George and Marvin Stem. Puzzle-Math. London: Macmillan, 1958.

Gardner, Martin. Arrow Book of Brain Teasers. New York: Scholastic, 1959.

Gardner, Martin. The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. New York: Simon & Schuster, 1959. Rev., with new afterword and references, as Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions. Chicago: University of Chicago Press, 1988.

Gardner, Martin. The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. New York: Simon & Schuster, 1961.

Gardner, Martin. Martin Gardner's New Mathematical Diversions from Scientific American. New York: Simon & Schuster, 1966: Chicago: University of Chicago Press. 1983: Washington. DC: Mathematical Association of America, 1995.

Gardner, Martin. The Numerology of Dr. Matrix. New York: Simon & Schuster, 1967.

Gardner, Martin. Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers. New York: Simon & Schuster, 1969.

Gardner, Martin. The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions. New York: Simon &

Schuster, 1969. Rev. ed. Chicago: University of Chicago Press. 1991.

Gardner, Martin. Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American. San Francisco: Freeman, 1971; Chicago: University of Chicago Press, 1983.

Gardner, Martin. Mathematical Carnival. New York: Knopf, 1975. Rev. ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1989.

Gardner, Martin. The Incredible Dr. Matrix. New York: Scribner's, 1976. [Contains all of the Numerology of Dr. Matrix.]

Gardner, Martin. Mathematical Magic Show. New York: Knopf, 1977. Rev. ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1990.

Gardner, Martin. More Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers. New York: Pocket Books, Archway, 1977.

Gardner, Martin. Aha! Insight. New York: Scientific American & Freeman, 1978.

Gardner, Martin. Mathematical Circus. New York: Knopf, 1979. Rev. ed. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992.

Gardner, Martin. Science Fiction Puzzle Tales. New York: C. N. Potter, 1981.

Gardner, Martin. Aha! Gotcha. New York: Freeman, 1982.

Gardner, Martin. Wheels, Life and Other Mathematical Amusements. New York: Freeman, 1983.

Gardner, Martin. The Magic Numbers of Dr. Matrix. Buffalo, NY: Prometheus, 1985. [Contains all of The Incredible Dr. Matrix.]

Gardner, Martin. Entertaining Mathematical Puzzles. New York: Dover, 1986.

Gardner, Martin. Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments. New York: Freeman, 1986.

Gardner, Martin. Puzzles from Other Worlds. New York: Random House, Vintage, 1986.

Gardner, Martin. Riddles of the Sphinx. Washington, DC: Mathematical Association of America, New Mathematical Library, 1987.

Gardner, Maıtin. Time Travel and Other Mathematical Bewilderments. New York: Freeman, 1988.

Gardner, Martin. Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers. New York: Freeman, 1989.

Gardner, Martin. Fracta; Music. Hypercards and More. New York: Freeman, 1992.

Gardner, Martin. My Best Mathematical and Logical Puzzles. New York: Dover, 1994.

Gleason, Andrew M., Robert E. Greenwood, and Leroy M. Kelly. The William Lowell Putnam Mathematical Competitions. Problems and Solutions: 1938-1964.

Washington, DC: Mathematical Association of America, 1980.

Gould, Peter. Senior Challenge '85-'91. Mathematical Education on Merseyside, University of Liverpool, 1992.

Gould, Peter and Ian Porteous. Senior Challenge '80-'84. Mathematical Education on Merseyside, University of Liverpool, 1984.

Graham, L. A. Ingenious Mathematical Problems and Methods. New York: Dover, 1959.

Graham, L. A. The Surprise Attack in Mathematical Problems. New York: Dover, 1968.

Greitzer, S. L. International Mathematical Olympiads 1959-1977. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.

Haber, Philip. Mathematical Puzzles and Pastimes. Mount Vernon, NY: Peter Pauper, 1957.

Halmos, Paul R. Problems for Mathematicians Young and Old. Dolciani Mathematical Expositions # 12.

Washington, DC: Mathematical Association of America, 1991.

Higgins, A. M. Geometry Problems. Portland, ME: J. Weston Walch, 1971.

Hill, T. J. Mathematical Challenges II-Puls Six.

Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

Honsberger, R. Mathematical Morsels. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.

Honsberger, R. From Erdos to Kiev: Problems of Olympiad Caliber. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1996.

Honsberger, R. In Polya's Foorsteps: Miscellaneous Problems and Essays. Washington, D. C.: Mathematical Association of America, 1997.

Honsberger, Derek. Problem Solving Serier. Leicester, UK: Mathematical Association, 1988-1990. 1. How To; 2: Combinatorics 1; 3. Graph Theory; 4. Number Theory; 5. Geometry 1; 6; Proof; 7. Geometry 2; 8. IMO Problems 1; 9. Combinatorics 2; 10. Geometry 2; 11. Number Theory 2; 12. Inequalities; 13. Combinatorics 3; 14. IMO Problems 2; 15. Creating Problems.

Hunttor, James Alston Hope. Figures for Fun London: Phoenix House, 1957: 2nd ed., London: Dent Aldine, 1972.

Hunter, James Alston Hope. Fun with Figures. New York: Dover, 1965.

Hunter, James Alston Hope. Mathematical Brom Teasers. As Hunter's Math Brain Teasers. New York: Bantam, 1965; Corrected and enlarged, New York: Dover, 1976.

Hunter, James Alston Hope. More Fun with Figures. New York: Dover, 1966.

Hunter, James Alston Hope. Challenging Mathematical Teasers. New York: Dover Publications, 1979.

Hunter, James Alston Hope. Entertaining Mathematical Teasers and How to Solve Them. New York: Dover, 1983.

Kahan, Steven. Have Some Sums to Solve: The Compleat Alphametics Book. Farmingdale, NY: Baywood Publishing Co., 1978.

Kahan, Steven At Last!! Encoded Totals Second Addition: The Long Awaited Sequel to "Have Some Sums to Solve." Farmingdale, NY: Baywood Publishing Co., 1994.

Kahan, Steven. Take a Look at a Good Book: The Third Collection of Additive Alphametics for the Connoisseur. Farmingdale, NY: Baywood Publishing Co., 1996.

Kendall, P. M. H. and G. M. Thomas. Mathematical Puzzles for the Connoisseur. London: Griffin, 1962; New York: Apollo edition (Crowell), 1962.

King, Tom. The Best 100 Puzzles Solved and Answered. London: Foulsham, [1927].

Kinnaird, [William] Clark, ed. Encyclopedia of Puzzles and Pastimes. New York: Grosset & Dunlap, 1946.

Klamkin, M. S. International Mathematical Olympiads, 1979-1985. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1986.

Konhauser, Joseph D. E., Dan Velleman, and Stan Wagon. Mathematical Association of America, 1996.

Kordemsky, Boris A. The Moscow Puzzles. Martin Gradner, Ed. New York: Scribner's, 1972.

Krechmer, V. A. A Problem Book in Algebra. Translated by V. Shiffer. Moscow: Mir Publishers, 1974.

Krulik, S., and J. A. Rudnick. Problem Solving: A Hand book for Teachers. Boston: Allyn and Bacon, 1980.

Krulik, S., and J. A. Rudnick. The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Junior and Senior High Schools. Boston: Allyn and Bacon, 1996.

Kurschak, Jozef. Hungarian Problem Book I & II. Based on the Eotvos Comperitions, 1894-1905 and 1906-1928. Translated by Elvira Rapaport. New Mathematical Library. Washington. DC: Mathematical Association of America, 1963.

Kutepov, A., and A. Rubanov. Problems in Geometry. Translated by O. Meshkov. Moscow: Mir Publisher, 1975.

Kutepov, A., and A. Rubanov. Problem Book: Algebra and Elememary Function. Translated by L. Levant. Moscow: Mir Publisher, 1978.

Larson, L. C. Problem Solving Through Problems. New York: Springer-Verlag. 1983.

Lenchner, G. Creative Problem Solving in School Mathematics. Boston: Houghton Mifflin Co., 1983.

Lenchner, G. Math Olympiad Contest Problems for Elementary and Middle Schools. East Meadow, NY: Glenwood Publications, 1997.

Loyd, Samuel. Sam Loyd's Cyclopedia of 5,000 Puzzles, Tricks and Conundrums. New York: Bigelow, 1914: New York: Lamb Publishing, 1914, New York: Corwin, 1976.

Loyd, Samuel. Sam Loyd's Tricks and Puzzles, Vol. 1. New York: Experimenter Publishing Co. 1927.

Loyd, Samuel. Sam Loyd and His Puzzles. New York: Barse & Co., 1928.

Loyd, Samuel. Mathematical Puzzles of Sam Loyd, Vol. 1. New York: Dover, 1959.

Loyd, Samuel. Mathematical Puzzles of Sam Loyd, Vol. 2. New York: Dover, 1960.

Luckacs, C., and E. Tarjan. Mathematical Games. New York: Walker, 1968.

Moser, W., and E. Barbeau. The Canadian Mathematics Olympiads 1969, 1975. Montreal: Canadian Mathematical Congress, 1976.

Morris, Ivan. The Riverside Puzzles. New York: Walker & Co., 1969.

Morris, Ivan. The Lonely Monk and Other Puzzles. Boston: Little, Brown & Co., 1970.

Morris, Ivan. Foul Play and Other Puzzles of all Kinds. New York: Random House, Vintage, 1972.

Moscovich, Ivan, Super-Games. London: Hutchinson, 1984.

Moscovich, Ivan. Friendishly Difficult Math Puzzles. New York: Sterling, 1991.

Moscovich, Ivan, Friendishly Difficult Visual Perception Puzzles. New York: Sterling, 1991.

Moser, William O. J., and Edward J. Barbeau. The First Ten Canadian Mathematics Olympiads (1969-1978). Montreal: Canadian Mathematical Society, 1978.

Mosteller, F. Fifty Challenging Problems in Probability. New York: Dover, 1965.

Mott-Smith, G. Mathematical Puzzles for Beginners and Enthusiasts. New York: Dover, 1954.

Newton, D. E. One Hundred Quickies for Math Classes. Portland, ME: J. Weston Walch, 1972.

Phillips, H., S. T. Shovelton, and G. S. Marshal. Caliban's Problem Book. New York: Dover, 1961.

Phillips, Hubert. The Week-End Problems Book. London: Nonesuch, 1932.

Phillips, Hubert. The Playtime Omnibus, London: Faber & Faber, 1933.

Phillips, Hubert. The Sphınx Problem Book London: Faber, 1934.

Phillips, Hubert. Brush Up Your Wits. London: Dent, 1936.

Phillips, Hubert. Question Time. London: Deat, 1937; New York: Farrar & Rinehart, 1938.

Phillips, Hubert. Ask Me Another. London: Ptarmigan, 1945.

Phillips, Hubert. Hubert Phillips's Heptameron. London: Eyre & Spottiswoode, 1945.

Phillips, Hubert. Something to Think About. London: Ptarmigan, 1945; [with additional Foreword, one problem omitted and 11 problems added] London: Max Parrish, 1958.

Phillips, Hubert. Playtime. London: Ptarmigan, 1947.

Phillips, Hubert. The Hubert Phillips Annual 1951. London: Hamish Hamilton, 1950.

Phillips, Hubert. Problems Omnibus, vol. 1. London: Arco, 1960.

Phillips, Hubert. My Best Puzzles in Mathematics. New York: Dover, 1961.

Phillips, Hubert. Problems Omnibus, vol. 2. London: Arco, 1962.

Polya, G., and J. Kilpatrick, The Stanford Mathematics Book. New York: Teachers College Press. 1974.

Posamentier, A. S. Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students. Emeryville, CA: Key College Press, 2002.

Posamentier, A. S. Students! Get Ready for the Mathematics for SAT I: Problem-Solving Strategies and Practice Tests. Thousand Oaks, CA.: Corwin Press, 1996.

Posamentier, A. S. Teachers! Prepare Your Students for the Mathematics for SAT I: Methods and Problem-Solving Strategies. Thousand Oaks, CA.: Corwin Press, 1996.

Posamentier, A. S., and C. T. Salkind. Challenging Problems in Algebra. Rev. ed. New York: Dover, 1996.

Posamentier, A. S., and C. T. Salkind. Challenging Problems in Geometry. Rev. ed. New York: Dover, 1996.

Posamentier, A. S., and G. Sheridan. Math Motivators: Pre-Algebra, Algebra, and Geometry. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1984.

Posamentier, A. S., and S. Krulik. Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA.: Corwin Press, 1998.

Posamentier, A. S., and W. Schulz, Ed. The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA.: Corwin Press, 1996.

Posamentier, A. S., and W. Wernick. Advanced Gemetric Cornstructions. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1988.

Ransom, W. R. One Hundred Mathematical Curiosities. Portland, ME: J. Weston Walch, 1955.

Rapaport, E. Hungarian Problem Book, vol. 1 and 2. New York: Random House, 1963.

Reis, C. M., and S. Z. Ditor, Eds. The Canadian Mathematics Olympiads (1979-1985). Ottawa: Canadian Mathematical Society, 1988.

Ruderman, H. D. NYSML-ARML Contests 1973-1982. Norman, OK: Mu Alpha Theta, 1983.

Salking, C. T. The Contest Problem Book. New York: Randm House, 1961.

Salking, C. T. The MAA Problem Book II. New York: Random House, 1966.

Salkind, C. T., and J. M. Earl. The MAA Problem Book III. New York: Random House, 1973.

Saul, M. A., G. W. Kessler, S. Krilov, and L. Zimmerman. The New York City Contest Problem Book. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1986.

Schneider, L. J. The Contest Problem Book VI. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Shklarsky, D. O., N. N. Chentzov, and I. M. Yaglom. The USSR Olympiad Problem Book. San Francisco: W. H. Freeman, 1962.

Shklarsky, D. O., N. N. Chentzov, and I. M. Yaglom. Select Problems and Theorems in Elementary Mathematics. Translated by V. M. Volosov and I. G. Volsova. Moscow: Mir Publisher, 1979.

Shortz, Will. Will Shortz's Best Brain Busters. New York: Random House, Times Books, 1991.

Shortz, Will. Will Shortz's Best Brain Twisters. New York: Random House, Times Books, 1991.

Shortz, Will. Brian Twisters from the First World Puzzle Championships. New York: Random House, Times Books, 1993.

Sierpinski, Waclaw. A Selection of Problems in the Theory of Numbers. London: Pergamon/Macmillan, 1964.

Sierpinski, Waclaw. 250 Problems in Elementary Number Theory. New York: American Elsevier, 1970.

Sitomer, H. The New Mathlete Problems Book. Valley Stream, NY: Nassau County Interscholastic Mathematics League, 1974.

Snape, Charles, and Heather Scott How Puzzling. Cambridge: Cambridge University Press. 1991.

Soifer, Alexander. Mathematics As Problem Solving Colorado Springs: Center for Excellence in Mathematics Education 1987.

Sole, Tim. The Ticket to Heaven and Other Superior Puzzles. London: Pengiun, 1988.

Steinhaus, H. One Hundred Problems in Elementary Mathematics. New York. Pergamon Press. 1963.

Straszewiez, S. Mathematical Problems and Puzzles from the Polish Mathematical Olympiads. Translated by J. Smsliska. New York: Pergamon Press, 1965.

Vakil, Ravi. A Mathematical Mosaic: Patterns and Problem Solving. Burlington. ON: Brendan Kelly Publishing Co., 1996.

Vout, Colin, and Gordon Gray. Challenging Puzzles. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

Wall, H. S. Creative Mathematics. Austin: University of Texas Press, 1963.

Wells, D. Can You Solve These? Norfolk, England: Stradbroke. 1982.

Wells, David G. Recreations in Logic. New York: Dover, 1979.

Trigger, C. W. Mathematical Quickies. New York: McGraw-Hill, 1967.

Ulam, S. M. Problems in Modern Mathematics. New York: John Wiley, 1960.

Williams, W. Tom, And G. H. Savage. The Penguin Problems Book. London: Penguin, 1940.

Williams, W. Tom, and G. H. Savage. The Strand Problems Book. London: Newnes.

Williams, W. Tom, and G. H. Savage. The Second Penguin Problems Book. London: Penguin. 1944.

Williams, W. Tom, and G. H. Savage. The Third Penguin Problems Book. London: Penguin. 1946.

Yaglom, A. M., and I. M. Yaglom. Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions. Vol. 1 and 2. San Francisco: Holden-Day, 1964, 1967.

قراءات حول حل المسائل

Readings On Problem Solving

Ackoff, Russell L. The Art of Problem Solving. New York: Wiley, 1978.

Adams, James L. Conceptual Blockbusting. San Francisco: Freeman, 1974.

Adler, Irving. Mathematics and Mental Growin. London: Dobson, 1970.

Averbach, Bonnie, and Orin Chein. Mathematics: Problem Solving Through Recreational Mathematics. San Francisco: Freeman, 1980.

Andre, Thomas. "Problem Solving and Education." Ch. 7 in Cognitive Classroom Learning. Gary Phye and Thomas Andre, Eds. Orlando, Fl: Academic Press, 1986.

Arnold, William R. "Students Can Pose and Solve Original Problems." The Mathematics Teacher 64 (1971): 325.

Bransford, John D., and Barry S. Stein. The Ideal Problem Solver. New York: W. H. Freeman, 1984.

Brown, Stephen I., and Marion I. Walter. The Art of Problem Posing. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc., 1983.

Butts, T. "In Praise of Trial and Error." The Mathematics Teacher 78 (1985): 167.

Charles, R., and F. Lester. Teaching Problem Solving: What Why, and How, Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1982.

Chipman, Susanand, Judith Segal, and Robert Glaser. Thinking and Learning Skills Volume 2: Research and Open Questions. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1985.

Cofman, Judita. What to Solve? Problems and Suggestions for Young Mathematicians. Oxford: Oxford University Press, 1990.

Cofman, Judita. Numbers and Shapes Revisited: More Problems for Young Mathematicians. Oxford: Oxford University Press, 1995.

Costa, Art. "Mediating the Metacognitive." Educational Leadership. November 1984: 57-62.

Curcio, Frances, Ed. Teaching and Learning, A Problem Solving Focus. Reston, VA: NCTM, 1987.

Davis, Robert, Elizabeth Jockusch, and Curtis McKnight. "Cognitive Processes in Learning Algebra." Journal of Children's Mathematical Behavior 2 (no. 1) Spring 1978.

Derry, Sharon J., and Debra A. Mur[hy. "Designing Systems That Train Learning Ability: From Theory to Practice." Review of Educational Research 56 (no. 1) Spring 1986: 1-39.

Emmet, Eric Revell. Learning to Think. Verplanck, NY: Emerson Books, 1981.

Fisher, Richard B. Brain Games. London: Fontana, 1981.

Fixx, James F. Solve It! New York: Doubleday, 1978.

Frederiksen, Norman. "Implications of Cognitive Theory for Instruction on Problem Solving." Review of Educational Research 54 (no. 3) Fall 1984: 363-407.

Gardner, Martin. Aha! Insight. New York: Scientific American & Freeman, 1978.

Gardner, Martin. Aha! Gotcha. San Francisco: Freeman< 1982.

Gordon, Wlliam J. J. Synectics-The Development of Creative Capacity. New York: Harper & Row, 1961.

Hadamard, Jacques. The Psychology of Invention in the Mathematical Field. New York: Dover, 1954.

Heiman, M., R. Narode, J. Slomianko and J. Lochhead, Thinking Skills: Mathematics, Teaching. Washington, DC: National Education Association, 1987.

Honsberger, Ross, Ingenuity in Mathematics, Washington, DC: Mathematical Association of America, New Mathematical Library, 1970.

Honsberger, Ross, Mathematical Games, Vol. 1, Dolciani Mathematical Exposition #1. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1973.

Honsberger, Ross, Mathematical Games, Vol. 2, Dolciani Mathematical Exposition #2. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1976.

Honsberger, Ross, Mathematical Morsels, Dolciani Mathematical Exposition #3. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.

Honsberger, Ross, Mathematical Pulms, Dolciani Mathematical Exposition #4. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1979.

Honsberger, Ross, Mathematical Games III, Dolciani Mathematical Exposition #9. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1985.

Honsberger, Ross, More Mathematical Morsels, Dolciani Mathematical Exposition #10. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1991.

Hough, Julia S., Ed. Problem Solving, New Letter, vol. 1-5. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press, 1984.

Hough, Barnabas, Tinking Through Problems, Palo Alto, CA: Creative Publication, 1975.

Jensen, R. J. "Stuck? Don't Give up! Subgoal-Generation Strategies in Problem Solving". The Mathematics Teacher 80 (1987): 614.

Karmos, Joseph, and Ann Karmos. "Strategies for Active Involvement in Problem Solving". In Thinking Skills Instruction: Concepts and Techniques, Marcia Hieman and Joshua Slomianko, Eds, Washington, DC: National Education Association, 1987, 99-110.

Kluwe Rainer, "Executive Decisions and Regulation of Problem Solving Behavior". Chap.2 in Metacognition Motivation Understanding, Franz Weinert and Kainer Kluwe, Eds. Hilisdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

Krantz, Steven G. Techniques of Problem Solving Providence. RI: America Mathematical Society, 1997.

Krulik, S., Ed, Problem Solving in School Mathematics 1980 Yearbook, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1980.

Krulik, S., and J. Rudnick. Problem Solving : A Handbook for Teachers, 2nd ed. Boston: Allyn and Bacon. 1987.

Krulik, S., and J. Rudnick. Problem Solving: A Handbook for Senior High School Teachers, Boston: Allyn and Bacon. 1989.

Krulik, S., and J. Rudnick. Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Boston: Allyn and Bacon. 1993.

Krulik, S., and J. Rudnick. The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving: in Elementary School Boston: Allyn and Bacon. 1995.

Krulik, S., and J. Rudnick. The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving: in Secondary School Boston: Allyn and Bacon. 1996.

Mason, John, Learning and Doing Mathematics. Milton Keynes, UK: Open University Press, 1978, 1984.

Mason, John, With Leone Burton and Kaye Stacey. Thinking Mathematically, Reading, MA: Addison-Wesley, 1985.

McKim, Robert H, Thinking Visually: A Strategy Manual for Problem Solving, Palo Alto. CA: Dale Seymour. 1980.

Moses. Stanley, The Art of Problem-Solving, London: Transworld, 1974.

Mottershead, Lorraine, Sources of Mathematical Discovery Oxford: Blackwell, 1978.

Mottershead, Lorraine, Investigation in Mathematics Oxford: Blackwell, 1985.

Noller, Ruth B., Ruth E. Heintz, and David A, Blaeuer. Creative Problem Solving in Mathematics. D. O. K. Publishers, 1978.

Mayer, Richard, "Mathematics", Chap. 5 in Cognition and instruction. Rona Dillon and Robert Sternberg, Eds. Orlando, FL: Academic Press, 1986.

Mayer, Richard, J. Larkin, and Kadane, "A Cognitive Analysis of Mathematical Problem Solving Ability", in Advances in the Psychology Of Human Intelligence, Vol. 2, R. Sternberg, Ed. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 231-273.

Nickerson, Raymond, "Thoughts on Teaching Thinking". Educational Leadership, October 1981: 21-24.

Nickerson, Raymond, David Perkins, and Edward Smith the Teaching of Thinking, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

Polya. G. How To Solve It. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

Polya. G. Introduction and Analogy in Mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.

Polya. G. Patterns of Plausible inference, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.

Polya. G. Mathematical Discovery 2 Vols. New York: Wiley. 1962. And 1965: combined ed. With foreword by peter Hilton, bibliography extended by Gerald Alexanderson, and index extended by Jeam Pedersen New York: Wiley. 1981.

Posamentier, A. S. Teachers! Prepare Your Students for the Mathematics for SAT1 Methods and Problem-Solving Strategies Thousand Oaks. CA Corwin Press, 1996.

Posamentier, A. S., and S. Krulik. Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA.: Corwin Press, 1998.

Posamentier, Alfred S. and Wolfgang Schulz, Eds. The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.

Reeves, C. A. Problem Solving Techniques Helpful in Mathematics and Science. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1987.

Schoenfeld, A. H. Problem Solving in the Mathematics Curriculum. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1983.

Schoenfeld, A. H. Mathematical Problem Solving. Orlando, FL: Academic Press, 1985.

Segal, Judith, Susan Chipman, and Robert Glaser, Eds. Thinking and Learning Skills, Volume I: Relating Instruction to Research. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

Silver, E. A., Ed. Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1985.

Simon, Martin A. "The Teacher's Role in Increasing Student Understanding of Mathematics." Educational Leadership 43 (no. 7). April 1986: 40-43.

Skemp, Richard R. The Psychology of Learning Mathematics. Baltimore: Penguin Books, 1971.

Smullyan. Raymond. What Is the Name of This Book? Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1978.

Soifer, Alexander. Mathematics As Problem Solving. Colorado Springs: Center for Exellence in Mathematics Education. 1987.

Special issue - "Gifted Students." The Mathematics Teacher 76 (1983).

Topoly, William. "An Introduction to Solving Problems." The Mathematics Teacher 58 (1965): 48.

Troutman, Andrea. And Betty P. Lichtenberg. "Problem Solving in the General Mathematics Classroom." The Mathematics Teacher 67 (1974): 590.

Walter, Marion I., and Stephen I. Brown. "Problem Posing and Problem Solving." The Mathematics Teacher 70 (1977): 4.

Whirl, Robert J. "Problem Solving - Solution or Technique?" The Mathematics Teacher 66(1973): 551.

Winckelgren, W. A. How To Solve Problems. San Francisco: W. H. Freeman, 1974.



5

استخدام التقنية لتعزيز تدريس الرياضيات

Using Technology to Enhance Mathematics Instruction

في تنقيح عام 2000 على مبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية، أورد المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات كلمته حول (مبدأ التقنية Technology Principle) قائلا : (إن التقنية ضرورية في تعليم الرياضيات وتعلمها، فهي تؤثر على طبيعة الرياضيات التي تدرس، وتعزز تعلّم الرياضيات).

لقد استنتج المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات بأن التقنية ليست عقارا ناجعا لجميع الأمراض Panacea. بيد أن استخدام المدرسين للتقنية في برامجهم التعليمية سيعزز خبرات التعلم لدى الطلبة عبر استثمار ما تقوم التقنية بتنفيذه بصورة جيدة وكفوءة (إعداد الرسوم التخطيطية Graphing، والمعالجات المرئية Visualizing، والحوسبة Computing). إن التقنية لن تكون بديلا عن معلمي الرياضيات، بيد أنها سوف تمنحهم أدوات إضافية لمساعدتهم على تدريس الطلبة ومد يد العون إليهم على طريق تعلم الرياضيات.

لقد توفرت الآلة الحاسبة المحمولة لأول مرة، في بداية السبعينات. طرحت الآلة الحاسبة الأولى في السوق، (دماغ بومار Bowmar Brain) وبلغ ثمنها أكثر من سبعمائة دولار. كانت آلة حاسبة بأربعة وظائف Function، وتحوي على ذاكرة محدودة Memory، وتعاني من كبر حجمها، رغم أن جيب القميص الواسع كان يتسع لها. وأخيرا، في عام 1676 انهار الجدار السعري للآلة الحاسبة عندما طرحت الآلات الحاسبة العلمية Scientific Calculator وبأثمان تزيد على مائة دولار بقليل.

حلت الآلة الحاسبة محل المسطرة المنزلقة Slide rule، والتي كانت شائعة الاستخدام لدى العلماء والمهندسين، واستأثرت بموقعها. وقد برز بسرعة خلاف حاد بين المتخصصين حول السماح باستخدام الآلات الحاسبة أو منع استخدامها. لم ينتظر الطلبة (لحين حسم الخلاف) وبدأوا باستعمال الآلة الحاسبة في البيت وفي المدرسة، بيد أن سهام النقد استمرت ورفعت شعارات تشير إلى أن الآلة الحاسبة تؤدي إلى تبلد الذهن، لأن الطالب سيعرض عن استخدام الذهن، وستقوم الآلة العجيبة بإنجاز جميع المهام المناطة به.

بعد مرور ربع قرن من الزمان، تبين بأن هذا المنحى في الاستدلال ليس صحيحا، فقد أظهرت الدراسات الميدانية بأن الطلبة الذين ترعرعوا على استخدام الآلة الحاسبة يمتلكون نفس القدرات (على الأقل) التي يمتلكها من لم يألف استخدامها. لقد أصبحت الآلة الحاسبة، في حالات معينة، من الضرورات التي لا يمكن الاستغناء عنها. بيد أنه لسنين خلت، على سبيل المثال، بقيت جداول قيم الدوال المثلثية واللوغارتمية شائعة الاستخدام.

أما في هذه الأيام، فإنه لم يعد هناك من يفكر في طباعتها أو نشرها لأن الآلة الحاسبة تمتلك القدرة على إنتاج سيل من قيم الدوال المثلثية المطلوبة، وكذلك الدوال اللوغارتمية بصورة آنية ودون الحاجة إلى الرجوع إلى جداول الأيام الخالية والتي تزدحم بالأرقام والمقاربات.

بالحقيقـة، فإن استخدام الآلة الحاسبة قد جعل التعامل مع هذه الموضوعات أكثر إمتاعا، نظـرا لأن

كثيرا من الجداول التي حفلت بها علوم الرياضيات لم يكن من السهل استخدامها، وكان على الطلبة استخدام (التوليد العددي Numerical Interpolation) للحصول على أكثر النتائج دقة.

إن هذه المهمة الشاقة والمضجرة قد ألغيت تماما من قائمة الأنشطة الرياضية التي نقوم بها في وقتنا الراهن.

في عام 1986، أصبحت الآلة الحاسبة الرسومية متوفرة بالأسواق، وكانت تمتلك جميع قدرات الآلة الحاسبة العلمية، إضافة إلى قدرتها الملموسة على رسم الأشكال التخطيطية والرسوم. في البداية كان استخدامها في الصف محدودا وضمن الحدود الدنيا.

وفي بداية عقد التسعينات أعلنت خدمة الاختبار التعليميEducational Testing Service بأن البدء بامتحانات تحديد المستوى في حساب التفاضل والتكامل المتقدمة Advanced Placement 1995 Calculus Examination يوجب على الطلبة استخدام آلات الحاسبة الرسومية. وكنتيجة لذلك، بات لزاما على طلبة المدارس الثانوية تعلم استخدام هذه الآلات في تحديد المستوى في حساب التفاضل والتكامل المتقدمة.

وقد أدركت الكثير من المدارس بأنه لكي تنجز فصلا دراسيا متوازنا بمادة حساب التفاضل والتكامل، ينبغي على الطلبة أن يكون لديهم مهارة كافية باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية قبل البدء بدراسة حساب التفاضل والتكامل.

بدأ يتسلل استخدام هذه الآلات، منذ ذلك الحين، برفق باتجاه المستويات الأدنى، بحيث لم يعد أمرا غير مألوف أن يشيع استخدامها في المدارس المتوسطة.

وخلال السنين العشرين الأخيرة من القرن العشرين، بات واضحا بأن الطلبة يستطيعون استخدام الآلات الحاسبة للكشف عن كثير من الأفكار الرياضية. إن مثل هذه الأنشطة قد تساعد الطلبة على أن يكونوا مبدعين إلى حد بعيد.

ورغم أن الآلات الحاسبة الرسومية من نوع Texas Instruments هي الأكثر استخداما بين الطلبة، إلا أنه توجد أيضا آلات مماثلة قد أنتجتها شركات عريقة مثل Casio، Sharp، Hewlett Packard لا تقل بقدراتها الحسابية والرسومية عن الأولى.

وسنحاول في هذا الفصل استكشاف بعض أنشطة الآلات الحاسبة الرسومية والتي يمكن توظيفها في الصف لإنماء تعلم الرياضيات في مراتب متعددة من الرياضيات الثانوية.

وفي الثمانينات، أصبح استخدام الحواسيب الشخصية أكثر شيوعا، وبدأت مجموعة من حزم البرمجيات التعليمية بالظهور. وعلى حافة عام 1985 قام كل من Judah Schwartz و Michal Yerushalmy من مركز تطوير التعليم Education Development Center بتطوير مجموعة من البرامج المتطورة لكي تستخدم في صفوف المراحل الثانوية، وقد أطلق عليها المفترضات الهندسية Geometric Supposes. تتيح هذه البرمجيات للمستخدم إمكانية رسم أشكال متعددة، وإجراء قياسات، واستنتاج قرارات وأحكام. وعند بداية التسعينات توفر برنامجان من أكثر البرامج الهندسية تعقيدا، هما: هندسة كابري Cabri Geometry ولوحة تخطيط المهندس Geometer's Sketchpad واللذان أتاحا فرصة واسعة للمستخدم برسم الأشكال والتلاعب بها ببراعة بحيث يستطيع استكشاف جملة من المفاهيم الهندسية ليتوصل إلى استنتاجات شخصية نابعة من البيئة الرسومية التي وفرها هذين البرنامجين.

سنحاول أن نركز اهتمامنا، في هذا الفصل، نحو استكشاف برنامج Geometer's Sketchpad بمزيد من التفصيل، لنرى كيف يمكن لهذا البرنامج أن يكون أداة مفيدة جدا لغرفة تدريس الرياضيات.

ينبغي على معظم مستخدمي هذا الكتاب أن تكون لديهم بعض الخبرة والدراية في استخدام التقنية. إن هدفنا في هذا المقام هو بيان كيف يمكن أن تثري الدرس باستخدام آخر التقنيات وتوفير نهج بديلة لتعليم الأفكار والآراء التقليدية.

الآلات الحاسبة CALCULATORS

عند استخدام الآلات الحاسبة، سيقف الطلبة على حقيقة العلاقات الموجودة بين الأرقام الناتجة عن العمليات السائدة فيها. على سبيل المثال، فإنهم سيكتشفون ما هو نوع المقسوم عليه الذي ينتج عنه أعداد بفواصل عشرية متكررة أو منتهية Repeating or Terminating Decimals، وسيلتمسون طرق تتبع الأعداد الأولية، وقد يكتشفون أنماطاً غير مألوفة من الأعداد. أو يلجئون إلى تحليل الخوارزميات الحسابية الشائعة، وربما يفلحون في استنباط خوارزميات أخرى.

إن جميع هذه الأنشطة قد تؤدي إلى عمل يتسم بسمة إبداعية ومع ذلك فإن الأكثر أهمية في هذا المضمار هو التوجيه المثالي للمعلم، لأنه بعدمه، فإن الطالب سوف ينتهي بفقدان المنافع التعليمية المصاحبة لهذه الآلات المشوقة والمفيدة.

الآلات الحاسبة كمساعد في حل المسائل
Calculators As An Aid To Problem Solving

يشتكي معظم المعلمين من مكابدة الطلبة لصعوبات جمة عند إجراء العمليات الحسابية، وإن الأكثر سوءا هو معاناتهم من ضعف ملحوظ في حل المسائل. ولسوء الحظ فإن هذه الشكوى هي داء- ذاتي- سرمدي Self-Perpetuating illness !.

والطلبة الذين لا يفلحون في الحسابات الرياضية يطلب منهم باستمرار التمرن عن هذه المهارات، ونادرا ما تتاح لهم فرصة بالتمرين على مهارات حل المسائل. إن الذين يلجأون إلى العمل على بعض المسائل الأولية لا يحصلون، في معظم الأحيان، على إجابات مقاربة نتيجة للإخفاقات المستمرة بالعمليات الحسابية.

بصورة عامة يقتصر تعرض هؤلاء الطلبة لحل المسائل على الإحباط الدائم، والفشل دون أن تتوفر لهم ولو فرصة نجاح واحدة نتيجة للعقبات الحسابية التي تشخص أمامهم.

وهنا تظهر أهمية الآلة الحاسبة بوصفها مصدراً مساعداً. فالاستخدام الانتقائي لها في تجاوز حاجز الحسابات الكامن سوف يتيح للطلبة فرصة التركيز على مهارات حل المسائل دون معاناة الخوف من مواجهة الإحباط الذي ينتج عن العجز الحسابي.

ينبغي أن تصمم هذه الأنظمة، بعناية بالغة، وتراقب عن كثب لكي يضمن تأثيرها. وبعد إدراك النجاح في حل المسائل، ينبغي على الطلبة أن يحفزوا غريزيا لقهر العجز الحسابي المقيم في ذواتهم.

رغم أن تنشئة الطلبة، باستمرار، على حل مسائل الكتب المنهجية - التقليدية، فإنهم يجدونها غير واقعية، ومصدرا للإزعاج والملل.

بصورة تقليدية، يعمد مؤلفو الكتب، إلى تصميم المسائل بطريقة تسهل الحسابات الرياضية إلى أكبر حد ممكن دون إحداث خلل في مضمون المسألة. غير أن مواقف الحياة اليومية بصيغتها الواقعية تختلف بشكل ملموس عما يدور في المسائل المطروحة، كما أن الأعداد السائدة فيها تمتاز بتعقيدها وعدم بساطتها. وبمساعدة الآلة الحاسبة، يستطيع المعلم أن يعرض مواقف وقضايا واقعية بميدان حل المسائل دون أن يقلقه موضوع الارتباك الحسابي Computational Distraction.

فمسألة الحركة المنتظمة، على سبيل المثال، يمكن أن تتضمن قيما كسرية، فينتج عنها إجابات لا تتألف من أعداد صحيحة، وهو أمر لا يقلق الطلبة الذين يصطحبون الآلة الحاسبة معهم. يضاف إلى ذلك، وجود إمكانية لتشجيع الطلبة الذين يستخدمون الآلة الحاسبة على إعداد مسائل ترتكز إلى خبراتهم الشخصية (مثلا، احتساب معدل سرعة سيرهم نحو المدرسة).

ستنفتح آفاق جديدة وواسعة عند استخدام الآلة الحاسبة لكي تساعد على حل المسائل التي تتجاوز حدود الحساب.

تتضمن الفصول الدراسية لمادة الرياضيات في المدارس الثانوية المتقدمة عمليات حسابية مكثفة وشاملة. ولم تمض سنون طويلة، حيث كانت تستخدم المسطرة المنزلقة أو جداول اللوغاريتمات لحل مثل هذه المسائل.لا بل حتى قضبان نابيير Nap'ier's Rods، والمعداد ذو الخرزات الملونة Abacus قد لعبت دورا حاسما في تاريخ المحاولات البشرية الدائمة للتخلص من العبء الشاق الذي ينشب عن عمليات الحساب اليدوية. ولا زال المعداد يستخدم بكثرة في البلدان الأقل تقدما بميدان التقنيات الحديثة، وفي هذه الأيام، فإن الأسلوب المنطقي لعمليات الحساب عند هذا المستوى هو استخدام الآلة الحاسبة.

إن كل من الآلة الحاسبة العلمية (بمعنى آخر، تلك التي تحوي على دوال مختلفة، منها الدوال المثلثية) والآلة الحاسبة - الرسومية قد أصبحتا وسيلة مساعدة على التدريس، لكنها لن تكون بأي حال من الأحوال بديلا عنه.

أمثلة على أنشطة الآلة الحاسبة
Examples of calculator activity

قد تصبح الآلات الحاسبة أدوات لطيفة للطلبة الذين

يحاولون تجربتها، ومطالعة الأنماط السائدة فيها، وإنشاء استنتاجاتهم الشخصية حول الأفكار والآراء الرياضية.

وقد تظهر الأنشطة الاستكشافية في جميع مستويات المراحل التعليمية. كما يمكن تحديد المسائل التالية في أي مستوى من المرحلة الخامسة فصاعدا. على سبيل المثال، بالنسبة للمراحل المبكرة. يستطيع الطلبة استكشاف المسألة الآتية بسهولة بالغة بعد أن يتعلموا أسلوب تكرار المراتب العشرية.

مسألة Problem

ما المراتب العشرية التي تكافئ 11/1, 11/2, 11/3, 11/4...؟ وهل تستطيع تخمين المرتبة العشرية المكافئة للكسر 11/9 دون استخدام آلة حاسبة؟

الحل Solution

رغم سهولة استكشاف هذه المسألة باستخدام أي نوع من الآلات الحاسبة، فإن شاشة العرض الواسعة التي توجد في الآلة الحاسبة الرقمية ستتيح للطلبة فرصة رؤية المزيد من المعلومات وإصدار الاستنتاجات بسهولة كبيرة.

```
1/11
      .0909090909
2/11
      .1818181818
3/11
      .2727272727
```

```
      .1818181818
3/11
      .2727272727
4/11
      .3636363636
5/11
      .4545454545
```

إن شاشة العرض– على الجهة اليمنى– تم الحصول عليها باستخدام الآلة الحاسبة الرسومية من نوع Texas Instruction TI-83Plus. ينبغي على الطلبة اكتشاف ما يأتي من هذه الشاشات.

- إن المراتب العشرية المكافئة التي تم توليدها رياضيا هي من المراتب العشرية المتكررة.
- إن المكررات (09، 18، 27، 36،....) هي من مضاعفات العدد 9.
- وباستمرار هذا النمط على بقية الأعداد فتتكون المراتب العشرية المكافئة لـ 9/11 هي : 0.81818181

```
9/11
      .8181818182
```

بالطبع. وعند إدخال الكسر 11/9، سيشاهد الطلاب صدق حدسهم، باستثناء آخر مرتبة عشرية تظهر على شاشة الآلة الحاسبة.

إن هذه المرتبة غير المتوقعة قد تفتح باب المناقشة حول موضوع القدرة التقريبية Round Capacity للآلات الحاسبة، وستحفز الطلبة على تقدير المراتب العشرية المكافئة لـ 11/5 ، 11/6 و 11/7 بدقة أكبر. تكمن مناطق القوة في هذه المسألة ببيانها الذي أظهر بوضوح صعوبة الحصول على هذه النتائج بعد استخدام الآلة الحاسبة. والطلبة الذين ينجزون مثل هذه المهام بأيديهم، يعانون من ارتكاب الأخطاء، ولا تتوفر لنسبة كبيرة منهم فرصة كافية لمعاينة النمط السائد في النتائج المحسوبة بعد أن أرهقتهم عمليات القسمة الطويلة. إن فرصة مناقشة التقريب قد لا تبرز بصورة طبيعية كما حصل في هذه المسألة.

إن متابعات هذه المسألة تتضمن استكشاف الأنماط للكسور التي تساوي قيم مقاماتها 9 ,90 ,110 و 7.

مسألة Problem

أودع بابلو 5000$ في حساب بمصرف يدفع فائدة مركبة مقدارها 6٪ سنويا. كم سيصبح المبلغ المودع في الحساب بعد مرور 10 سنوات؟

قبل إدخال التقنية واستخدامها في المدارس، كان هناك أسلوبان أساسيان لحل هذه المسألة.

الحل الأول Solution 1

بالأسلوب اليدوي، حيث يستطيع الطلبة إجراء الحسابات التالية:

في نهاية العام	المبلغ، $
1	\$5000 + .09(\$5000) = \$5300
2	\$5300 + .09(\$5300) = \$5618
3	\$5618 + .09(\$5618) = \$5955.08
•	•
•	•
•	•
10	\$89545.24

يبدو واضحا بأن عملية إجراء الحسابات، دون استخدام آلة حاسبة، ستكون مهمة قاسية جدا حتى بالنسبة لأفضل الطلبة وأكثرهم تفوقا. بيد أن صعوبة العمليات الحسابية سوف تثبط همة كل من يحاول حل هذه المسألة.

الحل الثاني Solution 2

يستطيع الطلبة، في الفصل الدراسي – المتقدم، القيام بتعميم الحسابات السابقة بحيث يدركون تماما حاجتهم لاحتساب قيمة $5000(1.06)^{10}$\$. كما يمكن أن تحل هذه المسألة، دون توظيف التقنية، بصورة تقليدية باستخدام اللوغارتيمات.

حيث سيقوم الطلبة بإجراء الخطوات الآتية:

$$A= 5000\ (1.06)^{10}$$

$$\log A = \log 5000\ (1.06)^{10}$$

$$\log A = \log 5000 + 10 \log 1.06$$

$$\log A = 3.6990 + 10\ (0.0253)$$

$$\log A = 3.5920$$

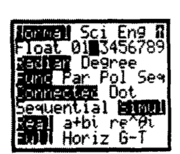
$$A = 8953.65$$

لاحظ بأن استخدام جداول اللوغاريتمات، والذي يحتوي على أخطاء تقريبية مقيمة بين أرقامه، سيترك خطأ تقريبيا قدره $0.59. وقبل أن يتم توظيف الآلات الحاسبة في عمليات إجراء الحسابات المختلفة، كانت اللوغاريتمات الوسيلة الأساسية لتبسيط العمليات الحسابية. ولم توجه عناية كافية لدراسة خصائص دوال اللوغاريتمات وأشكالها الرسومية. والآن دعنا نلقي نظرة على بضعة حلول أخرى تستثمر الفوائد التي توفرها التقنيات المستحدثة.

الحل الثالث Solution 3

أدخل الصيغة 10^(1.06)5000$ في آلة حاسبة علمية أو رسومية، مع تثبيت العرض على مرتبتين عشريتين لتحصل على النتيجة 8954.24$ إن هذا الحل هو مبتذل لحد ما على الآلة الحاسبة.

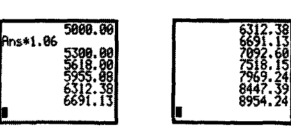
الحل الرابع Solution 4

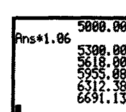


حتى في المراحل الأدنى، فإن القدرة الكبيرة للآلات الحاسبة – الرسومية تجعل المسألة أكثر متعة وتشويقا. ونظرا لأن المسألة تتعامل مع الدولارات والسنتات، ينبغي تغيير طريقة عمل الآلة للعمل على أساس مرتبتين عشريتين. إن السطر الثاني من الشكل التخطيطي، بالجهة اليمنى – يؤشر بأن هذه العملية قد اكتملت على الآلة الحاسبة TI-83.

أدخل قيمة 5000 ثم اتبعها بمفتاح الإدخال Enter. بالضغط على مفتاح Ans*1.06 تقوم الآلة الحاسبة بإيجاد قيمة (1.06)5000 أو المبلغ الكلي بعد مرور سنة واحدة $5300. إن الضغط على مفتاح الإدخال، عند هذه النقطة، يخبر الآلة الحاسبة بتكرار الإيعاز Instruction الأخير Ans*1.06، والتي تعطي قيمة رأس المال عند نهاية السنتين $5618.

إن تكرار الضغط على مفتاح الإدخال لثمان مرات متتالية، كما يظهر في الشكلين الآتيين، سوف يعطينا النتيجة التي نبحث عنها.



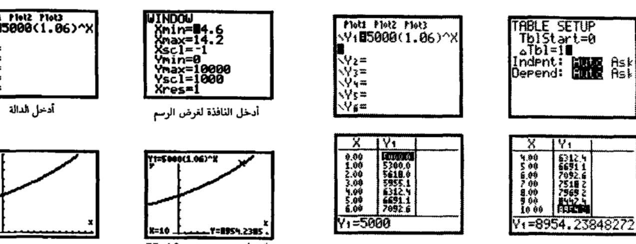


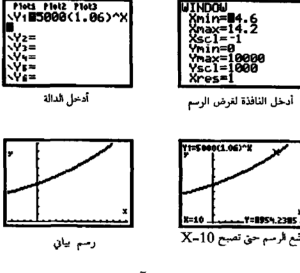
إن الخصائص المثيرة بهذا الحل تكمن في سهولة الحصول عليه، وبسرعة ملحوظة. ونتيجة لذلك، فإن من الممكن توسيع المسألة لتأمل الأسئلة ذات الصلة القريبة، مثل:

- ما هي الفترة الزمنية التي تستغرقها أموال "باولو" لكي تتضاعف ؟ أو تصبح ثلاثة أضعاف.
- غير نسبة الفائدة إلى 4%، ثم:
  أ- قارن رأس المال لباولو مع نتائج فائدة 6%.
  ب- قارن الزمن الذي يستغرقه رأس المال لكي يتضاعف عند نسبة فائدة قدرها 4٪ مع الذي يستغرقه عندما تكون نسبة الفائدة 6٪.
  ج – قارن الزمن الذي يستغرقه رأس المال لكي يصبح ثلاثة أضعاف وعند نسبة فائدة قدرها 4٪ مع الذي يستغرقه عندما تكون نسبة الفائدة 6٪.
- افترض أن الفائدة المركبة كانت نصف سنوية. كم سيصبح رأس مال "بابلو" النهائي بالمقارنة مع رأس المال النهائي الذي يتقاضاه عند اعتماد فائدة مركبة سنوية ؟
- افترض أن الفائدة المركبة كانت شهرية. كم سيصبح رأس المال النهائي بالمقارنة مع رأس المال النهائي الذي سيتقاضاه عند اعتماد فائدة مركبة – نصف سنوية؟

الحل الخامس Solution 5

إن الصعوبة الأساسية التي تلاقيها مع الحل الرابع تنشأ عند ضرورة المراقبة العقلية لعدد مرات الضغط على مفتاح الإدخال. إن الاستمرار بعملية العد قد يربك بعض الطلبة. إن حلا آخر باستخدام خاصية الجدولة Table الموجودة في عدد كبير من الآلات الحاسبة – الرسومية سيجنبنا هذه المشكلة.





أدخل الدالة

أدخل النافذة لغرض الرسم

رسم بياني

تتبع الرسم حتى تصبح X=10

قم بتفعيل قائمة الرسم Graphing Menu عن طريق الضغط على مفتاح (=Y)، ثم أدخل الدالة Y1=5000(1.06)^X، كما يظهر في المقطع الأول من الشكل السابق.وستقوم الآلة الحاسبة – الرسومية بإعداد جدول عن طريق الضغط على مفتاح [TBLSET] ثم أدخل قيمة البداية للمتغير X والتي ستكون 0، وسيكون التغير في X هو 1. والآن أضغط المفتاح [TABLE] وابدأ بالتنقل إلى أسفل للحصول على النتيجة المطلوبة بعد مرور عشر سنوات، والتي تظهر في المقطع الرابع من الشكل السابق. إن النتيجة ستظهر عند قاعدة لوحة العرض. وستكون مقربة إلى 954.24$.

الحل السادس Solution 6

يستثمر هذا الحل الإمكانيات الرسومية الموجودة في الآلات الحاسبة – الرسومية كما في الحل الخامس. وينبغي إدخال الدالة إلى الآلة الحاسبة. وقبل عملية إعداد الرسوميات Graphing، يجب أن تكون متأكدا من كون نافذة عرض الرسوميات مناسبة ومعقولة. إذا لم يكن المجال Domain والمدى Range قد حددا بصورة معقولة فلن تستطيع أن تظهر قيما صحيحة للمتغير X عندما ستتبع الشكل الرسومي. يظهر أدناه مثال عن نافذة العرض المناسبة.

إن الضغط على مفتاح [GRAPH] سينتج عنه ظهور الشكل الرسومي كما سيظهر في المقطع الثالث من الشكل التوضيحي. اضغط مفتاح رسم [TRACE] ثم قم بتحريك المؤشرة لحين الوصول إلى قيمة 10 للمتغير X. وإن هذا الشكل التخطيطي سوف يعطي نفس النتائج، كما في الحلول السابقة، ودون إجراء تقريب دقيق

بصورة عامة، يمكن استخدام الآلة الحاسبة – الرسومية لحل المسائل التي لا سبيل إلى حلها بالأساليب والطرق التقليدية. تأمل المسألة الآتية:

مسألة Problem

جد إحداثيات جميع نقاط تقاطع الأشكال الرسومية للمنحنيات التي معادلتها $y = x^2$, $y = 2^x$

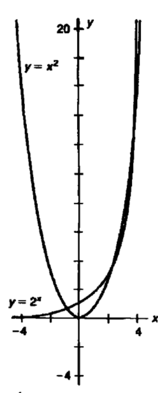
الحل Solution

في بداية الأمر،قد يظهر الحل واضحا لا لبس فيه، لأن فحص المعادلتين يعطي إحداثيات نقطتي التقاطع (2,4) و (4,16). بيد أن الشكل الرسومي المرسوم بصورة جيدة، كما في الشكل الآتي، يظهر وجود ثلاثة نقاط تقاطع، الأولى والثانية هما المذكورتان قبل قليل، أما الثالثة فتقع في الربع الثاني Quadrant II.

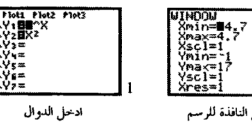
قد يحاول المرء إيجاد إحداثيات نقاط التقاطع باستخدام التقانات التي نستخدمها في رياضيات المدارس الثانوية. ولن تكون هذه التقانات ذات فائدة ملموسة. فعلى سبيل المثال، قد يحاول أحدنا استخدام اللوغاريتمات :

$$x^2 = 2^x$$
$$2 \log x = x \log 2$$

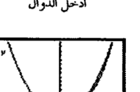
إن هذه الطريقة لن تكون قابلة للاستخدام والتطبيق في إيجاد الحلول لقيم $x<0$، ونظرا لأن قيمة $\log x$ لن تكون قابلة للتعريف والوصف ما لم تكن $x>0$.



فإن حل الآلة الحاسبة – الرسومية من أجل إيجاد التقاطع الثالث، يظهر بجلاء في الخطوات الآتية :



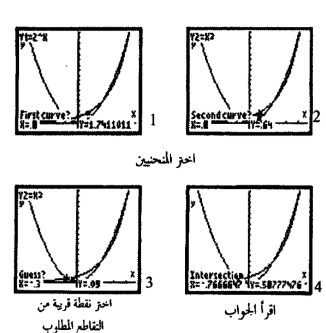
ادخل النافذة للرسم ادخل الدوال



1:value
2:zero
3:minimum
4:maximum
5:intersect
6:dy/dx
7:∫f(x)dx
4

انتق خيار حساب نقطة التقاطع الرسم البياني

- أدخل الدوال – المقطع الأول.
- أدخل نافذة الرسوميات – المقطع الثاني.
- الشكل الرسومي – المقطع الثالث.
- انتق الخيارات لإيجاد نقطة التقاطع – المقطع الرابع.
- من الشكل الآتي :
- اختر الشكلين الرسومين – المقطعين 1 ، 2.
- اختر نقطة مناسبة قريبة من نقطة التقاطع – المقطع 3.
- اقرأ الجواب – المقطع الرابع.



اختر المنحنيين

اقرأ الجواب اختر نقطة قريبة من التقاطع المطلوب

إن قيمة النقطة الثالثة، وفق المراتب العشرية المتاحة على الآلة هي (0.7666647–, 0.58777476).

المحاكاة Simulation

تكمن مصادر قوة الآلات الحاسبة – الرسومية في قدرتها على توظيف الأفكار الرياضية لإنجاز المحاكاة. والآن تأمل المسألة الجبرية – التقليدية الآتية.

مسألة Problem

تبعد مدينة نيويورك عن شيكاغو بـ 850 ميلا. وفي الساعة 9:00 من أحد الأيام، غادر قطار محلي من النوع الذي يتوقف في جميع المحطات من شيكاغو باتجاه نيويورك، مسافرا بسرعة منتظمة قدرها 50 ميل/ساعة. بعد مرور ساعة، غادر قطار سريع Express train مدينة شيكاغو متبعا نفس المسار، مسافرا بسرعة منتظمة قدرها 55 ميلا/ساعة. متى يدرك القطار السريع القطار الأول؟.

حل تقليدي Traditional Solution

أفرض عدد ساعات سفر القطار الأول = t.

عدد ساعات سفر القطار الثاني = t-1

بعد مرور ساعة من الزمان، قطع القطار الأول 50 ميلا، ولم يتحرك القطار الثاني من محله.

وبعد مرور ساعتين من الزمان، قطع القطار الأول 100 ميلا، وقطع القطار الثاني 55 ميلا.

وبعد مرور ثلاث ساعات، قطع القطار الأول 150 ميلا، بينما قطع القطار الثاني 110 ميلا.

•
•
•

بعد مرور t من الساعات، يكون القطار الأول قد قطع t50 من الأميال، بينما يكون القطار الثاني قد قطع 55(t-1) من الأميال.

سيدرك القطار الثاني، القطار الأول عندما تكون المسافة التي قطعها القطاران برحلتهما متساوية. ويمكن وصف هذه القضية بالمعادلة الآتية :

$$50\,t = 55\,(t-1)$$

وسينتج عن حل هذه المعادلة قيمة t=11. بما أن القطار الأول قد غادر في الساعة 9:00 صباحا، فبعد مرور 11 ساعة، أي في الساعة 8:00 مساءا سيدرك القطار السريع القطار الأول.

حل الآلة الحاسبة – الرسومية
Graphing Calculator Solution

ترعرع الطلبة في الألفية الجديدة في عصر الحاسوب والمعلوماتية، حيث تكون الرسوميات والمرئيات مكاناً شائعا ومتوقعا.

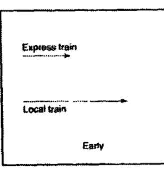
يمكن استخدام الدوال الرسومية والمرئية المتوفرة في الآلة الحاسبة – الرسومية والتي ستجعل المسألة السابقة، وحلها، أكثر تشويقا وتعبيرا من الحل التقليدي لدى جملة من الطلبة.

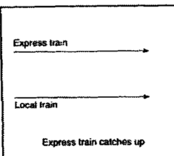
في البداية، ينبغي أن نتخيل القطارين وهما يسافران عبر لوحة عرض الآلة الحاسبة. وسيأتي هذا الوصف التخيلي عما قريب.

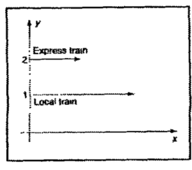
إن وضع الوصف على نظام إحداثيات Coordinate system سيمكننا من إعداد المحاكاة بالطريقة الآتية :

الإحداثي الصادي y-axis للقطار الأول يكون ثابتا على الدوام، وافترضه y=1. وسيكون الإحداثي الصادي للقطار السريع ثابتا أيضا، وافترضه y=2.

يمكن اعتبار قيم المتغير y أرقاما للمسارين tracks. لذا سيكون القطار الأول على مسار رقم (1) في جميع الأوقات، بينما سيكون القطار السريع على مسار رقم (2) في جميع الأوقات. إن أرقام هذين المسارين هي أعداد اعتباطية كليا، ولكن ينبغي أن نكون متأكدين من اختلافهما بالنسبة للقطارين، على الدوام.







تمثل الإحداثيات السينية x-coordinates للقطارين المسافة من مدينة شيكاغو.

على سبيل المثال، في الساعة 11:00 صباحاً، وبعد مرور ساعتين على مغادرة القطار الأول، سيكون الإحداثي السيني للأول 100 بينما يكون الإحداثي السيني للقطار السريع 55. يعتمد الإحداثي السيني للقطارين على الفترة الزمنية المستغرقة. أما الإحداثي السيني للقطار الأول بعد مرور t من الساعات هو 50t، أما بالنسبة للقطار الثاني فسيكون 55(t-1).

إن المعادلتين اللتان تصفان حركة القطار الأول هي :

$$x = 50\,t \qquad y = 1$$

أما المعادلتان اللتان تصفان حركة القطار السريع هي :

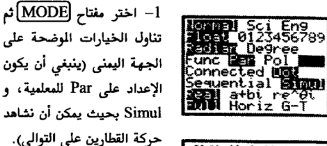
$$x = 55\,(t-1) \qquad y = 2$$

إن موقفا مثل هذا الموقف، حيث يعتمد المتغيران (x,y) على متغير ثالث t، هو مثال حيث تظهر الحاجة إلى معادلات معلمية Parametric Equations (الباراميترية).

بالحقيقة، فإن نوع الحلول السائدة في محاكاة معظم الحواسيب والآلات الحاسبة هي من نوع المعلمية Parametric. وإن بقاء هذه الحقيقة عالقة في أذهاننا، ستجعلنا نتمكن من

إعداد محاكاة الآلة الحاسبة بسهولة بالغة.

إن الخطوات الآتية قد تم إعدادها على آلة حاسبة نوع (TI-83 Plus) رغم أن هذه الخطوات تشابه تلك التي يتم إجراؤها على آلات حاسبة مشابهة، كذلك.



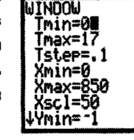
1- اختر مفتاح MODE ثم تناول الخيارات الموضحة على الجهة اليمنى (ينبغي أن يكون الإعداد على Par للمعلمية، و Simul بحيث يمكن أن نشاهد حركة القطارين على التوالي).

2- لإدخال المعادلات اختر المفتاح Y= كما فعلت في المواقف السابقة. وبما أن الأسلوب قد تم تثبيته للمعلمية، فإن المعادلات التي سيتم إدخالها ستكون على شكل أزواج. إن استخدام الرمز السفلي subscript في الآلة الحاسبة سيتيح إمكانية إدخال مجاميع من المعادلات.

3- من الضروري إعداد النافذة مقدما، لتوفر مشهد مناسب للقطارين. وهناك ثلاثة مراحل لإعداد النافذة المناسبة :

أ- بالنسبة للوقت Time: يمثل الرمز t عدد الساعات التي سافر خلالها القطار الأول. وبما أن سرعة سفره هي 50 ميل/ساعة، فإنه سيستغرق 850÷50 = 17 ساعة ليقطع المسافة من نيويورك إلى شيكاغو. إذن نستطيع تحديد تثبيت التوقيتات الصغرى والعظمى كما يلي :

$T_{min}=0$ و $T_{max}=17$. إن تثبيت قيمة T_{step} سيتحكم بأسلوب تغيير قيمة t بالنسبة لأغراض الرسوميات. إذا تم تثبيت قيمة $T_{step}=1$ ساعة، ستقوم الحاسبة بعرض موقع القطار عند نهاية كل ساعة بحيث تكون سرعة الحركة كبيرة. باستخدام قيمة أصغر للمتغير T_{step}، افترضها 0.1، سنلاحظ بأن حركة القطار ستكون عند كل 0.1 ساعة، أو كل ستة دقائق.



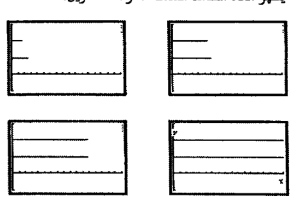
هذه إحدى القيم التي تستطيع تجربتها وتلاحظ الفرق بالنتائج.

ب- قيم x: بما أن القطارين يقطعان مسافة 850 ميل من شيكاغو إلى نيويورك، سنقوم بتثبيت $X_{min}=0$ و$X_{max}=850$. وتمثل قيمة X_{scl}(x scale) المسافة بين التأشيرات على المحور السيني. وعليه، إذا كانت قيمة Xscl=50 فإن التأشيرات على المحور السيني ستكون 50,100, 150, 200, ...,850

ج - قيم y: بما أن قيمة y تمثل رقم المسار في هذه المسألة، فإن اختيار $Y_{min}=-1$ و $Y_{max}=3$، و $Y_{scl}=1$ سيكون كافيا. وباستخدام $Y_{min}=-1$، سنتمكن الملاحظ من مشاهدة المحور السيني مع تأشيراته بوضوح وسهولة.

إن الشكلين الرسوميان أعلاه يظهران بوضوح المعلومات المطلوب إدخالها بعد الضغط على مفتاح Window لأغراض المحاكاة. في هذه النقطة، يستطيع المستخدم الضغط على مفتاح Graph ومراقبة القطارين وهما يقطعان الشاشة. لإزالة ما يظهر على الشاشة ومشاهدة القطارين للمرة الثانية، اضغط 2nd ثم PRGM .

يظهر أدناه المشاهد الملتقطة لحركة القطارين.



لتقليل سرعة القطارين في المحاكاة، قم بتغيير قيمة T_{step} على نافذة العرض. إن الاختيار الأكثر قبولا هو $T_{step}=0.05$، وسيظهر موقع كل قطار كل ثلاث دقائق.

رغم هذا، فإننا عند هذه النقطة لم ننجز حل المسألة الأصلية. ولإيجاد اللحظة التي يدرك فيها القطار السريع القطار الأول، فإن كل ما نحتاجه هو الضغط على مفتاح TRACE .
إن الأشكال الرسومية الآتية تظهر اللوحات التي ستشاهدها عندما تضغط على مفتاح السهم الأيمن.

اللوحة الأولى تظهر القيمة الابتدائية.

حرك المؤشرة إلى اليمين وشاهد القيم لقيم T الأكبر.

في كل حالة، تظهر قيم كل منT، X، Y. وكما ستلاحظ بأنه كلما تقوم بالضغط على السهم الأيمن، ستزداد قيمة T بمقدار 0.5، نظرا لأننا قمنا بتثبيت قيمة Tstep على هذه القيمة.

استمر بتحريك المؤشرة لغاية T=5.

إن ضغط السهم الأعلى سيمكنك من التنقل بين القطارين.

استمر بعملية التتبع لحين T=10.

لاحظ بان القطارين يبعدان 500 و 495 ميلاً عن شيكاغو.

استمر بعملية التتبع لحين T=10.95

القطاران يبعدان عن بعضهما بـ 4/1 ميل فقط

استمر بعملية التتبع لحين T=11.

القطاران يبعدان بـ 550 ميلا عن شيكاغو لقد أدرك القطار الثاني القطار الأول.

نتيجة لعملية التتبع، سيشاهد الطلبة بأن كلا من القطارين يبعدان بـ 550 ميلا عن شيكاغو عند T=11، أو الساعة 8:00 مساء.

يستطيع المعلمون عمل هذه المشاهدات عند استخدام المحاكاة لتدريس هذه المسألة عندما يكون:

- مستوى التحفز عند الطلبة مرتفعا بشكل كبير، وسيشارك معظم الطلبة في المسألة وبتفاصيل حلها.
- يلاحظ الطلبة وجود أنماط محددة لم يستطيعوا ملاحظتها عند استخدام الأساليب التقليدية. فعلى سبيل المثال، عندما يستمرون بالمراقبة، سيلاحظ الطلبة، عادة، بأن القطار السريع يكتسب 5 أميال على حساب القطار الأول عند انقضاء كل ساعة. فمثلا:

عندما T = 5 $X_{1T}=250$ $X_{2T}=220$

عندما T = 6 $X_{1T}=300$ $X_{2T}=275$

عندما T = 7 $X_{1T}=350$ $X_{2T}=330$

(عند هذه النقطة، سيلاحظ الطلبة بأن هناك 20 ميلا أمام القطار لكي يدرك القطار الأول، وسيحتاج إلى أربعة ساعات إضافية، ويكون الجواب T=11).

- عندما يصبح الطلبة مبدعين وذوي ابتكارات. على سبيل المثال، قد يلجئون إلى وضع القطارين على نفس المسار، أو يقترحون إعادة حل المسألة والقطارين يغادران باتجاهين متعاكسين، وفي الأخير يجتاز أحدهما الآخر.
- إن بعض المسائل من هذا النوع قد تؤدي، عادة، إلى حلول جبرية.

تتضمن المحاكاة مسائل الحركة المنتظمة – التقليدية : إسقاط كرة من قمة سقف، أو قذف جسم في الهواء إلى أعلى رأسياً، أو قذف جسم قطريا، ... الخ.

إن جميع هذه المسائل، يمكن معالجتها في المنهج الدراسي للمدارس الثانوية، وبقليل من الاعتناء والمتابعة.

حل المعادلات باستخدام المصفوفات
Solving Equation Using Matrices

مسألة Problem

استخدم الآلة الحاسبة – الرسومية لحل كل من مجموعة المعادلات الآتية :

أ –
$$3x + 5y = 2$$
$$7x + 4y = 6$$

ب –
$$2A - 3B + 2C - 4D + 2E = 8$$
$$3A + 2B - 3C + 3D - 3E = -5$$
$$5A - 7B + 5C - 5D + 5E = 9$$
$$11A - 5B + 4C + 3D + 5E = 2$$
$$7A - 9B - 7C - 13D - 7E = 1$$

يمكن حل المجموعة الأولى من المعادلات عن طريق رسم الآلة الحاسبة لأشكال المعادلات وباحتساب إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين. أما المجموعة الثانية من المعادلات فمن المتعذر حلها بطريقة رسومية. نظرا لكونها ذات بعد خامس Fifth Dimension. إن الطريقة الملائمة لحل مجموعة من المعادلات تشابه هذه المعادلات تكون عن طريق استخدام إمكانيات المصفوفة بالآلة الحاسبة – الرسومية.

الحل Solution

افترض: في أ) ، لتكن

$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 7 & 4\end{pmatrix}$ مصفوفة العوامل Coefficient Matrix لمجموعة المعادلات في هذه المسألة.

$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ مصفوفة المتغير Variable Matrix لمجموعة المعادلات في هذه المسألة.

$B=\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}$ مصفوفة الثوابت Constant Matrix لمجموعة المعادلات في هذه المسألة.

إذا قمنا بضرب المصفوفتين A، X سنحصل على $\begin{pmatrix}3x+5y\\ 7x+4y\end{pmatrix}$ والتي تساوي $\begin{pmatrix}2\\ 6\end{pmatrix}$ وفقا لمجموع المعادلات في هذه المسألة. يمكن كتابة هذه النتائج كمعادلة مصفوفة AX=B.

بافتراض وجود حل لمجموعة المعادلات، ووجود مقلوب Inverse للمصفوفة A، يمكننا صياغة ذلك بصيغة $X=A^{-1}B$.

تزودنا هذه المعادلة بطريقة مبسطة لحل مثل هذه المجموعة من المعادلات باستخدام الآلة الحاسبة – الرسومية. إن كل ما نحتاجه هو إدخال معاملات المصفوفتين A و B إلى الآلة الحاسبة كما يلي:

```
NAMES MATH EDIT
1:[A] 1×1
2:[B]
3:[C]
4:[D]
5:[E]
6:[F]
7↓[G]
```

اضغط مفتاح المصفوفة المؤشر MATRX [X^{-1}].

```
NAMES MATH EDIT
1:[A] 1×1
2:[B]
3:[C]
4:[D]
5:[E]
6:[F]
7↓[G]
```

اختر EDIT وانتق المصفوفة A.

```
MATRIX[A] 2 ×2
[0   0 ]
[0   0 ]

1,1=2
```

أدخل أبعاد المصفوفة A(2x2) ولاحظ كيف أن الآلة الحاسبة ستقوم آليا بإعداد مصفوفة 2x2 والتي تكون جميع مدخلاتها مساوية للصفر.

```
MATRIX[A] 2 ×
[3   5 ]
[7   4 ]
```

ينبغي إدخال معاملات المصفوفة A مدخلا فمدخلا اضغط QUIT . [2nd] [MODE].

```
MATRIX[B] 2 ×1
[0 ]
[0 ]
```

والآن نحن على استعداد لإدخال المصفوفة B. اضغط المصفوفة Matrix ومفتاح [X^{-1}] وقم بتحرير المصفوفة B لتكون المصفوفة من نوع 2x1.

```
MATRIX[B] 2 ×1
[2 ]
[6 ]
```

أدخل معاملات المصفوفة B، اضغط QUIT [2nd] [MODE]

والآن نستطيع أن نجعل الآلة الحاسبة تقوم باحتساب $A^{-1}B$،
ولكي تفعل ذلك اتبع ما يلي :
اضغط [X^{-1}] [2nd] واختر A.
والآن اضغط [X^{-1}] (بحيث يتم أخذ المقلوب)، [2nd] (MATRX)
واختر B.

ستظهر الشاشة:

```
[A]-1[B]
```

والآن سينجم عن ضغط [Enter] الحل:

```
[A]-1[B]
[[.9565217391 ]
 [-.1739130435]]
```

للنظرة الأولى، قد تعتقد بأن النتائج خاطئة. أضغط [MATH] وستشاهد لوحة العرض هذه :

```
MATH NUM CPX PRB
1:▸Frac
2:▸Dec
3:³
4:³√(
5:ˣ√
6:fMin(
7↓fMax(
```

اختر الخيار 1 لتغيير النتائج إلى كسور بحيث تكون نتائج حل المسألة بصيغة كسرية.

```
[A]-1[B]
[[.9565217391 ]
 [-.1739130435]]
Ans▸Frac
        [[22/23]
         [-4/23]]
```

إن الحل بتفحص كلا من المعادلتين. تمتاز طريقة المصفوفة بقدرات متميزة نظرا لكونها تتضمن إدخال المعاملات إلى المصفوفة A، والمصفوفة B. وليس ثمة تأثير ملموس سواء كانت هناك معادلتين بمتغيرين، أو 15 معادلة بـ 15 متغير.

وسنقوم الآن ببيان أن حل المجموعة ب قد وجد مشابها تماما.

اضغط مفتاح MATRX.
[X^{-1}]

```
NAMES MATH EDIT
1:[A] 2×2
2:[B] 2×1
3:[C]
4:[D]
5:[E]
6:[F]
7↓[G]
```

اختر EDIT وانتق المصفوفة A.

```
NAMES MATH EDIT
1:[A] 2×2
2:[B] 2×1
3:[C]
4:[D]
5:[E]
6:[F]
7↓[G]
```

قم بتغيير أبعاد المصفوفة A إلى (5x5). لاحظ كيف أن الحالة الحاسبة ستقوم بتثبيت المصفوفة الجديدة 5x5 آليا. وستبقى بعض المدخلات كما هي في المصفوفة A السابقة.

```
MATRIX[A] 5 ×5
[3  5  0
[7  4  0
[0  0  0
[0  0  0
[0  0  0
```

إن معاملات المصفوفة A ينبغي إدخالها واحدة، فواحدة.
اضغط QUIT
[2nd] [MODE]

```
MATRIX[A] 5 ×5
[2   -4   2
[-3   3   -3
[-5   -5   7
[-4   3   5
[-7   -13  -7

3,3=7
```

الآن قم بتغيير المصفوفة B إلى (5x1) وباشر بإدخال معاملاتها. الضغط على $A^{-1}B$ بنفس الطريقة التي أجريت سابقا وسيظهر لنا الحل.

```
[A]-1[B]
        [[1 ]
         [2 ]
         [3 ]
         [-2]
         [-1]]
```

إن هذا الحل يخبرنا أن النظام الأصلي A=1، B=2، C=3، D=-2، E=-1. إن ما يثير الاهتمام هو أن استخدام المصفوفات لإيجاد حل نظام يتألف من خمسة معادلات بخمس متغيرات ليس أكثر صعوبة من إيجاد حل لنظام يتألف من معادلتين بمتغيرين، باستثناء ظهور الحاجة إلى إدخال المزيد من البيانات.

تطبيقات حساب التفاضل والتكامل
Calculus Application

المشتقات Derivatives

إن من أهم الخيارات الممتعة المثبتة في الآلة الحاسبة – الرسومية هي القدرة على إيجاد المشتقة العددية Numerical Derivative. على سبيل المثال، إذا أردنا إيجاد $f^{1}(1.5)$ إذا كانت $f(x) = x^3-4x$.

إن إحدى الطرق لتحقيق ذلك تكمن في جعل الآلة الحاسبة ترسم التخطيط الرسومي $y=x^3-4x$، ثم علينا أن نرسم مماسا في النقطة المحددة. إن التعاقب الآتي يظهر هذه العملية في الآلة الحاسبة TI-83 Plus.

على اليسار يظهر التخطيط الرسومي للدالة $y=x^3-4x$.

أرسم DRAW اختر PRGM ثم الخيار 5 لرسم مماس.

```
DRAW POINTS STO
1:ClrDraw
2:Line(
3:Horizontal
4:Vertical
5:Tangent(
6:DrawF
7↓Shade(
```

إما أن تدخل 1.5 لقيمة x، أو قم بتحريك المؤشرة لحين الوصول إلى x = 1.5 ثم اضغط ENTER.

```
Y1=X3-4X
X=1.5
```

سترسم الآلة الحاسبة المماس للدالة ثم تعطينا معادلته. إن الميل المعطى Slope 2.750001 هو تقريب دقيق للميل الحقيقي 2.75.

```
X=1.5
y=2.750001X+-6.7500015
```

إن طريقة أخرى لإيجاد المشتقة العددية لدالة عند نقطة ما تعتمد مبدأ استخدام دالة NDERIV (أو NDER) الموجودة في معظم الآلات الحاسبة- الرسومية. ولا تعتمد هذه الطريقة على رسم المخطط الرسومي. بالنسبة للمثال السابق، يظهر التعاقب باستخدام الآلة الحاسبةTI-83 Plus.

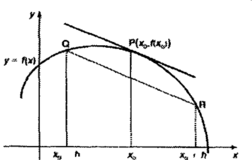
```
MATH NUM CPX PRB
4↑³√(
5:ˣ√
6:fMin(
7:fMax(
8:nDeriv(
9:fnInt(
0:Solver...
```

اضغط المفتاح MATH، اختر الخيار الخاص بدالة NDERIV. أدخل الدالة (إما بصورة صريحة Explicitly أو بالتوجه نحو خيار VARS وإيجاد قائمة متغيرات y واختيار (Y_1).

```
nDeriv(Y1,X,1.5)
          2.750001
```

أما المعامل الثاني، فيمثل اسم المتغير – غير المعتمد Independent Variable، وسيكون في هذه الحالة X. أخيرا، أدخل النقطة التي تريد المشتقة عندها، ثم اضغط ENTER.

في هذه النقطة سينشأ سؤالان بصورة طبيعية هما : كيف ستجد الآلة الحاسبة المشتقة العددية ؟ ولماذا تكون النتيجة غير دقيقة في هذه الحالة ؟



إن التخطيط الرسومي أعلاه، يظهر دالة عامة (ذات أسلوب جيد Well-Behaved) هي $y=f(x)$، وإن المماس المرسوم عند النقطة $p(x_0,f(x_0))$. وإذا انتقلنا مسافة قصيرة قدرها (h) بعيدا عن x_0 في كلا الاتجاهين على المحور السيني، سنحصل على نقطتين قيمتهما x_0-h و x_0+h. إن المماثلين لهاتين النقطتين على المنحنى هي $Q(x_0-h,f(x_0-h))$ و $R(x_0+h, f(x_0+h))$.

إذا كانت قيمة h صغيرة لحد كاف، فإن القاطع Secant خلال النقطتين Q,R سيكون عمليا موازيا للماس المار خلال النقطة p.

إن احتساب ميل قطعة المستقيم $\overline{QR}$ سيعطينا تقريب دقيق الميل المماس خلال النقطة P.

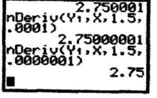
ميل قطعة المستقيم $\overline{QR} = \dfrac{f(x_o+h)-f(x_o-h)}{2h}$

إن هذه القيمة يطلق عليها المشتقة العددية للدالة $y=f(x)$ عند النقطة $x=x_0$. وهي الطريقة التي تستخدم بواسطة الآلات الحاسبة–الرسومية لإيجاد قيمة المشتقة لدالة في نقطة محددة.

إن قيمة المشتقة العددية تعتمد على القيمة المستخدمة للمتغير h. إن القيمة الافتراضية default للمتغير h في معظم الآلات الحاسبة – الرسومية هي 0.001. وتعطي هذه القيمة نتائج دقيقة بشكل مدهش.

```
nDeriv(Y1,X,1.5)
          2.750001
nDeriv(Y1,X,1.5,
0.001)
          2.750001
```

في مرحلة سابقة، عندما وجدنا NDERIV (الظاهرة على الجهة اليسرى)، استخدمت الآلة الحاسبة – بصورة آلية قيمة h = 0.001 ولغرض التحكم بهذه القيمة، أدخل مدخلا رابعا لدالة



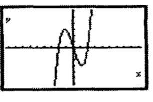
NDERIV. إن إدخال قيمة h في النهاية، كما يظهر في الجهة اليسرى. عند استخدام قيمة صغيرة جدا للمتغير h، فإن المشتقة العددية ستكون مساوية للمشتقة الحقيقية.

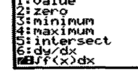
```
nDeriv(X²,X,2)
              4
```

استنادا إلى الدالة والنقطة المستخدمة، فإن قيمة h=0.001 قد تعطي المشتقة بصورة دقيقة، كما يظهر في الشكل المجاور.

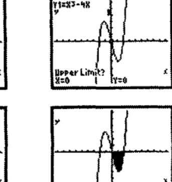
التكاملات المحددة Definite Integrals

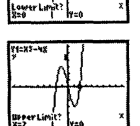
سنقوم بإعادة رسم المخطط الرسومي للمعادلة $y=x^3-4x$ ويمكن استخدام الآلة الحاسبة – الرسومية لتقريب التكاملات المحددة فعلى سبيل المثال، في هذه الحالة افترض بأننا نريد تقريب $\int_0^2 (x^3-4x)dx$ CALC اضغط المفتاح TRACE لإظهار لوحة العرض الموجودة على الجهة اليسرى. وباختيار الخيار الأخير سوف يثبت خاصية التكامل العددي Numerical Integration.





إن التعاقب الآتي للخيارات سيظهر على لوحة العرض. وبتحريك المؤشرة إلى المحددين المطلوبين (الأدنى والأعلى) وبالضغط على مفتاح ENTER سوف تنتج عنه النتيجة المطلوبة، كما تظهر في مجموعة الأشكال الآتية :





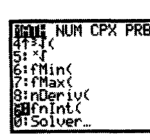
من وجهة نظر علم أصول التدريس، فإن لوحات العرض الأخيرة تؤكد على نتيجتين نحاول أن نركز جهودنا عليها في حساب التفاضل والتكامل:

1- إن التفسير الهندسي للتكامل المحدد عبارة عن مساحة (والتي تم عرضها مظللة).

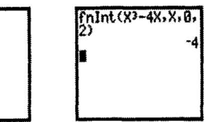
2- عندما يكون المنحنى أسفل المحور السيني فإن التكامل المحدد يكون سالب القيمة.

إن الطريقة البديلة لاحتساب التكامل المحدد لا تعتمد على رسم التخطيط الرسومي.

اضغط المفتاح MATH واختر الخيار الخاص بإيجاد التكامل المحدد (fnInt) أدخل الدالة، سواء بصورة صريحة أو بالتوجه نحو خيار VARS وإيجاد قائمة متغيرات y، واختيار y_1.



كما في المشتقة العددية، أدخل اسم المتغير ـ المستقل (X) ثم حدود التكامل. لاحظ كم ستكون النتائج المستحصلة دقيقة، اعتمادا على طبيعة الدالة في الفترة Interval.



الحواسيب Computers

باشرت مجموعة من المدارس، منذ عقد الستينات، باستخدام الحواسيب في المناهج الدراسية. ويعد قسم الرياضيات أول قسم يستخدم الحواسيب في معظم المدارس، لأن استخدامها كان مقتصرا في تلك الأيام على أنشطة البرمجة Programming فقط. وقد تعلم الطلبة استخدام اللغات البرمجية مثل: Fortran، Cobol، أو Basic، وفي الأيام الأخيرة بدأ الاهتمام باللغات: Pascal، C^+، C^+.

في البداية كانت تعطى مسائل رياضية للطلبة لغرض حلها باستخدام برمجيات بهذه اللغات. وقد صممت مساقات الفصول الدراسية، إلى حد كبير، للطلبة الذين يمتلكون مواهب وقدرات عالية. من أجل هذا أعرض كثير من الطلبة عن إدراج مادة برمجة الحاسوب في قائمة فصولهم الدراسية. وفي عقد الثمانينات والتسعينات، وبعد ظهور الحاسوب الشخصي Personal Computer، حصلت قفزة كبيرة في برمجة الحاسوب باتجاه استخدام البرمجيات Software. وبدأت

أقسام أخرى (غير قسم الرياضيات) باستخدام برمجيات معالجة النصوص Word Processing، وبرامج الصحائف الممتدة Spread sheets. وقد نجم عن هذا التوجه الجديد، إقبال متزايد للطلبة على استخدام الحواسيب في المدارس الثانوية.

من أجل ها دعنا نعالج جملة من جوانب استخدام الحاسوب في برامج التدريس.

برنامج مثل درس خصوصي

As Tutorial Program

يمكن إنتاج وتطوير برمجيات الحاسوب التي تجهز الطلبة بمفردات متنوعة من المنهج الدراسي للمدارس الثانوية، أو شراؤها من مواردها. وباستخدام هذه البرمجيات سيتعمق فهم الطلبة بمادة الجبر، والهندسة، وحساب المثلثات، إضافة إلى الحساب. يضاف إلى ذلك، فان الحاسوب يقوم بمهام مضافة إلى بيانات الإجابة الصحيحة، وإنشاء مسائل أخرى (أو يظهر الخطأ ويعيد المسألة ذاتها لمرات متعددة).

وهناك برنامج يحدد موارد الخطأ بدقة، أو يقدم اقتراحات للوصول إلى الإجابة الصحيحة استنادا إلى إجابة الطالب الخاطئة بالتحديد.

توجد عدة طرق تتيح استخدام الحاسوب كدرس خصوصي، أو التنقيب عن المعرفة، أو التمرين. ينبغي أن يكون البرنامج قابلا للتعديل ومرنا بحيث يمكن الاختيار في ضوء مستوى الصعوبة والتعقيد، عدد المسائل المطروحة، ومستوى السيطرة والتفوق Mastery Level. كما ينبغي أن يكون البرنامج ذكيا، بحيث يتحسس المواطن التي يعاني الطالب من صعوباتها في ضوء عملية محددة، أو مفهوم، فيعمد بصورة آلية إلى التفرع باتجاه درس خصوصي مع مجموعة أخرى من المسائل.

ويساعد البرنامج الذي يحتوي على أدوات لإدارة الصف، وتسهيلات للاحتفاظ بالبيانات وخزنها، في تخطيط مفردات الدروس، ومتابعة مسارات تقدم الطلبة. إن إحدى العقبات التي يعاني منها المعلم في صف واسع، هي عدم قدرته على توفير مناخ مناسب للتدريس الفردي، وحتى عندما يكون معه من يعاونه، أو يشاركه بالمهمة معلم آخر. بصورة عامة يحتاج الطلبة الضعفاء إلى اهتمام ورعاية خاصة. لذا فإن حاسوبا انتقيت برمجياته بعناية سيساعد هؤلاء الطلبة على تجاوز مواطن الفشل لديهم، والتي يعرفونها حق المعرفة، دون الاعتماد على موارد إضافية.

إن الإدعاء الذي يذهب إلى تأسيس مبدأ أن الحاسوب: غير مخيف، وليس خطرا، وليس مكاناً لإدانة هو إدعاء صحيح لا غبار عليه شريطة أن يتضمن البرنامج تقوية إيجابية وتعميق ملموس لفهم الطلبة.

صفحات الويب كعنصر مساعد للتدريس

Web Pages on an aid to Instruction

إن تقنية الاتصالات الحديثة جعلت من عملية تبادل المعلومات والمشاركة فيها أمرا ممكنا وبمتناول الجميع. وتعد صفحات الويب Web Pages أحد التطبيقات المستحدثة والمبتكرة لهذه التقنية. وكلما نحتاجه للارتباط بموارد مباشرة Online-Resources هو خط هاتفي أو خط من نوع آخر متقدم، وحاسوب وبطاقة Modem (أو بطاقة Ethernet)، وبرنامج اتصالات. تمتلك صفحات الويب قدرة كافية لتوفير خدمة مناسبة لجميع الأعمال، تتضمن المعلمين بالإضافة إلى الطلبة، وبمسائل محددة.

يستطيع المعلمون المشاركة في المعلومات حول الاقتراحات الخاصة بكيفية تعليم موضوع محددة بكفاءة أكبر، أو ما هو الأسلوب الذي ينبغي اعتباره عند حل مسألة ما. ومن خلال بعض صفحات الويب، يستطيع الطلبة التواصل مع معلميهم وغيرهم من الطلبة. وتوجد الآن مدارس تزود الطلبة بكتب منهجية، مباشرة على الشبكة، كما أن لكل طالب أو طالبة نسخة شخصية.

لقد فتحت شبكة الإنترنت كما هائلا من الإمكانيات لاستخدام الحاسوب. وبالنسبة لوجهة نظرنا، فإننا نرى بأن إدراج الإمكانيات في هذا الموضع سيؤدي إلى تغيير هذا الكتاب عتيق الطراز قبل صدوره !

إن فرص تحسين التدريس والارتقاء به، وضمان فهم أعمق للمفاهيم الرياضية باستخدام شبكة الإنترنت يتحدد فقط بالقدرة الإبداعية لدى المعلم، ويبدو بأن المستقبل لا حدود له !.

الحواسيب مورد للأنشطة الترفيهية

Computers As Source for Recreational Activities

تتوفر مجموعة كبيرة من البرمجيات التي تتيح للطالب فرصة ممارسة اللعب مع الحاسوب. وسيكون للألعاب التي يتم انتقاءها بعناية تأثير ملموس في تعزيز التطور في مهارات الطلبة في المنطق. كذلك ينبغي على المعلم اختيار مستوى وتعقيد اللعبة في ضوء هوية الطالب المستخدم. إن اللعبة التي تخلو من جو التحدي أو تحتوي على نزر قليل منه قد تصيب الطالب بالملل والضجر أو تنشئ لديه مهارات تافهة لا فائدة منها.

من جهة أخرى، فإن البرنامج الذي ينشئ لعبة تتجاوز

مستوى الطالب الذي ينوي استخدامها قد ينشب عنها إحباط وخيبة أمل تجعل الطالب يعرض ويشيح بوجهه عن الحاسوب.

إن الطلبة الذين سيتم تحفيزهم بطريقة مناسبة ومدروسة بعناية، قد يلجئون إلى إنشاء ألعابهم الخاصة، وسيكون هذا النشاط قد حقق لهم خبرة ذات أهمية بالغة.

إدارة الصف بالحواسيب
Classroom Management with Computers

عندما يطلب منك تعليم طلبة الصف بواسطة الحواسيب، فسوف تقابلك قرارات إدارة الصف التي تختلف عن تلك التي تسود صفوف الرياضيات التقليدية. إن بعض الأمور التي ينبغي أن تأخذها بعين الاعتبار هي :

1. كيفية تحديد وقت للممارسة لكل طالب.
2. كيف تضمن وقتا للطباعة لكل طالب.
3. ماذا ستفعل مع الطلبة الذين لا يعملون مع الحاسوب.
4. ماذا ستفعل مع الذين ينتهون مبكرا.
5. كيف ستقلل من عملية استنساخ الملفات.
6. أسلوب حماية كلمة العبور Password.
7. كيف ستحول دون حدوث خلل في عتاد الحاسوب Hardware، والبرمجيات، والبيانات؟.

إن النسبة الأمثل لعدد الطلبة إلى عدد الحواسيب المتاحة لاستخداماتهم ينبغي أن تكون 1:1. ونظرا لأن معظمنا لا يعلم في المدينة الفاضلة UTOPIA، ينبغي أن تتحمل (شخصياً) أعباء حل العقبات التي تنشب عن تواجد عدد كبير من الطلبة مقارنة بعدد الحواسيب الموجودة داخل الصف. ويستطيع الطلبة تعلم الكثير من زملائهم ونظرائهم عندما يراقبونهم وهم يعملون على الحاسوب لبضعة دقائق. فيتعلمون ما ينبغي عليهم فعله. وما ينبغي عليهم التوقف عن فعله. وسيساعدك كثيرا وجود مؤقت مثل الذي يستخدم في المطبخ Kitchen-type على مكتبك الشخصي، واعمد إلى تقسيم الوقت المتاح إلى أقسام متساوية. على أن يكون كل قسم كافيا للطالب بالحصول على دور أو دورين في العمل على الحاسوب، واعتمادا على موقفك الشخصي، وعلى اليوم المخصص لذلك.

قم بإعداد المؤقت ليعينك على ضبط وإدارة (حفظ الوقت وادخاره save and switch time) سوف تكون مشغولاً جدا بمساعدة الطلبة لتجاوز المشاكل، ولولا استخدام المؤقت، سيكون من الصعب جدا عليك الاستمرار بمراقبة الوقت المستغرق لكل دور من الأدوار. إن الطلبة لا يعملون فعليا على الحاسوب. أما أن يتركوا لإجراء عم تمهيدي لعودتهم المرتقبة للعمل بالحاسوب أو يطلب منهم مشاهدة زملاءهم يميزون بين الجوانب الجيدة والسيئة من عملهم.

ومن النادر تخصيص جهاز طابعة لكل حاسوب داخل الصف. ولزيادة طاقة الطباعة دون نفقات باهظة أو إضافية، أطلب من الاستشاري شراء صناديق مفتاح إدارة الطباعة Printer Switch Box والتي تتيح ربط طابعة واحدة مع حاسوبين، أو ثلاثة، أو أربعة حواسيب في آن واحد. ومع ذلك، ورغم اعتماد مثل هذا الأسلوب لتذليل مشاكل الطباعة، ينبغي على الطلبة الحصول على أذن شخصي منك لاستخدام الطابعة، خشية أن يؤدي عملهم (بدون ترخيص) إلى قطع مهمة الطباعة للغير في منتصفها، ولكن يمكن لهم أن يوقفوا بصورة مؤقتة Pause عملية الطباعة لتعديل ملف آخر.

بعض الأمثلة على استخدام الحاسوب في تعزيز التدريس
Some Examples Of Using Computer To Enhance Instruction

في عام 1989 أصدر المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات (NCTM) معايير المناهج الدراسية والتقويم للرياضيات المدرسية Curriculum And Evaluation Standards For School Mathematics والتي دعت إلى تغييرات جذرية في طرق تعليم الرياضيات. ففي قطاع تعليم الهندسة، دعت "المعايير" إلى تقليل التأكيد على عرض الهندسة كنظام استنتاجي متكامل بالإضافة إلى تقليل التأكيد على البراهين ذات العمودين Two columns proofs. بالمقابل دعت المعايير إلى زيادة في الاستكشاف المفتوح والحدس، وزيادة الاهتمام بموضوعات الهندسة التحويلية Transformational Geometry. وخلال دعوتها إلى التغيير، أدركت المعايير طبيعة التأثيرات التي ستحملها التقنية وأدواتها المستحدثة على طريق تعلم الرياضيات. لقد وصفت المعايير الاستخدامات المفيدة للتقنية، مثل تلك التي ستحرر الطلبة من إضاعة الوقت أو استنفاده، والمهام المبتذلة والعادية، وستوفر لهم الوقت والوسائل لرؤية واستكشاف العلاقات المهمة والمفيدة.

تبرز برمجيات الهندسة من بين العدد الذي يصعب إحصاؤه من البرمجيات الرياضية التي كتبت وأعدت في هذا المجال. بصورة عامة، تعد مادة الهندسة من أكثر المواضيع التي يصعب تعليمها، لكن البرمجيات قد ساهمت في تخفيف الأعباء وزيادة البهجة والمتعة بتعليم الهندسة. وسنحاول

استكشاف أحد هذه البرمجيات، وهو برنامج The Geometer's Sketchpad لنرى كيف يمكن لهذا البرنامج أن يسهم في تعزيز تعليم مادة الهندسة.

طرح برنامج The Geometer's Sketchpad للمرة الأولى عام 1991، وقد ارتكز إلى فكرة ضرورة استخدام الطلبة للحاسوب كأداة تعلمية. إن إتاحة الفرصة للطلبة بوضع البنى التي يباشرون إنشاءها في حالة حركة، فإن برنامج Sketchpad سيلغي الحاجة إلى إعادة التجربة لأكثر من مرة قبل إعداد التصميم وتعميمه Generalization . ولا شك بأن الأكثر أهمية هو أن Sketchpad يجعل من عملية الاستكشاف الهندسي أكثر تفاعلا وجذبا لمستخدمه.

إن أسلوب The Geometer's Sketchpad متساوق مع البحث الذي أجراه كل من التربويين الرياضيين الألمانيين بير فان هيل Pierre Van Hiele ودينا فان هيل - جيلدوف Dina van Hiele-Geldof. ومن الملاحظات التي استقاها هذين الباحثين من الصفوف الدراسية، بات واضحا لآل هيل Van Hiele بأن الطلبة يمرون خلال سلسلة من مستويات التفكير الهندسي: كالتصور المرئي، والتحليل، والاستدلال العامي، والاستدلال الصوري، أو الصرامة.

إن نصوص الهندسة المعيارية تتوقع من الطلبة توظيف الاستدلال الصوري منذ البداية. دون أن يبذل ما يكفي من جهود لتمكين الطلبة على التخيل أو تشجيعهم على إنشاء حدوس وتخمينات. إن الهدف الأساسي لبرنامج The Geometer's Sketchpad يكمن في توجيه الطلبة خلال المستويات الثلاثة الأولى من التعلم، وتشجيع عملية الكشف التي تعكس، بصورة أكثر وضوحا، كيف اخترعت الرياضيات : يتخيل الرياضي أولا، ويحلل المسألة ثانيا، ثم يباشر حدوسا قبل أن يحاول إنشاء البراهين.

تم تطوير برنامج The Geometer's Sketchpad كجزء من مشروع الهندسة المرئية (Visual Geometry Project VGP)، وقد تم تمويله بواسطة مؤسسة تمويل العلوم الوطنية وتحت إشراف يوجين كلوتز Eugene Klotz في كلية سوارثمور Swarthmore College ودوريس شاتشنايدر Doris Schattschneider في كلية مورافيان Moravian College في بنسلفانيا. التحق مبدع برنامج Sketchpad بمشروع (VGP) المبرمج نيقولاس ياكفيج Nicholas Jackiw في صيف عام 1987. وقد بدأ بعمل برمجي - جاد خلال السنة التي تلت هذا التاريخ. تم تطوير برنامج Sketchpad في بيئة أكاديمية مفتوحة، حيث من خلالها، حاول مجموعة من المعلمين، وشرائح أخرى من المستخدمين اختبار الإصدارات الابتدائية للبرنامج وتزويد تصميمه الأولي بمدخلات إضافية. قدم ياكفيج إلى العمل من Key Curriculum Press عام 1990 وانتج النسخة الابتدائية Beta Version للبرنامج والتي بوشر اختبارها في الصفوف المدرسية. ثم بدأت مجموعة من 30 مدرسة بالنمو إلى مجموعة تتألف من أكثر من 50 موقعا بعد أن ذاع خبر البرنامج ووصل إلى أسماع الجماهير الكثير من خصائصه، أو شاهدوا عروضا تقديمية لبعض قابلياته في المؤتمرات أو الندوات العلمية. إن طبيعة الانفتاح الذي ارتكزت إليه عملية إنتاج وتطوير هذا البرنامج قد تولد عنها حماسة مدهشة لدى الجميع نحو هذا البرنامج. ومع طرح إصدارته الأولى عام 1991، هرع مئات من المعلمين، والطلبة، وكثير من المولعين بالهندسة إلى استخدامه، وأصبح من أكثر البرمجيات الرياضية التي يدور الحديث حولها، ومن أكثر الأجزاء التي لبثت في ذاكرتنا.

وحين شرع الطلبة والمعلمون باستخدام Sketchpad للمرة الأولى، التمست Key Curriculum Press موارد حول أنواع الأنشطة التي يمكن استخدامها بصورة أكثر فاعلية داخل حلقة الدرس. وبتمويل من مؤسسة العلوم الوطنية قام برنامج بحوث ابتكار الأعمال الصغيرة Small Business Innovation Research بتمكين مطوري المناهج من زيارة الصفوف، ومقابلة المعلمين والطلبة. وبهذه الطريقة، استطاع هؤلاء مراقبة أكثر أنواع الأنشطة التي يمكن أن تكون ذات فائدة ملموسة. وقد صدر خطابان مهمان من خلال هذا البحث والاستقصاء:

1- يمكن الاستفادة من القدرة التدريسية لبرنامج Sketchpad بصورة مثلى إذا تطلبت الأنشطة الأولية إنشاء بنى بسيطة فقط. ولقد برهنت الخبرة الميدانية على أن الطلبة يستطيعون استخدام البرنامج في إنشاء أشكال بتعقيد اختياري، ولكن عند استخدام الطلبة المبتدئين للبرنامج فإنهم يستطيعون فهم المفاهيم، بصورة أفضل، وبالخصوص عندما يوجه تفكيرهم نحو العلاقات وليس باتجاه البنى والإنشاءات.

2- يمتلك برنامج Sketchpad القدرة على تكامل مجموعة من المفردات والموضوعات الهندسية بطريقة تعجز عنها الكتب المنهجية التقليدية. فعلى سبيل المثال، عند البحث الأولي فيه عن المثلث، يستطيع الطلبة بحث العلاقات بين المستقيم، والزاوية، والمساحة، والتحويلات، والتناظر.

لقد صمم Geometer's Sketchpad بصورة أولية للاستخدام في دروس الهندسة بالمدارس الثانوية. وقد أظهرت الاختبارات، رغم ذلك، بأن سهولة استخدامه يجعل استخدام الطلبة الأحدث سنا لهذا البرنامج ناجحة ومثمرة، كما أن القدرة الكبيرة لميزاته التقنية العالية تجعل منه أكثر جاذبية لمعلمي الرياضيات بمستوى الكليات، وفصول دراسة تعليم الرياضيات. إن ميزات هندسة الإحداثيات السائدة في Sketchpad تجعل منه أداة مهمة في تحري مبادئ عدة في السنة الأولى أو الثانية من مناهج مادة الجبر.

يمكن استخدام Sketchpad في دراسة وبحث جميع محتويات المنهج الدراسي الثانوي لمادة الهندسة، باستثناء بضعة مفردات تتعلق بالأجسام ثلاثية الأبعاد مثل الحجوم. وإن المساقات الدراسية التي تستخدم الأسلوب الاستقرائي Inductive Approach تستطيع استخدام Sketchpad افتراضيا، كل يوم، لاكتشاف خصائص الهندسة. ويستطيع الطلبة. في المساقات الدراسية التي تركز على الأسلوب الاستدلالي بعمق، استخدام هذا البرنامج لاكتشاف النظريات أو الفرضيات التي يريدون برهنتها، أو لتأكيد وتطوير فهم النظريات بعد إكمال براهينها. وحتى في فصول الاستدلال والاستنتاج، قد يصبح Sketchpad أداة يومية، ولكن شريطة أن يستخدم باعتدال. إنه يمثل أحد فرص التعلم والتي ينبغي عرضها على الطلبة أثناء تعلم مادة الرياضيات. إن أي أسلوب منفرد من خبرة التعلم قد يصبح روتينيا ويورث صاحبه الملل والضجر إذا استخدم بكثرة إلى الحد الذي يلغي الخبرات الأخرى.

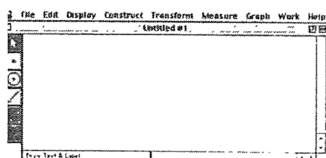
استخدام Geometer's sketchpad

لاشك بأن أمثل استخدام لحاسوب واحد يكون على أساس اختيار مجاميع صغيرة من الطلبة التي تأخذ دورها، على التوالي. باستخدام الحاسوب. تستطيع كل مجموعة أن تبحث أو تؤكد الحدوس والتخمينات التي تنشأ بين أفرادها عند عملهم على مكاتبهم أو المناضد باستخدام أدوات الهندسة المعيارية كالفرجار والمسطرة العدلة. وبهذه الطريقة، تمتلك كل مجموعة فرصة واحدة أثناء فترة الدرس لاستخدام الحاسوب، ولفترة قصيرة من الوقت. من جهة أخرى، يمكنك أن تمنح كل مجموعة مدة يوم كامل لأجراء بحوثهم وتحرياتهم على الحاسوب بينما تنشغل بقية المجاميع تحريات مشابهة أو مختلفة على مكاتبهم الشخصية. إن حاسوبا وحيداً ودون جهاز إسقاط العلوي الضوئي، أو مرقاب بشاشة بحجم كبير سيكون محدود الاستخدام كأداة عرض وتوضيح للطلبة. ورغم وجود إمكانية كبيرة في تحديد خيارات العرض وتثبيتها فيSketchpad وبأي حجم أو بأي أسلوب نشاء، سيبقى الصف الكبير يعاني من صعوبة رواية وتمييز ما يظهر على لوحة عرض الحاسوب الصغيرة.

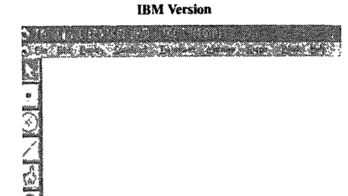
تتوفر تشكيلة منوعة من المعدات والأدوات التي يمكن ربطها بالحواسيب بحيث يمكن عرض مخرجات لوحة العرض باستخدام جهاز الإسقاط العلوي الضوئي. لقد صمم Geometer's Sketchpad لكي يعمل بصورة جيدة على عارضات أجهزة الإسقاط الضوئي. وبواسطة عارضة جهاز الإسقاط الضوئي، تستطيع أنت وطلبتك القيام بإعداد برامج إيضاحية، أو يقوم الطلبة بإعداد عروض تصميمية Presentations حول الاكتشافات التي حققوها باستخدام الحاسوب أو أدوات أخرى. كما تستطيع أنت أو أحد طلبتك قيادة عملية بحث وتقصي، وطرح مجموعة أسئلة على الطلبة مثل (ماذا علي أن أحاول لاحقا؟ في أي مكان علي أن أنشئ مقطعا؟ أي شيء من الأشياء التي ينبغي أن أفكر بها مليا؟ ماذا لاحظت عندما بدأت بتحريك هذه النقطة؟) لقد أصبح برنامج Sketchpad سبورة ديناميكية تستطيع أنت وطلبتك أن ترسم عليها، بأسلوب أكثر دقة، أشكال بالغة التعقيد، بحيث يمكن تحويلها وتشويهها بطرائق لا نهاية لها دون إلغاء الشكل أو إعادة رسمه. إن أفضل طريقة لتجربة الأعاجيب التي يمتاز بها Sketchpad ستكون عن طريق محاولة العمل عليه. وسنقوم بعرض بضعة تطبيقات لهذا البرنامج الآن.

إذا كان برنامج Geometer's Sketchpad مثبتا على حاسوبك الشخصي، ابدأ بتشغيله وستظهر أمامك إحدى اللوحات الآتية. وتظهر الآن أمامك اللوحات الخاصة بكل من حواسيب IBM و Macintosh. وكما تلاحظ فإن اللوحتين متقاربتان إلى حد كبير، وإن البرنامج يعمل بنفس الطريقة على هاتين المنصتين البرمجية Platforms.

Macintosh Version



IBM Version



عندما يظهر برنامج Sketchpad على لوحة العرض، ستلاحظ الأدوات المتوفرة فيه على الجهة اليسرى من النافذة، وتظهر أسماء وعناوين هذه الأدوات في الشكل الآتي.

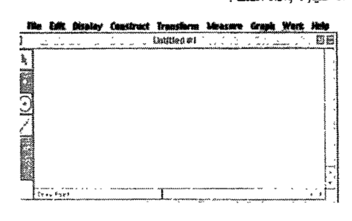
File Edit Display Construct Transform

Point Tool
Circle (Compass) Tool
Line Tool
Text Tool
Help Tool

- إن أداة سهم الاختيار selection Arrow Tool تتيح لك اختيار الأشكال الهندسية وتحريكها إذا احتجت إلى ذلك.
- إن أداة النقطة Point Tool تتيح لك رسم نقاط مختلفة.
- إن أداة الدائرة (الفرجار) Circle (Compass) tool تتيح لك رسم الدوائر.
- إن أداة النص Text Tool تتيح لك كتابة تسمية للنقاط أو المستقيمات كما توفر لك إمكانية كتابة نصوص مختلفة.
- إن أداة المساعدة Help Tool توفر لك فرصة مناسبة للحصول على المعلومات الخاصة بأحد الكائنات الرسومية الموجودة.

نلاحظ في المخطط الرسومي الآتي، بأنه قد تم اختيار أداة النقطة. وتستطيع أن تؤكد ذلك لأن الصندوق يبين بأن أداة النقطة قد تم تأشيرها. وعند أسفل لوحة العرض في الجزء الأدنى من الزاوية اليسرى يبين صندوق أداة مؤشر الحالة Tool Status Box أي من الأدوات قيد الاستخدام بالوقت الحالي.

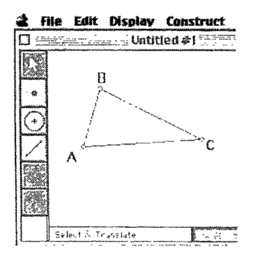
ومن الضروري الرجوع إلى صندوق أداة مؤشر الحالة لغرض التأكد من قيام Sketchpad بتنفيذ المهام التي تريدها منه. إن أكثر الأدوات استخداما في هذا البرنامج هي أداة سهم الاختيار، وأداة النقطة.



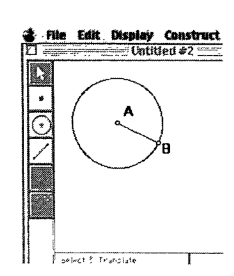
حاول تجربة هذه الرسوم التخطيطية
Try These Sketches

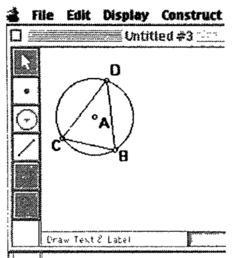
قبل اختبار الخصائص الديناميكية لبرنامج Sketchpad، حاول أن ترسم الرسوم التخطيطية الأربعة الآتية. قد تحتاج إلى شيء من التجربة عن طريق اختيار بعض الأشياء Objects ثم التوجه نحو قائمة إنشاء Construct Menu في الجزء العلوي.

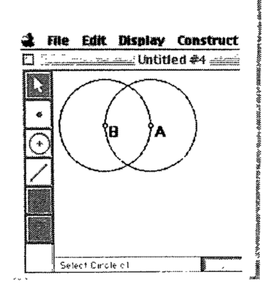
لا تقم بإلغاء الرسوم التخطيطية، نظرا لأنك ستقوم بإعادة استخدامهم بعد ذلك.



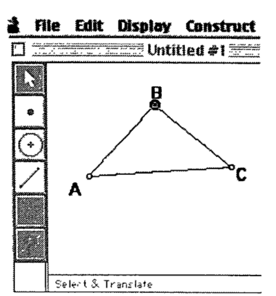
تستطيع اختبار وممارسة الجوانب الديناميكية في برنامج Sketchpad عن طريق استخدام أداة سهم الاختيار. حاول تجربتها باختيار المخطط الرسومي للمثلث الذي قمت برسمه في Untitled#1. أنقر على النقطة B، ومع إبقاء إصبعك بحالة ضغط على الفأرة، قم بتحريكه إلى اليمين أو إلى اليسار.

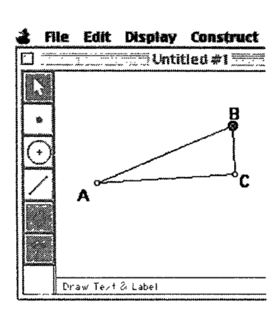


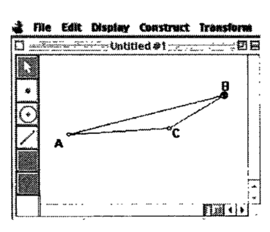




ستلاحظ حصول تغيير في موقع المثلث، كما يظهر في الأشكال الآتية. وفي كل موضع من المواضع الجديدة لم يتغير طول قطعة المستقيم $\overline{AC}$ ، بينما عانت كل من قطعتي المستقيمين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ زيادة أو نقصان في أطوالها.

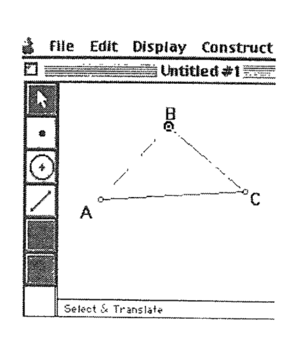


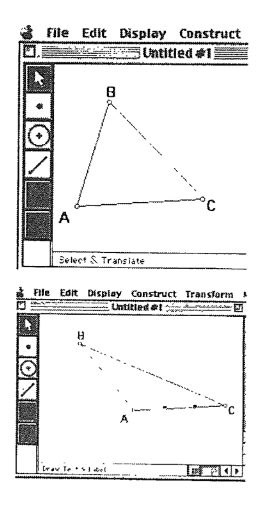




يمكن تغيير مواقع الأشكال الهندسية في برنامج Sketchpad، بطريقة أخرى، عن طريق سحبه على قطعة. استخدم الفأرة للنقر على قطعة المستقيم $\overline{AC}$ في المثلث ΔABC ، وقم بتحريك الفأرة في المنطقة القريبة. وعندما تقوم أخيرا بإطلاق

الفأرة، ستكون قطعة المستقيم $\overline{AC}$ في موقع آخر. لم يحصل أي تغيير في طولها بينما تغيرت أطوال قطعتي المستقيمين الآخرين، وقياسات زوايا المثلث أيضا.





يظهر في الجدول الآتي ملخصا بالبنى والإنشاءات التي قد ترغب في عملها باستخدام برنامج **Sketchpad**.

الإيعاز	ماذا عليك أن تختار؟	ماذا سينشئ؟
نقطة على شئ	واحد أو أكثر من المقاطع، أو الخطوط المستقيمة، أو الأشعة، أو الدوائر.	نقطة اختيرت بصورة عشوائية على الشيء / الأشياء.
نقطة في تقاطع	شيئان مستقيمان، دائرتان، أو شئ مستقيم ودائرة.	نقطة حيث يتقاطع الشيئان.
نقطة في منتصف	واحد أو أكثر من المقاطع	نقاط منتصف المقاطع
مقطع/ شعاع/ خط مستقيم	نقطتان أو أكثر.	تعرف المقاطع، أو الأشعة، أو الخطوط المستقيمة بواسطة نقاط.
خط عمودي	نقطة واحدة، وشئ مستقيم واحد أو أكثر، أو شئ مستقيم واحد ونقطة واحدة أو عدة نقاط.	المستقيمات المارة بالنقاط المحددة متعامدة على الأشياء المستقيمة المحددة.
خط موازي	نقطة واحدة و شئ مستقيم واحد أو أكثر، أو شئ مستقيم واحد ونقطة واحدة أو عدة نقاط.	المستقيمات المارة بالنقاط المحددة موازية للأشياء المستقيمة المحددة.
منصف زاوية	ثلاثة نقاط مع اختيار رأس الزاوية بعدها.	الشعاع الذي ينصف الزاوية يعرف بالنقاط الثلاثة.
دائرة بواسطة المركز ونقطة	نقطتان مع اختيار مركز الدائرة أولا	الدائرة مع المركز المعطى تمر خلال النقطة المعرفة

الإيعاز	ماذا عليك أن تختار؟	ماذا سينشئ؟
دائرة بواسطة المركز ونصف القطر	نقطة ومقطع.	الدائرة مع المركز المعطى، وبنصف قطر يساوي طوله طول المقطع المعرف
قوس على دائرة	دائرة ونقطتان على محيطها، أو مركز الدائرة ونقطتان على محيطها.	يتم توسيع القوس على محيط الدائرة عكس اتجاه عقارب الساعة من النقطة الأولى إلى النقطة الثانية.
قوس خلال ثلاثة نقاط	ثلاث نقاط	يمر القوس من خلال النقاط الثلاث المعطاة
داخل متعدد الأضلاع	ثلاثة نقاط أو أكثر	يتم تعريف داخل متعدد الأضلاع باستخدام النقاط المعطاة رؤوسا له
داخل الدائرة	دائرة واحدة أو أكثر	داخل الدائرة
داخل القطاع	قوس واحد أو أكثر	داخل قطاع القوس
داخل مقطع القوس	قوس واحد أو أكثر	داخل مقطع القوس
محل هندسي	شئ هندسي واحد ونقطة واحدة أنشئت لتستقر على المسار	المحل الهندسي شئ ما

قبل الاستمرار، قد ترغب في التمرين على استخدام الميزات الديناميكية المتاحة في برنامج Sketchpad. ونورد في هذا المقام بعضا من الطرق المفيدة، والتي تستطيع التمرن عليها في تغيير الشكل الهندسي بصورة ديناميكية.

1- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled #1، والذي قمت بإعداده للمثلث ABC. قم بتحريك المثلث جميعا دون إحداث تغيير في أطوال أضلاعه أو قياس زواياه.
2- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled #2 للدائرة الأولى، مع إبقاء المركز A في محله، زد من طول نصف القطر $\overline{AB}$ أو أنقصه.
3- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled#2 للدائرة الأولى، وإبقاء النقطة B في نفس الموضع، زد من طول نصف القطر $\overline{AB}$ أو انقصه.
4- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled#3 للدائرة الثانية، ودون إحداث تغيير في نصف قطر الدائرة، قم بتحريك النقطة B بحيث تصبح الزاوية $\angle BCD$ منفرجة.
5- باستخدام رسمك التخطيطي Untitled#3 للدائرة الثانية، ودون إحداث تغيير في نصف قطر الدائرة، قم بتحريك الزاوية $\angle ABC$ بحيث تصبح زاوية قائمة.
6- باستخدام رسمك التخطيطي لزوج الدوائر، قم بتحريك النقطة A بعيدا عن النقطة B. ماذا سيحصل للدائرة عندما ستبعد النقطة A كثيرا عن النقطة B؟ وماذا سيحصل عندما تصبح النقطة A أكثر قربا من النقطة B؟

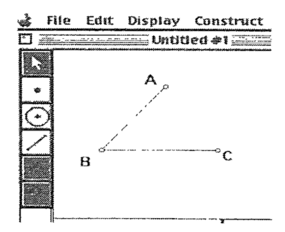
دعنا نركز اهتمامنا ببعض المشاريع التي قد تستخدمها مع طلبتك في المراحل المتوسطة أو الثانوية عند عملك على برنامج Sketchpad.

المشروع رقم واحد Project One

مجموع قياسات زوايا أي مثلث.

إجراء تمهيدي Preliminary: ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على رسم زاوية لكي يتمكنوا من قياسها.

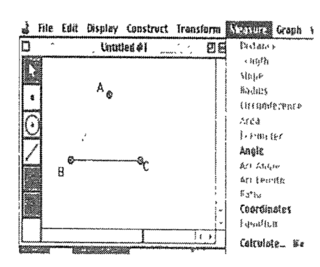
استخدام أدوات النقطة Point Tool وانقر على ثلاثة مواضع، لإنشاء ثلاثة نقاط. قد ترغب في تسمية هذه النقاط كما يظهر في الشكل الآتي وذلك عن طريق اختيار أدوات النص، والنقر على كل نقطة من النقاط الثلاثة. ولقياس الزاوية، ينبغي أن تستخدم اسما بثلاثة حروف. ولغرض إخبار Sketchpad بإيجاد قياس هذه الزاوية، أنقر أولا على النقطة A. أبق أحد أصابعك على مفتاح Shift وانقر على B، ثم على C بإصبع آخر.



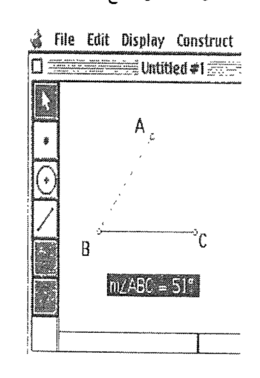
إن هذا التعاقب في طرقات المفاتيح يخبر الحاسوب بأنك تتعامل مع الزاوية ABC ∠.

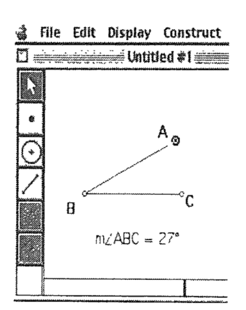
بالمقابل، يمكنك أن تنقر على النقطة C، ثم B، ثم A، لتنبه الحاسوب إلى أنك تتعامل مع الزاوية CBA∠. إذا لم تدخل الرأس كما في الإدخال الثاني، سيقوم الحاسوب بإيجاد قياس زاوية أخرى.

أنقر على خيار القياس وستشاهد لوحة العرض الآتية.

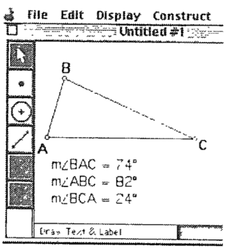


والآن أنقر على الزاوية. سيظهر قياس الزاوية كما موضح في الشكل الآتي. إن تحريك أحد الرؤوس سيؤدي إلى تغيير القياس. ولهذا السبب يعرف برنامج Sketchpad ببرنامج الهندسة الديناميكية (Dynamic Geometry لأنه يقيس التغيرات عندما تتحرك النقاط أو المقاطع.

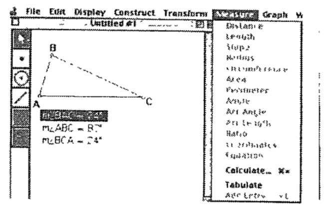




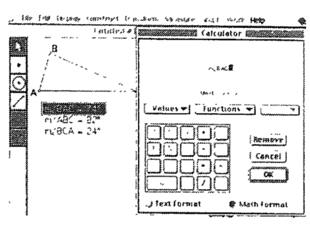
والآن نستطيع استخدام Sketchpad لإيجاد قياس زاوية، وسنقوم باكتشاف كيفية استخدامه لإيجاد مجموع قياسات زوايا أي مثلث. أرسم أي مثلث ABC ودع Sketchpad يحتسب قياس زواياه الثلاثة.



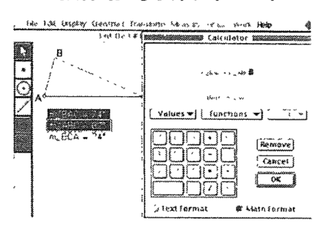
تستطيع جعل Sketchpad يقوم باحتساب مجموع قياسات الزوايا عن طريق إجراء ما يلي. اذهب إلى خيار القياس وانقر على أحسب Calculate.



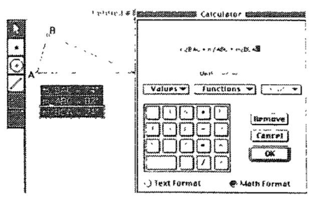
ستظهر آلة حاسبة على لوحة العرض. انقر فوق m<BAC في الرسم التخطيطي، ثم انقر مفتاح + على الآلة الحاسبة. سيظهر قياس الزاوية على لوحة العرض.



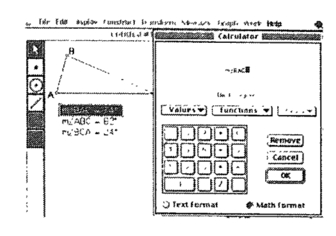
بعدها أنقر على m∠ABC في الرسم التخطيطي، +، و m∠BCA والآن اضغط على مفتاح OK الموجود على الآلة الحاسبة لاحتساب مجموع قياس هاتين الزاويتين.



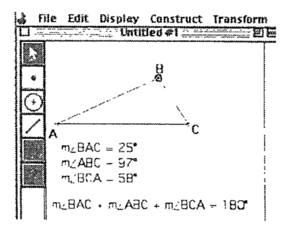
Calculators

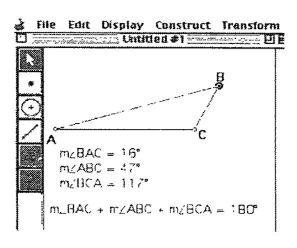


خلال الخطوة الأخيرة، سيظهر الحاسوب مجموع قياسات الزوايا الثلاثة.



إن تحريك أي من النقاط في المنطقة المجاورة سيولد قناعة لدى الطلبة بأنه رغم حصول تغير في قياسات الزاوية، فإن مجموعها سيبقى ثابتا على الدوام.





المشروع رقم اثنان Project Two

المستقيمات المتوسطة Medians الثلاثة في مثلث.

المستقيمات المتوسطة في مثلث Medians in A Triangle

إن المستقيم المتوسط في مثلث يصل بين قمة ونقطة منتصف الضلع المقابل. استطعت في التحريات السابقة، اكتشاف خصائص منصفات الزاوية، والمنصفات العمودية والارتفاع في المثلث. هل لديك اهتمام بإجراء تقدير تخميني حول المستقيمات المتوسطة؟ وسترى ماذا سيأتي، ولكن هناك المزيد من الأشياء الجديدة التي ستكتشفها عن هذه المستقيمات أيضا.

أعد رسما تخطيطيا واستقص Sketch and Investigate

1- ارسم المثلث ABC.

2- ثبت منصفات الأضلاع الثلاثة.

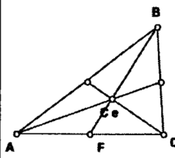
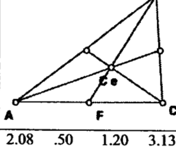
3- قم برسم اثنين من المستقيمات المتوسطة الثلاثة، والذي يصل كل منها قمة (رأس) من رؤوس المثلث بالضلع المقابل لها.

4- ارسم نقطة تقاطع المستقيمين المتوسطين.

5- ارسم المستقيم المتوسط الثالث.

إذا قد قمت برسم المستقيمات المتوسطة الثلاثة. اختر اثنين منها. ثم. من قائمة أنشئ، اختر نقطة في تقاطع

س1: ماذا تلاحظ بشأن المستقيم المتوسط الثالث ؟ اسحب أحد رؤوس المثلث لتأكيد أن هذا الحدس ينطبق على أي مثلث.

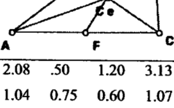



6- النقطة التي تتقاطع فيها المستقيمات المتوسطة تدعى المركز Centroid.أظهر تأشيرة النقطة وقم بتغييرها إلى Ce` بالنسبة للمركز.

7- قم بقياس المسافة بين B و Ce والمسافة بين Ce إلى نصف المنتصف F.

استخدم أداة النص وانقر مرة واحدة على النقطة لإظهار تسميتها. انقر مرتين على التسمية لغرض تغييرها. قبل قيامك بقياس نقطة المنتصف بين نقطتين، اختر النقطتين.

8- اسحب رؤوس المثلث ABCΔ وانظر إلى العلاقة الموجودة بين BCe و CeF.



2.08	.50	1.20	3.13	مسافة (B إلى Ce)
1.04	0.75	0.60	1.07	مسافة (Ce إلى F)

9- أعد جدولا لهذه القياسات.

10- قم بتغيير المثلث، وانقر نقرا مزدوجا على قيم الجدول لإضافة مدخلا جديدا.

اختر القياسين. ثم في قائمة قياس اختر جدولة.

11- استمر بتغيير المثلث، وإضافة مدخلات إلى جدولك حتى تستطيع رؤية العلاقة بين المسافتين BCe و CeF.

12- بناء على ما لاحظته حول جدول المدخلات، استخدم الآلة الحاسبة لإعداد صياغة مع القياسات التي بقيت ثابتة حتى عند تغيير القياسات.

س2: اكتب الصياغة التي احتسبتها في الخطوة 12.

انقر نقرا مزدوجا على القياسات لتنشيط الآلة الحاسبة. انقر مرة واحدة على القياس لإدخاله في الحسابات.

س3: اكتب حدسا أو تخمينا حول أسلوب تقسيم المركز لكل مستقيم متوسط بالمثلث.

13- ارسم بيانات الجدول. ينبغي أن تحصل على شكل رسومي بمجموع نقاط مستقيمة متساوية.

14- ارسم خطا بين أي نقطتين من نقاط البيانات، وقس الميل.

س4: وضح أهمية ميل المستقيم المار خلال نقاط البيانات.

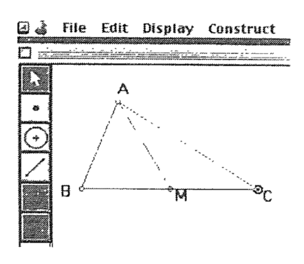
اختر الجدول. ثم في قائمة شكل تخطيطي اختر ارسم بيانات جدول وفي صندوق حوار نقاط الرسم انقر رسم (أنت لا تريد تغيير أي من البيانات)

استكشف المزيد Explore More

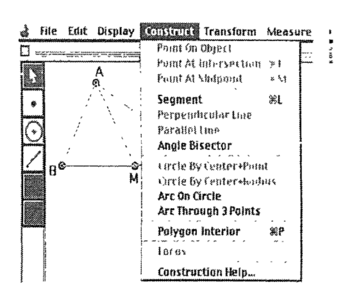
أعد مخططا لرسم مركز المثلث. واحتفظ بالمخطط للتحريات المستقبلية حول مراكز المثلث.

المشروع رقم ثلاثة Project Three

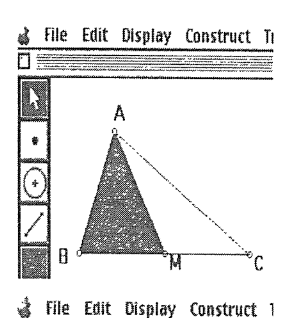
كيف يرتبط المستقيم المتوسط لمثلث بمساحة ذلك المثلث ومحيطه؟ أجعل الطلبة يرسمون أي مثلث ABC والمستقيم المتوسط $\overline{AM}$. اختر النقاط A، B و M.

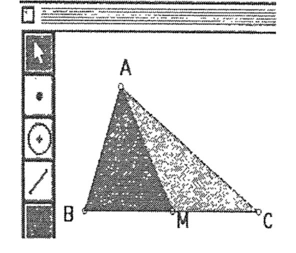


من قائمة أنشئ، اختر داخل متعدد الأضلاع. إن هذا الخيار سيظلل المثلث ABM. تستطيع تغيير اللون بالذهاب إلى قائمة عرض Display.

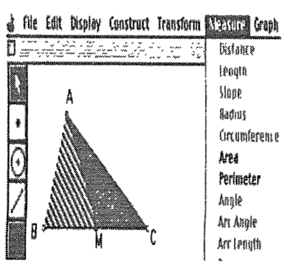


ستكون النتيجة مشابهة للتخطيط الرسومي الآتي.





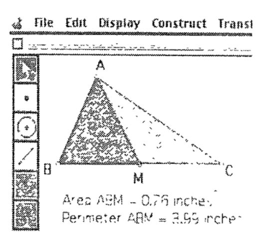
كرر هذه العملية على المثلث MAC وتأكد من اختلاف لون تظليل المثلث السابق. وتظهر النتائج النهائية في الشكل أعلاه.



والآن أنقر على أية نقطة داخل المثلث ABM. وإذا توجهت صوب قائمة قياس، ستلاحظ بأن الحاسوب يستطيع

الآن احتساب مساحة أو محيط المثلث ABM كما في الشكل العلوي.

بتأشير المثلث ABM، اختر المساحة أولا، ثم اختر المحيط. وسيقوم الحاسوب باحتساب مساحة المثلث ABM ومحيطه. ستبدو نافذتك مماثلة للشكل الآتي، مع الأعداد الصحيحة لمثلثك.



والآن حاول تكرار العملية عن طريق النقر في أي نقطة داخل المثلث MAC. سيظهر الحاسوب بأن المنطقتين متساويتان بالمساحة، مع وجود اختلاف في محيطهما. والآن اسحب النقطة A

File Edit Display Construct Trans

Area ABM = 0.76 inches²
Perimeter ABM = 3.99 inches
Area MAC = 0.76 inches²
Perimeter MAC = 4.91 inches

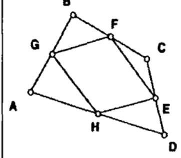
سيلاحظ الطلبة بوضوح، بأن سحب النقطة A (أو أية نقطة أخرى، أو مقطع) لن تؤثر على مساحة المثلثين MAC وABM أما محيطهما فيحصل تغيير فيهما.

يؤدي هذا المثال، في الفصل الدراسي للسنة الأولى بمادة الجبر، إلى تطبيقات عددية وجبرية. أما في المساق الدراسي للهندسة فينبغي تكليف الطلبة بالبرهنة على أنه عند رسم المستقيم المتوسط، فإن مساحة المثلثين الناتجة عنه ينبغي أن تكون متساوية.

المشروع الرابع Project Four

نقاط منتصف الشكل رباعي أضلاع.

نقاط المنتصف لشكل رباعي Midpoint Quadrilaterals



في هذا التحري والاستقصاء، سوف نقوم باكتشاف أمر مدهش حول الشكل رباعي الأضلاع الذي ينشأ عن ربط نقاط منتصف أضلاع شكل رباعي الأضلاع آخر.

أعد رسما تخطيطيا واستقص Sketch and Investigate

1- ارسم الشكل رباعي الأضلاع ABCD.

2- ارسم نقاط منتصف أضلاعه.

3- قم بوصل نقاط المنتصف لتكوين شكل رباعي الأضلاع جديد هو EFGH.

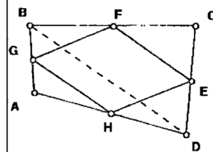
4- اسحب رؤوس متعدد الأضلاع الأولي ولاحظ الشكل رباعي الأضلاع الناتج عن نقاط المنتصف.

5- قس أطوال الأضلاع الأربعة في الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف.

6- قس مقدار ميل الأضلاع الأربعة في الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف.

إذا قمت باختيار الأضلاع الأربعة تستطيع رسم نقاط المنتصف الأربعة في نفس الوقت

س1: من أي نوع من الأشكال رباعية الأضلاع يقع الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف؟ وكيف تسند القياسات هذا الحدس؟



7- ارسم قطرا في الشكل الرباعي الأضلاع - الأصلي.
8- قس طول وميل القطر.
9- اسحب رؤوس الشكل الرباعي الأضلاع - الأصلي ولاحظ كيف أن طول القطر وميله ترتبط بأطوال وميول أضلاع الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف.

س2: يقسم القطر الشكل الرباعي الأضلاع - الأصلي إلى مثلثين. يحوي كل مثلث على منتصف مقطع لأضلاع الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف. استخدم هذه الحقيقة وما يتوفر لديك من معرفة حول الميل وطول القطر بكتابة مقالة قصيرة توضح فيها مبررات صحة الحدس الذي أعددته في السؤال الأول. استخدم ورقة منفصلة إذا دعت الحاجة لذلك.

استكشف المزيد Explore More

1- ارسم شكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف في الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف، ثم عاود رسم شكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف آخر. وكرر هذه العملية مرتان أو ثلاث مرات. صف أي نمط تلاحظه في هذه الأشكال.
2- ارسم داخل الشكل متعدد الأضلاع للشكل الرباعي الأضلاع والشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف العائد إليه. قس مساحتيهما. اتخذ حدسا تخمينيا حول هذه المساحات.
3- ما هو الشكل رباعي أضلاع نقاط منتصف شبه المنحرف؟ وشبه المنحرف متساوي الساقين؟ ومتوازي الأضلاع؟ والمعين؟ والمستطيل؟ والمربع؟ نسق وأشرح ما توصلت إليه.
4- تحت أية ظروف يكون الشكل رباعي أضلاع نقاط المنتصف مستطيلا؟ معينا؟ أو مربعا؟ حاول أن تتأكد من قدرتك على إنشاء أكثر أنواع هذا الشكل عمومية والذي يكون الشكل رباعي أضلاع نقاط منتصفه أحد هذه الأشكال.

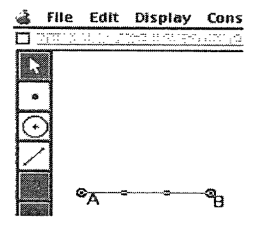
المشروع الخامس Project Five:

رسم مربع بواسطة ضلع من أضلاعه:

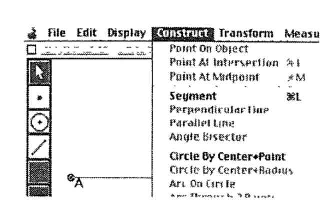
ارسم قطعة المستقيم $\overline{AB}$ ، كما يظهر في الشكل الآتي.

كيف تستطيع أن ترسم مربعا بواسطة قطعة المستقيم $\overline{AB}$ كضلع من أضلاعه؟ سيكون هذا المشروع مرتكزا للمشروع القادم.

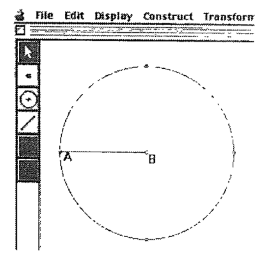
هناك أكثر من أسلوب للتعامل مع هذا المشروع. وفي كل منها، تشخص أمامنا الحاجة إلى رسم خطوط عمودية أو متوازية.



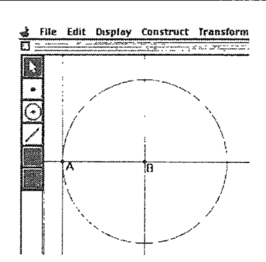
حاول تبني الأسلوب التالي. اختر النقطتين A، B. تحت قائمة إنشاء، أختر دائرة بواسطة مركز + نقطة.



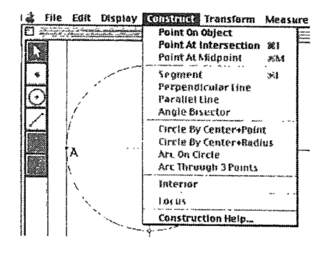
ستقوم هذه الدالة بإنشاء دائرة مركزها في النقطة B وطول نصف قطرها AB، كما يظهر في الشكل الآتي. إن الهدف يكمن في إنشاء خطين متعامدين في النقطة A، والنقطة B لتكوين زوايا قائمة. يمكنك تنفيذ ذلك باختيار كل من قطعة المستقيم $\overline{AB}$ والنقطة A. اذهب إلى قائمة إنشاء واختر خط عمودي. والآن اختر قطعة المستقيم $\overline{AB}$ والنقطة B وأعد إنشاء خط عمودي.



في هذه النقطة سيكون رسمك التخطيطي كما يأتي.

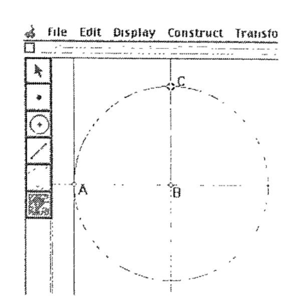


لإكمال المربع ستحتاج إلى نقطة التقاطع بين الخط العمودي المار بالنقطة B والدائرة. اختر هذين الكائنين، ثم افتح قائمة إنشاء. ستظهر لوحة العرض كما في الشكل الآتي. اختر نقطة في تقاطع.



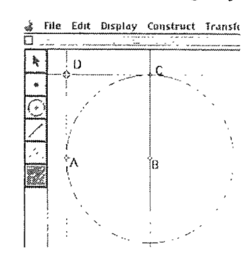
والآن اختر النقطة C وقطعة المستقيم $\overline{BC}$ ودع الحاسوب يقوم برسم خطا عموديا آخر. وستكمل هذه العملية المربع الذي نحتاج إليه.

وكما يظهر في الشكل الآتي، يمثل الشكل ABCD المربع المطلوب.



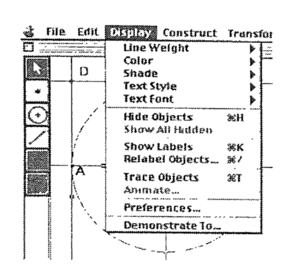
وتوجد عند هذه النقطة صعوبتان، هما :

- هناك خطوط بدلا من مقاطع رسمت لكي تصل بين النقاط A، B، C، D.
- لسنا في الحقيقة بحاجة إلى رؤية الدائرة بعد اكتمال الرسم التخطيطي للمربع.

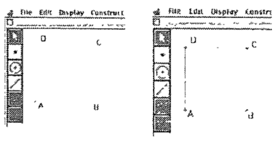


ولكي ننتهي بعرض المربع فقط على لوحة العرض، اتبع ما يلي:

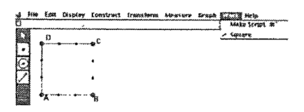
اختر الدائرة بالإضافة إلى المستقيمات $\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$. في قائمة عرض اختر إخفاء أشياء (Hide Objects).



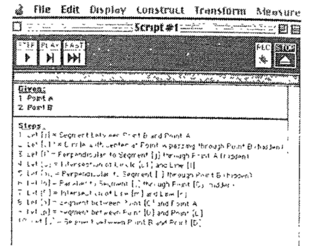
سيتبقى الآن لديك أربعة نقاط كما تظهر في الشكل الآتي – الأيسر دع الحاسوب يصل بين هذه النقاط، نقطتان في كل مرة، وسينشأ المربع ABCD الذي يظهر في الجزء الأيمن من الشكل الآتي:



نظرا لحاجتنا إلى Sketchpad الذي سيقوم برسم المربعات في المشروع القادم، نستطيع جعل الحاسوب يتبع جميع التعليمات بصورة آلية عندما نأمره بعمل ذلك. في قائمة تحرير، اختر اختيار الكل Select All. بعدها اختر عمل نص تحت قائمة عمل Work Menu.



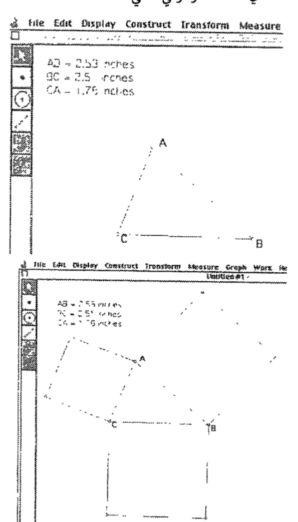
إن دالة عمل النص سوف تنتج برنامجا سيقوم بإنتاج مربع بصورة آلية عندما توفر الشروط المطلوبة لذلك. وعندما يظهر النص الموجود في الشكل الآتي، وبعد اختيار أية نقطتين، ثم تتوجه صوب النص وتختار تشغيل Play،



سيقوم برنامج Sketchpad باتباع النص آليا وإنتاج مربع. جرب ذلك! ثم تأكد من حفظ هذا النص.

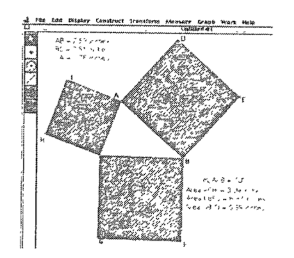
المشروع السادس Project Six

طور مبرهنة فيثاغورس: أطلب من الطلبة استخدام برنامج Sketchpad لرسم المثلث ABC وإيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة كما في المخطط الرسومي الآتي :

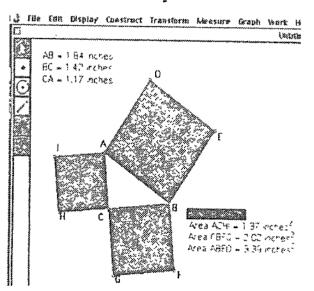


بعدها دع برنامج Sketchpad يجد قياس الزاوية $m\angle ACB$ ومساحة المربعات الثلاثة. تذكر، من أحد مشاريعك السابقة، بأنه ينبغي عليك اختيار الرؤوس الأربعة لكل متعدد الأضلاع قبل اختيار إنشاء داخل متعدد الأضلاع من قائمة إنشاء.

ستظهر النتائج كما في المخطط الرسومي الآتي :



أطلب من الطلبة تغيير موقع النقطة A أو النقطة B بحيث يكون قياس $m\angle ACB=90^{o}$. استفسر من الطلبة فيما إذا لاحظوا نتائجا مشجعة. سيكون لدى طلبتك مخططا رسوميا يشبه إلى حد كبير الشكل الآتي.



دع الطلبة يتوصلون إلى استنباط ينص على أنه عندما يكون المثلث الأصلي قائم الزاوية، فإن مجموع مساحتي المربعين اللذين قام الطلبة برسمهما يكون مساويا لمساحة المربع الثالث.

(في بعض الحالات، ونتيجة للأخطاء التقريبية فقد لا تتطابق النتائج في المرتبة العشرية الثالثة).

إن هذا الكشف سينتج عن تعميم رياضي ينص على أنه، في المثلث القائم الزاوية، يكون مجموع مربعي طول ضلعي المثلث يساوي مربع طول الوتر، $a^2+b^2=c^2$.

إلى أين نتوجه من هنا Where to Go from Here

إذا حالفك النجاح مع هذه البداية السريعة، وإذا كنت قد حصلت على برنامج Geometer's Sketchpad مع وثائق تشغيله، فهناك أمامك أكثر من مكان يمكن أن تتوجه صوبه في المرحلة القادمة.

- حاول أن تجرب العمل على الأنشطة الموجودة في كتيب تعليم الهندسة Teaching Geometry Booklet والتي تأتي مع حزمة وثائق البرنامج.
- ألق نظرة على نماذج الرسوميات التخطيطية التي تأتي مع برنامج Sketchpad لاحتوائها على عدة أفكار مفيدة ومثقفة.
- اختر الرحلات التعليمية التي تظهر في دليل المستخدم User's Guide والتي تتعامل مع أجزاء محددة من البرنامج تثير اهتماماتك الشخصية. فعلى سبيل المثال، قد تكون مولعا بتعلم المزيد حول كتابة النصوص أو الهندسة التحليلية.
- اصنع الرسوم التخطيطية التي تثير اهتمامك.

برنامج Geometer's Sketchpad والوحدات الإثرائية

إن الوحدات الإثرائية الموجودة في القسم الثاني من هذا الكتاب والتي يناسب استخدامها مع برنامج Geometer's sketchpad تم إدراجها أدناه. كما إن الأنشطة التي تتعلق بهذا البرنامج يمكن الحصول عليها في Exploring Geometry with the Geometer's Sketchpad وكذلك في Exploring Conic Sections with the Geometer's sketchpad.

	الوحدة الإثرائية	الأنشطة المتعلقة باستكشاف الهندسة
25	التحليل الهندسي	تحليل شبه منحرف متساوي الساقين، مساحة متوازي الأضلاع ، مساحة مثلث، تحليل برهان مبرهنة فيثاغورس.
36	اجتياز منطقة يتعذر بلوغها	
37	الزاوية التي يتعذر بلوغها	
38	إنشاءات المثلث	تطابق المثلث، ... الخ
39	خاصية الإنشاء	
40	إنشاء أطوال جذر	حلزون الجذر التربيعي، المتوسط الهندسي
41	إنشاء شكل خماسي	الشكل الخماسي التقليدي
42	تحري واستكشاف مغالطة المثلث متساوي الساقين	
43	النقطة متساوية الزوايا	نظرية نابوليون
44	النقطة الأقصر مسافة بمثلث.	الأمواج المتكسرة وطائرة الاستكشاف
45	زيارة المثلث متساوي الساقين للمرة الثانية	
46	خاصية الانعكاس في المستويات	خصائص الانعكاس، رياضيات Poolrom، Feed and water or water and feed نمذجة مثلث مشابه/ مسألة المرآة
47	إيجاد طول السيفان Cevian بمثلث	
48	تحدي مدهش	
49	صنع اكتشافات في الرياضيات	نظرية مورلي
50	ترصيعات بالفسيفاء	الترصيع بمتعدد الأضلاع المنتظم
51	تقديم مبرهنة فيثاغورس	الفصل الثامن : مبرهنة فيثاغورسي.
52	مراجعة التقسيم الثلاثي ثانية	
53	برهنة تلاق المستقيمات في نقطة واحدة.	منصفات الزوايا في المثلث، تحديد مثلث، الارتفاعات في المثلث، مركز ثقل المثلث.
54	مربعات.	
55	برهنة وقوع النقاط على خط مستقيم	
56	قياس الزاوية بالدائرة.	
57	التقسيم الثلاثي للدائرة	

	الوحدة الإثرائية	الأنشطة المتعلقة باستكشاف الهندسة
58	نظرية بتوليمي Ptolemy	
59	إنشاء π	نسبة المحيط/القطر
60	The Arbelosالأربيللو	
61	دائرة بتسعة نقاط	
62	خط إيلر Euler	
63	خط سيمسون Semson	
64	مسألة الفراشة	
65	الدوائر المتساوية	Excircles of triangle
66	الدائرة المحوطة والمثلث قائم الزاوية	
67	المستطيل الذهبي	المستطيل الذهبي
68	المثلث الذهبي	
69	مغالطات هندسية	
70	متعددات السطوح المنتظمة	قوالب للأجسام البلوتونية
72	زوايا الساعة	
73	تقسيم المستويات – المتوسط المتناسق	
76	الهوايات الجبرية	
91	غلاف القطع المكافئ	استكشاف المقاطع المخروطية
92	حل المسائل – استراتيجية معاكسة.	
98	مقارنة المتوسطات	
105	الآلة الحاسبة ذات القطع المكافئ	استكشاف المقاطع المخروطية
106	إنشاء القطوع الناقصة	استكشاف المقاطع المخروطية
107	إنشاء القطع المكافئ	استكشاف المقاطع المخروطية
108	استخدام منحنيات المستويات العالية لتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام	
109	إنشاء ظروف محيطة علوية وسفلية.	
110	التعاقب التناغمي	
111	التحويلات والمصفوفات	
114	مدخل إلى التحويلات الهندسية	
115	الدائرة و شكل القلب	
120	عوالم الهندسة – الثلاثة	

ملخص SUMMARY

ينبغي على المعلمين، وفي جميع مستويات المراحل الدراسية، الاستمرار بمراقبة ومتابعة أنشطة الآلة الحاسبة والحاسوب المناسبة والمشاريع الملحقة بها. كما أن كل جهد مبذول ينبغي أن ينصب باتجاه توظيف التقنية لغرض توفير إنماء وتحفيز إضافي داخل الصف. ويمكن للطلبة استخدام الآلة الحاسبة أو الحاسوب لتحليل أو تعميق تقنيات حل المسائل لديهم، وممارسة ألعاب منطقية، وشحذ المهارات الهندسية، والجبرية، والحسابية، أو بمجرد تحسين قدراتهم العملياتية على الآلة الحاسبة أو الحاسوب.

تمتاز الآلة الحاسبة Texas Instrument TI-83 Plus بكونها أداة ثمينة في عرض الجوانب المفيدة في: الجبر، والهندسة، أو الإتقان الرسومي للمستخدمين الموسميين وغير الموسميين، بينما يوفر برنامج Geometer's Sketchpad استبصارا معمقا بالبحث الديناميكي في مبادئ الهندسة وأسسها.

وفي جميع الأنشطة السابقة، وفرت السبل المتاحة لحل المسائل باستخدام التقنية الطلبة من الاستيعاب وتوسيع دائرة فهمهم للمبادئ الرياضية.

تمارين Exercise

1- اختر موضوعا مناسبا للعرض على برنامج Geometer's Sketchpad لكل مما يأتي:

أ – الصف الثامن – رياضيات – متوسط القابلية.

ب– الصف العاشر (موهوب).

ج– الصف التاسع يفتقر إلى خدمات علاجية.

د– الصف الحادي عشر – متوسط القابلية.

هـ- الصف السابع (موهوب).

و- الصف الثاني عشر بدأ الآن بدراسة الإحصاء.

2- الأسئلة التالية من النوع المفتوح وتوفر للطالب مرونة أكبر في الإجابة. استخدم الآلة الحاسبة TI-83 لتطوير درس الصف العاشر في كل مما يأتي :

أ- الأشكال رباعية الأضلاع.

ب- حل مجموعة من المعادلات الخطية.

ج - حل معادلات متعددة الحدود مهما كانت درجتها.

د- حل متباينات تربيعية Quadratic Inequalities.

هـ- تفاصيل الدوال المثلثية.

و- ميل الخط المستقيم.

3- افترض مفاتحة أحد آباء أكثر الطلبة إنجازا لديك، والذي أخبرك بأنك قد ساهمت في تعجيل تقدم ابنه بالدروس أكثر من بقية الصف كيف ستقوم بتطوير دروس إذا وجدت بأن الطالب :

أ. يمتلك قابليات متوسطة في الرياضيات.

ب. يمتلك موهبة ملموسة في الرياضيات.

4- اختر آلة حاسبة مناسبة لتدريس أحد الموضوعات الإثرائية الموجودة في نهاية هذا الكتاب وقم بإعداد الدرس المناسب لها.

5- أعد درسا بالحاسوب لأحد الصفوف التي تفي بأمس الحاجة إلى الرياضيات. أحصل على معلوماتك التعليمية من الشبكة العنكبوتية العالمية World Wide Web.

Suggest References مراجع مقترحة

Alfred, Brother U. "Exploring Fibonacci Number." Fibonacci Quarterly 1 (February 1963): 57-63.

Ameis, Jerry A. Mathematics on the Internet Columbus, OH: Merrill/Prentice Hall 2002.

Bennett, Dan. Exploring Geometry with the Geometer's Sketchpad. Berkeley. CA: Key Curriculum Press, 1993.

Bethel, Sandra Callis, and Miller. Nicholas B. "From an E to A in First Year Algebra with the Help of a Graphing Calculator", Mathematics Teacher 91 (February 1998): 118-119.

Billings, K., and D. Moursand. Problem Solving with Calculators. Salem, OR: Math Learning Center, University of Oregon, 1978

Bitter, G. G., and J. L. Mikesell. Activities Handbook for Teaching with the Hand-Held Calculator. Boston: Allyn and Bacon, 1980.

Bolt, B. Mathematics meets Technology. New York: Cambridge University Press, 1991.

Bramble, W. J., and E. Mason. Computer in Schools. New York: McGraw Hill, 1985.

Charischak, Ihor. "A Look at Technology's Role in Professional Development of Mathematics Teachers at the Middle School Level". School Science and mathematics 100 (November 2000): 349-354.

Chin, W. G., R. A. Dean and T. N. Tracewell. Arithmetic and Calculators. San Francisco: W. H. Freeman, 1978.

Coburn, T. G., How to Teach Mathematics Using a Calculator. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics, 1987.

Coburn, T. G., et al. Practical Guide to Computers in Education. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1982.

Collis, B. Computer, Curriculum, and Whole Class Instruction. Belmont, CA: Wadsworth, 1998.

Demana, Franklin, and Bert K. Waits. "Enhancing Mathematics Teaching and Learning Through Technology". In Teaching and Learning Mathematics in the 1990s, 1990 Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics. Edited by Thomas J. Cooney and Christian R. Hirsch Reston Va: The Council, 1990, 212-222.

De Villiers, Michael D. Rethinking Proof with the Geometer's Sketchpad. Berkley, CA: Key Curriculum Press 1999.

Denney, Louise S. "A Better Way to Graph Piecewise Function". Mathematics Teacher 91 (October 1998): 628-629.

Dion, Gloria. "Reader Reflections: Fibonacci Revisited". Mathematics Teacher 81 (March 1988)": 162, 164.

Dudley, Underwood. Elementary Number Theory. New York: W.H Freeman. 1978.

Elgarten ,G., and A. S. Posamentier. Using Computers Programming and Problem Solving. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1984.

Elgarten ,G., A. S. Posamentier and S. Moresh. Using Computers in Mathematics, 2nd ed. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1986.

Frost, Percival. Curve Tracing. New York: Chelsea, 1960.

Gradner, Martin. "Mathematical Games: The Multiple Fascinations of the Fibonacci Sequence". Scientific American 220 (March 1969): 116-120.

Giamati, Claudia. "Square This: Using Scripts to

Explore Complex Constructions". Mathematics Teacher 93 (April 2000): 329-333.

Gleick, James. Choos: Making a New Science. New York: Viking Press, 1987.

Goldberg, Samule. Introduction to Difference Equations. New York: Dover Publication, 1986.

Goolsby, Ronnie C., and Thomas W. Polaski. "Extraneous Solution and Graphing Calculators". Mathematics Teacher 90 (December 1997): 718-720.

Hall, H. S., and S. R. Knight. Higher Algebra. London: Macmillan, 1960.

Heid, M. Kathleen. "Uses of Technology in Prealgebra and beginning Algebra". Mathematics Teacher 83 (March 1990): 194-198.

Hembree, Ray. "Model for Meta-Analysis of Research in Education, with a Demonstration in Mathematics Education: Effects of Hand-held Calculators" Dissertation Abstracts International 45A (April 1985): 3087.

Johnson, Luella H. "A Look at Parabolas with a Graphing Calculator". Mathematics Teacher 90 (April 1997): 278-282.

Jones, Graham A. "Mathematical Modeling in a Feast of Rabbits". Mathematics Teacher 86 (December 1993): 770-773.

Kastner, B. Space Mathematics: A Resource for Secondary school Teachers. Washington, DC: NASA, 1985.

Kelman, P. et al. Computers in Teaching Mathematics. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1983.

Kenelly, J. W. The Use of Calculators in the Standardized Testing of Mathematics. New Your: College Entrance Examination Board, 1989.

Kieren, T. E. "Computer Programming for the Mathematics Laboratory". Mathematics Teacher 66 (1973): 9.

Klein, Raymond J. and Ilen Hamilton. "Using Technology to Introduce Radian Measure". Mathematics Teacher 90 (February 1997): 168-172.

Lawrence, J. Dennis. A Catalog of Special Plan Curve. New Your: Dover Publication, 1972.

LeBlanc, John F., Donald, Kerr, Jr., and Maynard Thompson. Number Theory Reading, MA: Addison-Wesley Publication Co., 1976.

Lee, Mary Ann. "Enhancing Discourse on Equation" Mathematics Teacher 93 (December 2000): 755-756.

Linn, Andrew. "Reader Reflection: Generalized Formula" Mathematics Teacher 81 (October 1988): 514, 516.

Lockwood, E. H. A. Book of Curve Cambridge: Cambridge University Press, 1961.

Maor, Eli. "The Pocket Calculator as a Teaching Aid" Mathematics Teachers 69 (1976): 471.

McGehee, Jean J. "Interactive Technology and Classic Geometry Problems". Mathematics Teacher 91 (March 1998): 204-208.

National Council of Teachers of Mathematics, Commission on Standards for School Mathematics Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Council, 1989.

Olmstead, Eugene A. "Exploring the Locus Definitions of the Conic Sections" Mathematics Teachers 91 (May 1998): 428-434.

Olson, Alton T. "Difference Equations" Mathematics Teacher 81 (October 1988): 540-544.

Patterson, Walter M., III. "Reader Reflections: The nth Fibonaccio Number". Mathematics Teacher 80 (October 1987): 512.

Persinger, Sharon E. "Using Graphing Calculator and the Rational Roots Theorem to Factor Polynomials" New York State Mathematics Teacher's Journal 49, (1999 1): 32-38.

Polya, G How to Solve It. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

Prielipp, Robert W., and Nobert J. Kuenzi. "Sums of Consecutive Positive Integers". Mathematics Teacher 68 (January 1975): 18-21.

Purdy, David C. "Using the Geometer's Sketchpad to Visualize Maximum Volume Problems". Mathematics Teacher 93 (March 2000): 224-228.

Scher, Daniel. Exploring Conic Sections with The Geometer's Sketchpad. Berkeley, CA: Key Curriculum Press, 1993.

Schielack, Vincent P., Jr. "The Fibonacci Sequence and the Golden Ratio". Mathematics Teacher 80 (May 1987): 357-358.

Selitto, George L. "Using Graphing Technology to Investigate Exponential Population Growth". New York State Mathematics Teachers Journal 50 (no. 1): 44-47.

Shilgalis, Tom. "Exploring a Parabolic Paradox with the Graphing Calculator". Mathematics Teacher 90 (September 1997): 488-493.

Sisisky, Jeremaih David. "Reader Reflection Connecting Fibonacci and Lucas Sequence". Mathematics Teacher 86 (December 1993): 718-719.

Sloyer, Clifford W. Fantastike of Mathematics. Providence RI: Janson Publications, 1986.

Spence, Lawrence E. Finite Mathematics. New York: Harper & Row, 1981.

Stick, Marvin E. "Calculus Reform and Graphing Calculators: A University View". Mathematics Teacher 90 (May 1997): 356-363.

Suydam, M. N. Using Calculators in Pre-College Education. Columbus, OH: Calculator information Center, 1982. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 220 273).

Tiffany, Patrice and Stolze, Charles. "Using

Technology to Teach Calculus". New York State Mathematics Teachers Journal 48 (1998) no.2: 75-80.

Touval, Aynan "Investigating a Definite Integral From Graphing Calculators to Rigorous Proof". Mathematics Teacher 90 (March 1997): 230-232.

Troputman, A. P., and J. A. White The Micro Goes to School. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1998.

Vonder Embse, Charles. "Using a Graphing Utility as a Catalyst for Connection". Mathematics Teacher 90 (January 1997): 50-56.

Weeks, Audrey "Graphing Functions with the Geometer's Sketchpad". Mathematics Teacher 93 (November 2000): 722-723.

Worth, J. "Let's Bring Calculators Out of the Closet" Elements: A Journal for Elementary Educators 17(1985): 18-21.

Yates, Robert C. A. Handbook of Carve and their Properties, 1952. Reprint. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

Yerushalmy, Michal and Shoshana Gilead" Solving Equations in a Technological Environment" Mathematics Teacher 90 (February 1997): 156-162.

6 استراتيجيات التقييم المتعدد وتحديد العلامات المدرسية
Multiple Assessment and Grading Strategies

يستثمر أكثر المعلمين فاعلية أدوات التقييم المتعدد كاستراتيجيات مفيدة في تحديد النمو الرياضي، والقدرة، والإنجاز لدى طلبته. وتؤدي الموازنة الصائبة بين وسائل التقييم إلى تعزيز العدالة والإنصاف، والتي توفر فرصة مناسبة للطلبة في إظهار قابلياتهم المختلفة. إن الطلبة الذين يتم تقييمهم بطرائق متعددة سوف يحسنون تقدير أن مادة الرياضيات ليست مجموعة صماء من القواعد ينبغي استظهارها عن ظهر قلب دون إدراك لمحتواها، أو اتباعها دون أي محاولة للفهم، ولكنها عملية معرفية تسهم بتزويدهم بمزيد من القدرة.

أدوات التقييم المتعدد يمكن أن تتضمن الاختبارات المكتوبة، والامتحانات السريعة، والعمل الصفي، والمساهمة المنطوقة والمكتوبة في النقاشات الدائرة داخل الصف، والعمل ضمن مجاميع عمل صغيرة/كبيرة، والمشاريع، والتقارير الشفهية، ويوميات الطالب، وإجابات الأسئلة المفتوحة، والحقيبة المدرسية، والمشاهدات، والتقييم الذاتي للطلبة وأقرانهم، والواجبات البيتية، وتقويم شمول وترتيب محتوى دفاتر الطلبة. وقد تتضمن استراتيجيات التقييم-الإضافية، اختبارات الأداء في المنزل Take-home، واختبارات الإنجاز المعياري، والثقة والمهارة التي يبديها الطلبة أثناء استخدامهم للآلات الحاسبة، والحواسيب، والممارسات التشكيلية المختلفة.

ينبغي على عملية التقييم أن تعكس، أيضاً، التنوع في الأساليب التدريسية للمعلم. وأخيرا، فإن المعلم سوف يستخدم استراتيجيات التقييم هذه للوصول إلى مخطط متوازن وملائم لتقويم الطلبة وبيان مراتبهم. يستطيع المعلمون أن يصمموا بأنفسهم برنامجا للتحديد العلامات المدرسية، من خلال الخطوط العامة التي تم وصفها في هذا الفصل، وذلك لعكس القيم التي يعدونها مهمة ومرغوب فيها. إن الخبرات الشخصية والمستمرة للمعلم بالتقانات المختلفة التي يتم اعتمادها في عملية التقييم، سوف تكون ذات اثر بالغ الأهمية ومورداً مساعداً على الوصول إلى افضل موازنة بين الاستراتيجيات. لقد اقترحنا جملة من الخيارات والتي ينبغي أخذها بعين الاعتبار في العملية التقويمية. أن تحديد علامات مدرسية رقمية والتي ستصبح، فيما بعد، متوسطا موزونا Weighted-average لكل فئة تقييم لأغراض عملية التقويم، هو حكم مهني سيتخذه كل معلم يحاول تبريره للطلبة، والآباء، والمشرفين، والأقران. لا تصلح القوالب والصياغات المعدة مسبقا لجميع المعلمين ، رغم أن المخطط الآتي، مع التغييرات المناسبة التي يحددها كل معلم، قد اقترح وأوصى به الكثير من الخبراء كمرشد في إعداد تقويم نهائي ومتوازن. إن عددا لا بأس به من الفقرات الآتية تحتاج إلى تقويم موضوعي بواسطة المعلم، وأمور أخرى، مثل درجات الاختبار التي يمكن أن تحدد بقيم عددية أكثر موضوعية. ونظرا إلى أن الدرجة النهائية تساوي مجموع أجزائها، ينبغي على المعلم أن يكون واثقا بأن الدرجة المحصلة هي انعكاس صحيح لأسلوبه/أسلوبها في التعليم.

تشمل أدوات التقييم التي ينبغي اعتبارها، ما يأتي:

- اختبارات الصف والامتحانات القصيرة.
- التقويم عند منتصف الفصل الدراسي.
- درجة الامتحان النهائي.
- نتائج الاختبارات المعيارية.

ورغم أن أدوات التقييم المذكورة قد تحدد درجات رقمية غير واضحة وملتبسة، فإن ما يأتي، من فئات أكثر موضوعية قد يتم ترتيبها بواسطة المعلم من 1 إلى 5، مع تحديد المعاني الخاصة للرتب Rankings بواسطة المعلم أو قاعدة محددة.

- درجة تقبل الطلبة بواسطة أعضاء مجموعة أخرى.
- معدل نجاح المجموعة التي يشارك فيها الطالب بإكمال الواجب المحدد بصورة صحيحة.
- جودة مشاركة الطالب في المجاميع الكبيرة.
- التقارير الشفهية.
- المشاريع.
- التعليقات المكتوبة والتقويمات كما توجد في الحقائب.
- محاولات حل التمارين الإثرائية.
- دقة وترتيب، واكتمال، وجودة الواجب البيتي.
- مهارات استخدام الآلة الحاسبة العلمية والرسومية.
- استخدام تقنيات الحاسوب.
- تطبيقات التمارين التشكيلية المعدة/أو التي يتم إعدادها شخصيا.

ليس من الضروري استخدام جميع تقانات التقييم بواسطة كل معلم في جميع الأوقات. ويمكن توظيف تقانات تقييم إضافية، مثل مراقبة سلوك الطالب في إعدادات المجاميع الصغيرة والكبيرة، وملاحظة براعة الطالب بالتمارين التشكيلية أو استخدام الآلة الحاسبة والحاسوب.

استخدام مهام تقييم الأداء
Using Performance Assessment Tasks

إن مهمة تقييم الأداء تؤسس الفهم المتحقق لدى الطالب، وطبيعة الأمور التي يستطيع أداءها. من أجل هذا ينبغي أن تكون المهمة معنوية، وواقعية، وذات جدارة وأهلية.

ينبغي على مهمة الأداء أن:

- تقيم علاقة متبادلة مع الأهداف العامة والتعليمية، ومحتوى المنهج الدراسي.
- تعزز الرياضيات بوصفها عملية تتيح للطلبة فرصة عرض أفكارهم، وأسلوب صياغة المفاهيم للمسائل الرياضية.
- تمنح فرصة لتقويم العمليات المتضمنة في المهام.
- تكون ذات طابع محفز، وتتضمن تفكيرا انتقاديا، وان تكون ذات صلة بمواقف الحياة الواقعية.
- تؤد على الفهم الإدراكي أكثر من التعلم الاستظهاري.
- ترتبط بالهدف الذي يتم تقييمه بحيث يمكن مناقشة أداء الطالب.
- تكون أكثر ميلا إلى الأسلوب المفتوح منها إلى الأسلوب المحدد.
- تكون متعددة الأوجه وان لا تقتصر على منهجية واحدة.
- تؤدي إلى تفريعات، وامتدادات، وأسئلة رياضية من نوع آخر.

تؤدي مهام تقييم الأداء – بذاتها – إلى صياغة البعد الإدراكي للمفاهيم وللمبادئ الرياضية. بصورة عامة لا يمكن تقييم هذه المهام باستخدام الاختبارات والامتحانات القصيرة التقليدية. وتعد مهام تقييم الأداء، غالبا، موضوعات موجهة عملياتيا Process-oriented، وغير مغلقة، وقلما ينتج عنها إجابة واحدة. إن تقويم مهام تقييم الأداء يتضمن حكما صادرا عن مربي ذي دراية وممارسة متقدمة، ويرجح ان يكون ذو معرفة موسوعية وشاملة Holistic أكثر من كونه تحليليا Analytical.

غالبا ما يدمج عدد كبير من المدرسي مهام تقييم الأداء ضمن عمليات التقويم التي يمارسونها، وتحتوي كتب الرياضيات المنهجية التي يستخدمونها على بضعة مهام لتقييم الأداء. وفي معظم الأحيان، يمكن تحويل المسائل الرياضية، والأمثلة، والرسوم التوضيحية السائدة في هذه الكتب إلى مهمة لتقييم الأداء عن طريق طرح الأسئلة المفتوحة مثل "ما هو الفرق بين...؟"، "تحت أية ظروف سيكون...؟"، "وضح لماذا أن هذه الحقيقة قد تكون صادقة أو كاذبة؟". إن طرح الأسئلة الخصبة التي تسهل عملية تعميق الإدراك المفاهيمي، تسهم في تغيير أنماط التفكير وأساليبه من التفكير الإجرائي إلى التفكير النقدي، وعليه ستنجح في إنشاء علاقات بين الأسئلة الهادفة والتعليم الذي يحمل معنى ملموساً.

نماذج لمهام تقييم الأداء
Examples of Performance Assessment Tasks

بيّن بأن زاويتي قاعدة المثلث متساوي الساقين متطابقتان.

بيّن لماذا $x^o=1$.

اشتق الصيغة التربيعية.

وضح لماذا يعبر عن مساحة المثلث بالصيغة $\frac{1}{2}bh$.

استخدام التعليقات بالخطوط الحمراء لتقويم عمل الطالب
Using Rubrics To Evaluate Student Work

التعليقات بالخطوط الحمراء هي معايير تفصيلية أو إجراءات تستخدم لتقييم عمل الطلبة، وتوضح ما هية العوامل التي يراد اختبارها، وتعرض مستوى الإنجاز، وتساعد المعلم في تصنيف عمل الطالب على مستوى مناسب. يضاف إلى ذلك بأنها توفر للطلبة فهما افضل لتوقعات المعلم.

تتألف التعليقات بالخطوط الحمراء من معايير محددة لتقييم أداء الطالب، وتحوي على مفتاح تثمين لتطبيق هذه المعايير. إن الخطوط الحمراء المسجلة تنشئ المعيار المطلوب للحكم على العمل في ضوء أداء محدد. وتساعد التعليقات – بالخطوط الحمراء الطلبة على مراقبة قيمة، وقياس، والأهداف التعليمية التي تكمن وراء الواجب البيتي والواجبات المحددة. من أجل هذا ينبغي على المعلمين مساعدة الطلبة في فهم تعليقات الخطوط الحمراء عند تكليفهم بالواجبات المحددة، لكي يصبح الطلبة أكثر ألفة مع المهام المطلوبة منهم، وقدرة على إكمال تنفيذها.

إن المسائل الآتية هي عبارة عن نماذج واقعية من عمل الطالب، وقد تم احتساب درجة كل مسألة باستخدام تعليقات حمراء بخمس نقاط (يعني، من صفر إلى 4) حيث تؤشر الدرجة صفر افتراضيا إلى عدم وجود فهم بالمسألة، أما الدرجتين 1، 2 فتؤشران إلى وجود معرفة ضئيلة ومحدودة بالمسألة، وتؤشر الدرجة 3 إلى وجود معرفة عملية وتطبيقية بالمسألة، وأخيرا تؤشر الدرجة 4 إلى وجود معرفة تامة ومهارة في التعامل مع مفردات المسألة. من الضروري أن يكون المعلمين قادرين على

تشخيص درجات عمل الطلبة بصورة دقيقة. وهذا يعني بأن عليهم أن يكونوا قادرين على تحديد أخطاء الطلبة، وتصنيف هذه الأخطاء بصورة صحيحة.

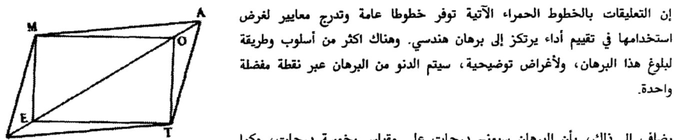
على سبيل المثال، في تقييم الأداء، قد لا يكون الخطأ في الحسابات حاسما بالنسبة للإدراك المفاهيمي لمفردات المسألة.

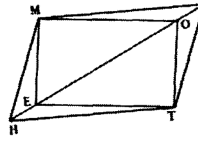
وعليه، ينبغي أن يكون المعلمين قادرين على التمييز بين الأخطاء المفاهيمية الرئيسية، والأخطاء المفاهيمية الخطيرة. من أجل هذا تظهر الحاجة إلى ممارسات مستمرة ومركزة لكي نكون قادرين على تشخيص وتقييم عمل الطالب بصورة دقيقة وصحيحة.

مثال على تعليقات الخطوط الحمراء الرياضية كأداة لتقييم مهمة أداء
Example of a Mathematics Rubrics for Assessing a Performance Task

المستوى	الإدراك المفاهيمي	الاستدلال العقلي واستراتيجيات حل المسائل	التواصل
غير مقبول	▪ لا يوجد أي حل، أو أن الحل لا يرتبط بسؤال الاختبار ▪ المهارات والمهارات المستخدمة متنافرة ومتضاربة ولا تنطبق على سؤال الاختبار	▪ لا يوجد ثمة دليل على وجود استراتيجية لحل المسألة. ▪ عدم وجود خطة لاستخدام الاستراتيجية، أو استخدام إجراءات لا تساعد على حل المسألة. ▪ ليس ثمة دليل على استخدام استدلال رياضي. ▪ كثرة الأخطاء الرياضية بحيث لا يمكن حل المسألة.	▪ لم يوضح الحل، أو أن التوضيح مقتضب، أو لا يرتبط بالمسألة أصلا. ▪ عدم وجود عرض رياضي (مثل، أشكال رسومية، أو رسوم تخطيطية، أو جداول، ... الخ) ▪ استخدام خاطئ للاصطلاحات الرياضية.
يقارب القبول	▪ حل غير متكامل، أي يعكس عدم إدراك بعض جوانب المسألة.	▪ استخدام استراتيجية مفيدة لحد ما، يؤدي إلى حل غير متكامل. ▪ بعض المؤشرات لاستراتيجيات رياضية. ▪ طرق إجرائية–رياضية غير متكاملة.	▪ هناك تبرير غير متكامل ويفتقر إلى الوضوح. ▪ هناك حد أدنى في استخدام تمثيل رياضي صحيح. ▪ هناك حد أدنى من استخدام الاصطلاح الرياضي والمؤشرات المناسبة للمسألة.
مقبول	▪ يؤشر الحل بأن الطالب لديه معرفة أكثر شمولا بالمسألة، وبالمبادئ الأساسية المطلوبة لحلها.	▪ يستخدم استراتيجية بارعة تؤدي به إلى حل المسألة. ▪ يستخدم الاستدلال الرياضي بصورة صحيحة. ▪ يطبق الإجراءات الرياضية.	▪ الشرح واضح لا لبس فيه. ▪ استخدم العرض الرياضي بصورة صحيحة ومناسبة. ▪ استخدمت الاصطلاحات والرموز الرياضية بفاعلية ملحوظة.
متفوق	▪ يظهر الحل وجود عمق بالإدراك المفاهيمي للمسألة، ويتضمن قدرة متميزة في تطبيق المفاهيم الرياضية الصحيحة، والمعلومات الضرورية لحلها.	▪ يستخدم استراتيجيات منظمة بصورة جيدة، وبمستويات عالية والتي تؤدي مباشرة إلى حل بارع. ▪ يستخدم استدلالات عقلية معقدة. ▪ يستخدم طرقا إجرائية صحيحة لحل المسألة والتأكد من صحة الحل.	▪ الشرح واضح ومفصل. وقد عرضت جميع التفاصيل اللازمة لحل المسألة. وتم إدراج جميع الخطوات بحيث أن توضيح الحل قريب إلى فهم القارئ. ▪ استخدام عرض رياضي دقيق للتواصل مع المفاهيم ذات الصلة بالمسألة. ▪ استخدام لغة رياضية دقيقة، واصطلاحات دقيقة، وتم تطبيق الرموز خلال حل المسألة.

تقييم أداء: برهان هندسي
Performance Assessment: Geometric Proof





المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$\overline{HO} \cong \overline{AE}$

برهن : MATH هو متوازي أضلاع

إن التعليقات بالخطوط الحمراء الآتية توفر خطوطا عامة وتدرج معايير لغرض استخدامها في تقييم أداء يرتكز إلى برهان هندسي. وهناك اكثر من أسلوب وطريقة لبلوغ هذا البرهان، ولأغراض توضيحية، سيتم الدنو من البرهان عبر نقطة مفضلة واحدة.

يضاف إلى ذلك، بأن البرهان سيمنح درجات على مقياس بخمسة درجات، وكما يأتي:

(4) يشرح الطالب ويصف سلسلة من القضايا المنطقية – الكلية بناء على خطة محددة، والتي تتضمن المعلومات المحددة، وتعاريف دقيقة ومحكمة، وافتراضات ومسلمات مناسبة، ونظريات وفرضيات لغرض استنباط الاستنتاج الصحيح للبرهان. وقد يدرج الطالب جميع خطوات البرهان، ويعمد إلى ترقيمها وذلك بوضع القضية في عمود مستقل، والتبرير الموافق له في عمود آخر. وسيعمد الطالب، أيضاً، إلى تقديم تحليل وصفي للبرهان بصورة مختصرة. ينبغي أن تكون جميع التأشيرات، والتسميات التوضيحية، والرموز، والصيغ الرياضية واضحة غير ملتبسة مع القضايا المنطقية التي تم إيرادها في البرهان.

(3) يتبع الطالب سلسلة من القضايا المنطقية التي ترتكز على خطة محددة، ولكنها تستبعد واحدا من: التعريفات، أو النظريات، أو المسلمات (التي تمتلك أهمية كبيرة) خلال عملية البرهنة. من اجل هذا سيتوصل الطالب إلى استنتاج خاطئ نتيجة اعتماده على معلومات غير كافية.

(2) يحاول الطالب اتباع سلسلة من القضايا المنطقية والأسباب، ولكنه يستخدم معلومات وتسميات خاطئة لاتخاذ استنتاج غير صحيح مستخدما معلومات غير صحيحة أيضاً.

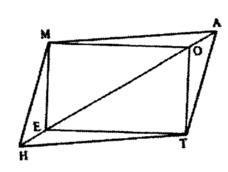
(1) يدرج الطالب المعلومات المتوفرة، دون أن تظهر لديه خطة واضحة أو تسلسل منطقي لأفكاره كي تؤدي به إلى استنتاج صحيح.

(أو)

إن الاستنتاج يتخذ بناء على قضايا وأسباب تفتقر إلى منطق سليم.

(0) الجواب خاطئ بكافة تفاصيله، وغير مترابط، أو غير منطقي، أو قد يكون الجواب صحيحا تم التوصل إليه بعملية غير صحيحة.

طالب Student 1



الدرجة: GRADE (4)

إن أنموذج العمل هذا يوضح الإطار المعياري للأداء. فقد أظهر الطالب قضايا منطقية شاملة ارتكزت إلى خطة محددة وباستخدام تحليل وصفي للبرهان في إطار سردي. تضمن البرهان سلسلة من التعاريف الصحيحة، والمسلمات، والنظريات التي ارتكزت إلى المعلومات المتوفرة فأرشدته إلى الاستنتاج الصحيح، والمطلوب للبرهان.

المعطى : MOTE متوازي الأضلاع

$\overline{HO} \cong \overline{AE}$

برهن : MATH هو متوازي أضلاع

خطة: إن خطتي تهدف الى برهنة أن $\Delta HET \cong \Delta MOA$ بواسطة $SAS \cong SAS$ ، والبرهنة على أن : $\overline{HT} \cong \overline{MA}$ + $\overline{HT} \parallel \overline{MA}$

وعليه ، اذا كان احد الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متوازياً، ومتطابقاً ، سيكون الشكل الرباعي ▱ .

ورد في صيغة السؤال بأن MOTE هو ▱ ، وعليه $\overline{ET} \cong \overline{MO}$*(ضلع) ، و $\overline{MO} \parallel \overline{ET}$ لأن الأضلاع المتقابلة في الـ▱ متطابقة ومتوازية.

وقد أعطي لنا أيضاً بأن $\overline{HO} \cong \overline{AE}$. $\overline{EO} \cong \overline{EO}$ بسبب التماثل ، وأن $\overline{HO} - \overline{EO} = \overline{AE} - \overline{EO}$ من مسلمة الطرح ،

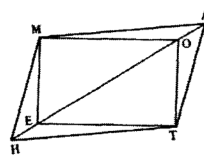
لذا سيكون (ضلع)* $\overline{AO} \cong \overline{EH}$.

$\angle OET \cong \angle MOE$ لأن الزوايا الداخلية المتبادلة لمستقيمات // تكون $\cong$. والآن ، $\angle MOA \cong \angle HET$*(زاوية) لأن مكملات الـ$\angle$ تكون $\cong$. بدوره ، $\Delta MOA \cong \Delta HET$ بواسطة $SAS \cong SAS$ ، لذا $\overline{HT} \cong \overline{MA}$ ، و $\angle MOA \cong \angle THE$ لأن الأجزاء المتناظرة من $\Delta \cong$ تكون $\cong$.

كذلك $\overline{MA} \parallel \overline{HT}$ لأن إذا كان المستقيمان متوازيا المستوى ، قد قطعا بواسطة مستقيم مستعرض فإنهما يكونان زوجاً من الـ$\angle$ المتبادلة التي تكون $\cong$ ، وعليه سيكون المستقيمان // .

إن MATH هو ▱ ، لأنه عندما يكون زوج من الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي $\cong$ و // ، سيكون الشكل الرباعي ▱ .

طالب 2 Student



الدرجة: (3) GRADE

اتبع الطالب سلسلة من القضايا المنطقية التي ترتكز إلى خطة محددة، ولكنها تستبعد إحدى النظريات المهمة خلال البرهان (فعلى سبيل المثال، اغفل قيمة حقيقة أن الشكل الرباعي يكون متوازي الأضلاع إذا كان كل ضلعان من أضلاعه المتقابلة متطابقة ومتوازية) لذا سيذهب إلى اتخاذ استنتاج خاطئ مبني على معلومات ضئيلة لحد ما.

المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

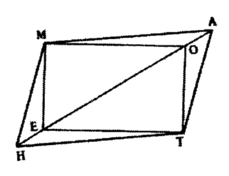
$\overline{HO} \cong \overline{AE}$

برهن : MATH هو متوازي أضلاع

خطة: إن خطتي تتكون من البرهنة أولاً على أن $\Delta MOA \cong \Delta HET$ بواسطة SAS ، ثم برهنة $\overline{MA} \cong \overline{HT}$. وهذا نعلم بأنه اذا كان الضلعان المتقابلان في الشكل الرباعي متطابقان ، سيكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع .

القضايا	الأسباب
١. MOTE هو متوازي أضلاع.	١. معطى
٢. $\overline{ET} \cong \overline{MO}$.	٢. الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة
٣. $\overline{AE} \cong \overline{HO}$.	٣. معطى في السؤال .
٤. $\overline{EO} \cong \overline{EO}$.	٤. تماثل .
٥. $\overline{HO} - \overline{EO} \cong \overline{AE} - \overline{EO}$.	٥. مسلمة الطرح .
٦. $\angle MOE \cong \angle OET$.	٦. الزوايا الداخلية - المتبادلة في الخطوط المستقيمة متطابقة .
٧. $\angle HET \cong \angle MOA$.	٧. مكملات الزوايا المتطابقة، متطابقة .
٨. $\Delta MOA \cong \Delta HET$	٨. SAS ≅ SAS .
٩. $\overline{HT} \cong \overline{MA}$.	٩. الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة تكون متطابقة .
١٠. MATH متوازي أضلاع .	١٠. اذا كان الضلعان المتقابلان في الشكل الرباعي متطابقان ، سيكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع .

طالب Student 3



الدرجة: GRADE (2)

يحاول الطالب اتباع سلسلة من القضايا والأسباب المنطقية ولكن باستخدام معلومات وتأشيرات خاطئة للوصول إلى استنتاج خاطئ بتوظيف أسباب غير مقبولة.

على سبيل المثال، قام الطالب بتأشير المعلومات المعطاة بصورة خاطئة في العبارة رقم 3. كذلك ، عمد الطالب إلى بيان تطابق زاويتين لا تقعان ضمن المثلثين المقصودين في الفقرة رقم 4. أخيرا فإن استنتاج الطالب في السبب رقم 7 كان محدودا.

المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$\overline{HO}\cong\overline{AE}$

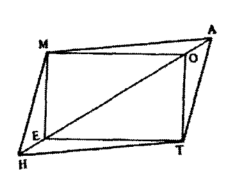
برهن : MATH هو متوازي أضلاع

القضايا	الأسباب
١. MOTE هو ▱ .	١. معطى
٢. $\overline{ET}\cong\overline{MO}$ ، $\overline{ET}^{(s)} \parallel \overline{MO}$.	٢. الاضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع تكون متطابقة + متوازية.
٣. $\overline{OA}^{(s)}\cong\overline{HE}$	٣. معطى في السؤال.
٤. $\angle MOE \cong \angle OET$ (A).	٤. الزوايا الداخلية المتبادلة للمستقيمات المتوازية تكون متطابقة.
٥. $\triangle MOA \cong \triangle HET$.	٥. SAS ≅ SAS .
٦. $\overline{HT}\cong\overline{MA}$.	٦. الأجزاء المتناظرة في المثلثات المتطابقة، متطابقة.
٧. MATH هو متوازي أضلاع.	٧. الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع تكون متطابقة.

طالب Student 4

الدرجة: GRADE (1)

ادرج الطالب المعلومات المتوفرة ولكن ليس ثمة خطة واضحة أو تسلسل منطقي لأفكاره، والتي يفترض أن تقوده إلى استنتاج صحيح .



المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$\overline{HO} \cong \overline{AE}$

برهن : MATH هو متوازي أضلاع

MOTE هو ▱ ، وهو معطى في السؤال، بحيث $\overline{MO} = \overline{ET}$ (ضلع)

، $\overline{ME} \cong \overline{OT}$ (ضلع) ، لأن الأضلاع المتقابلة في الـ ▱ تكون

≅ . $\overline{AE} \cong \overline{HO}$ (ضلع) هو معطى في السؤال. لذا ،

$\Delta MOA \cong \Delta HET$ بواسطة SSS .

طالب Student 5

الدرجة: GRADE (0)

الجواب خاطئ بصورة كاملة، وغير مترابط، أو غير منطقي أو ان الجواب صحيح، وقد تم الحصول عليه بطريقة غير سليمة بشكل ملحوظ.

المعطى : متوازي الأضلاع MOTE

$\overline{HO} \cong \overline{AE}$

برهن : MATH هو متوازي أضلاع

القضايا	الأسباب
١. MOTE هو متوازي أضلاع.	١. معطى.
٢. $\overline{AE} \cong \overline{HO}$	٢. معطى.

مهمة تقييم أداء في الهندسة

Performance Assessment Task in Geometry

إذا كان قياس الزاوية الخارجية في قاعدة مثلث متساوي الساقين هو°105.جد قياس زاوية رأس المثلث، مع توضيح جميع تفاصيل العمل.

إن تعليقات الخطوط الحمراء الآتية تفيد كخطوط عامة وقوائم للمعايير المستخدمة في تقييم المسألة التي ترتكز إلى الأداء، والتي سيتم احتساب درجاتها وفق مقياس يتألف من خمسة نقاط ، وكما يأتي:

(4) يرسم مخططا رسوميا دقيقا لمثلث متساوي الساقين مع امتدادات قاعدته.(المخطط الرسومي ليس الزاميا)، ويؤشر جميع المعلومات وثيقة الصلة بالموضوع، أي والمواقع الصحيحة للزوايا والأضلاع في ضوء علاقتها بالمثلث متساوي الساقين وامتدادات قاعدته.
يحدد قياس إحدى زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين عن طريق إيجاد قياس الزاوية المكملة للزاوية الخارجية °105 والتي تساوي °75 .
لذا باستخدام الحقيقة القائلة بأن زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون متطابقة، يجد قياس الزاوية الأخرى لقاعدة المثلث متساوي الساقين والتي سيكون قياسها °75 أيضاً.
يستخدم الحساب أو الجبر للحصول على قياس زاوية الرأس في المثلث متساوي الساقين، عن طريق استخدام الحقيقة القائلة بان مجموع قياس زوايا المثلث تساوي °180.

(3) المخطط الرسومي و تأشيرا ته صحيحة، ولكنه ارتكب خطأ حسابيا في حساب قياس زاوية رأس المثلث متساوي الساقين.

(2) ارتكب خطأ حسابيا عند احتساب قياس الزاوية المكملة للزاوية الخارجية °105 لذا انتقل هذا الخطأ إلى قياس زاوية الرأس للمثلث متساوي الساقين.

(1) يوجد قياس الزاوية المكملة للزاوية الخارجية °105 فقط

أو

يحاول استخدام الحقيقة القائلة بأن زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون مطابقة، ولكن التعويض والجواب كان خاطئا.

أو

الجواب الصحيح موجود دون إظهار أي آثار للحل.

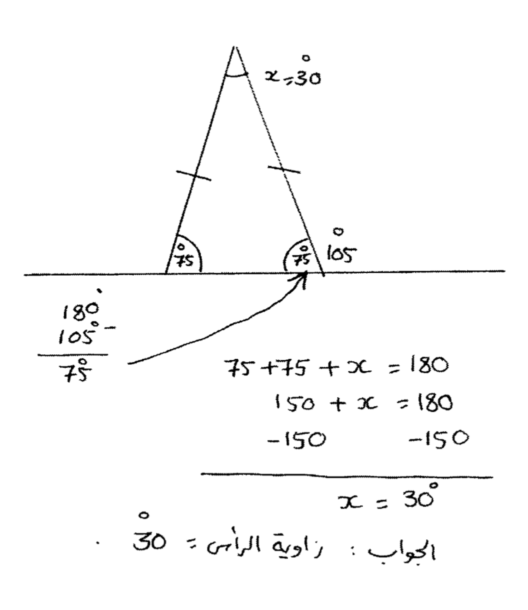
(0) الجواب خاطئ بالكامل، وغير مترابط، أو غير منطقي، أو هناك جواب صحيح تم الحصول عليه بعملية غير صحيحة.

الطالب 1 Student

الدرجة (4) GRADE

يقوم برسم مخططا رسوميا دقيقا لمثلث متساوي الساقين مع امتدادات قاعدته. ويؤشر جميع المعلومات – وثيقة الصلة بالموضوع، أي المواقع الصحيحة للزوايا والأضلاع في ضوء علاقتها بالمثلث متساوي الساقين قاعدته.

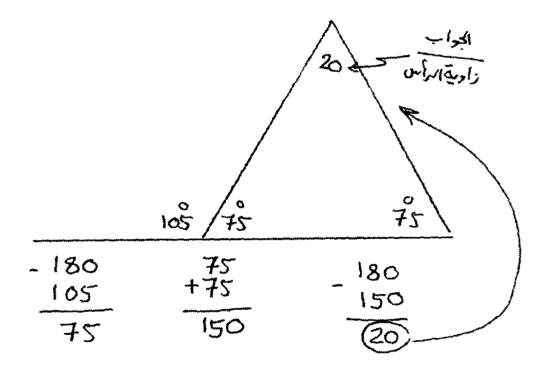
يحدد قياس إحدى زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين عن طريق إيجاد قياس الزاوية المكملة للزاوية الخارجية 105°، والتي تساوي 75°. وباستخدام الحقيقة القائلة بان زوايا قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون متطابقة، يجد قياس الزاوية الأخرى لقاعدة المثلث متساوي الساقين، والتي ستكون قياسها 75°.يستخدم الحساب أو الجبر للحصول على قياس زاوية الرأس 30° في المثلث متساوي الساقين وعن طريق استخدام الحقيقة القائلة بان مجموع قياس زوايا المثلث تساوي 180°.



Student 2 الطالب

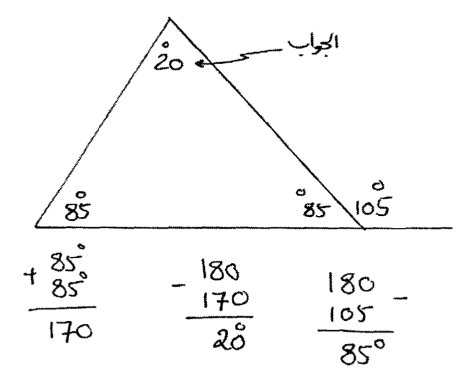
الدرجة (3) **GRADE**

المخطط الرسومي وتأشيراته صحيحة، ولكنه ارتكب خطأ حسابيا في احتساب قياس زاوية رأس المثلث متساوي الساقين.



الطالب 3 Student

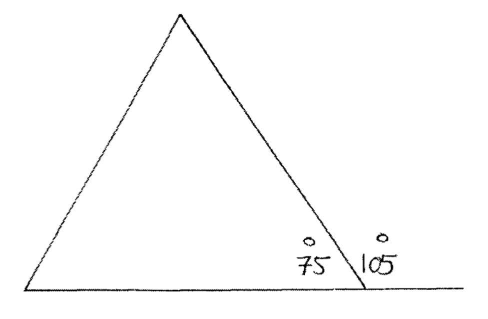
الدرجة (2) GRADE
ارتكب خطأ حسابيا عند احتساب قياس الزاوية المكملة للزاوية الخارجية 105° لذا انتقل هذا الخطأ إلى قياس زاوية رأس المثلث متساوي الساقين.



الطالب 4 Student

الدرجة 1 GRADE

يوجد قياس الزاوية المكملة للزاوية الخارجية °105 فقط



الطالب 5 Student

الدرجة (0) GRADE

الجواب خاطئ بالكامل، وغير مترابط، أو غير منطقي، أو هناك جواب صحيح تم الحصول عليه بطريقة غير صحيحة.

180 - 105

$$\begin{array}{r} 180 \\ -\ 105 \\ \hline 85 \end{array}$$

الجواب 85

إعداد اختبار صفي
Construction Class Test

يتم التضلع بفن إعداد اختبار صفي جيد مع مرور الوقت، وبمساعدة أكبر عدد ممكن من الأصول والمنابع. ويستطيع المعلمون المبتدءون الاعتماد على خبرة الغير، إضافة إلى اختباراتهم المبكرة. وينبغي عليهم عدم التردد في عمل ذلك. يجب على المعلمين التشاور مع المشرفين، ومع نظرائهم، وبالخصوص أولئك الذين قاموا أو يقومون بتعليم نفس المساقات الدراسية التي يمارسونها بالوقت الحالي، وان يقوموا بمراجعة وتفحص ملفات الامتحانات القديمة للاطلاع على أساليبها، ومحتواها، وصياغتها.

تحتوي الكثير من مكاتب الأقسام على مثل هذه الملفات لغرض الرجوع إليها، وعلى المعلم الجديد أن يترك التردد جانبا في الرجوع إليهم. وسيكون بقية أعضاء قسم الرياضيات سعيدين بمشاركة خبراتهم مع نظائرهم الجدد، وستكون اقتراحاتهم حول إعداد اختبارات الصف، في كثير من الأحوال، مفيدة ونافعة. ينبغي على المعلم الجديد الاعتماد على جميع أصول المساعدة بقدر الإمكان، لكي يتجاوز الأخطاء التي وقع فيها الغير بالماضي.

كيف تبدأ ؟ How to Begin ?

تكمن الخطوة الأولى لإعداد اختبار ما، بالطبع، في تحديد ماهية ما يراد اختباره. فلكل اختبار هدف محدد، سواء كان محدودا أم شاملا، كما وينبغي أن تكون الغاية واضحة العالم في ذهن المعلم لكي يستطيع إعداد الاختبار المناسب للصف.

قد يكون الاختبار محدودا جدا بمجاله، فيغطي موضوعا أو موضوعين ليس إلا، ويستمر لفترة قصيرة، تتراوح بين خمسة إلى عشرة دقائق. إن مثل هذه الاختبارات تعرف عادة بالامتحانات السريعة Quizzes، و تحوي بصورة عامة على سؤال منفرد أو بضعة أسئلة بسيطة.

تصمم الامتحانات القصيرة، عادة، لتحديد وقياس فهم الطالب للموضوع الذي تلقاه بالدرس في اليوم السابق. أو قد تعطى لتحديد فيما إذا قد قام الطلبة بإعداد واجباتهم البيتية المحددة لهذا اليوم، والتي تمتاز أسئلتها بكونها مقاربة للأسئلة المحددة في يوم سابق كواجب بيتي.

بصورة عامة لا يتم إشعار الطلبة بالامتحان السريع بصورة مسبقة، ولكن ينبغي عليك إشعار الصف في بداية الفصل الدراسي بإمكانية استخدام آلات حاسبة علمية أو رسومية لحل أية مسألة خلال العمل الصفي اليومي، أو الواجب البيتي، أو الامتحان السريع، أو الاختبار (ما لم يتم توجيههم من قبلك لأداء أمور أخرى).

تظهر العينات 4-1 نماذج من الامتحانات السريعة. كما ويمكن أن يعد لامتحان أكثر تفصيلا لأغراض قياس مدى تضلع الطالب وتمكنه من موضوعات متعددة، ويفضل أن يخطط للامتحان بحيث يستوعب فترة الدرس لكي يتمكن الطلبة من إكمال حل مسائله. يتم إعداد مثل هذه الاختبارات، عموما، عند اكتمال وحدة عمل Unit Work في الصف. لذا ينبغي إشعار الطلبة، قبل بضعة أيام، ليتمكنوا من التهيؤ والتحضير المناسب عبر مراجعة واستعراض أقسام المنهج، والملاحظات، والواجبات البيتية المحددة، والتمارين الصفية. كما ينبغي عمل قائمة بالموضوعات على لوحة الصف مع إعطاء أسئلة اختبار نموذجية في اليوم الذي يسبق الاختبار. إن مثل هذه الاختبارات تمتلك وزنا أكبر في تقييم الطلبة مما توفره الامتحانات السريعة، ويتوقع من الطلبة بذل المزيد من الجهد والمثابرة بالتهيؤ لمثل هذه الاختبارات.

إن مجال الاختبارات التي تستغرق جل وقت الدرس يمتاز بكونه أكثر رحابة، بصورة عامة. تمثل العينات 7-5 ثلاثة نماذج اختبار: اثنان منها عبارة عن اختبارات تستغرق جل وقت الدرس، وواحد امتحان (نصف السنة) والذي يتطلب، بصورة عامة، وقتا مضاعفا. تناول هذه العينات بعناية من خلال دراسة متأنية لأسئلتها، وقيم نقاطها، وأنواع الأسئلة، واستخدام وحدات تقدير إضافية Extra Credit، وغيرها من الأمور. ولاحظ بأن امتحانات الإجابة التعاونية على الأسئلة سوف تكون ذات أهمية بالغة كأداة تدريسية عندما يحتوي الاختبار على موضوعات تناسب النقاشات الدائرة في المجموعة الصغيرة، وعندما يكون بعض أعضاء كل مجموعة، أعمق معرفة بمادة الدراسة، وأن البقية تكون أقل فهما بهذه الموضوعات.

إن الإجابات التي يتم إعدادها بصورة تعاونية تعد درسا نقديا تراجع فيه الموضوعات المطروحة في الاختبار، وستكون ذات أهمية بالغة للطلبة الذين هم بحاجة دائما إلى المراجعات أكثر. إن مسؤولية المجموعة تجاه فهم كل طالب لكل إجابة سوف تتعزز عندما يتم تذكيرهم بأن أي طالب قد يطلب منه توضيح وبيان أي حل يظهر ضمن صحائف الإجابات المعدة بصورة تعاونية، وان الدرجة التجميعية للامتحان تعود إلى كل عضو من أعضاء المجموعة.

عينة Sample 1

امتحان سنة أولى جبر – سريع – (10) دقائق

اعرض جميع العمل   الاسم

الإجابات

1- عبر عما يلي بتعبير ثلاثي الحدود $(2a+5)^2$.   1 ....

2- عند أية قيمة من قيم المتغير سيكون الكسر   2 ....

$\frac{X+2}{X-3}$ بلا معنى

أ. 3   ب. 2   ج. –3   د. –2

3. عبر عما يلي بأبسط صيغة $\frac{X^2-4}{3X-6}$.   3 ....

4. حلل بصورة كلية 3ax+x   4 ....

5. إن حاصل ضرب عاملين هو $2X^2+X-6$ 5 ....

فإذا كان أحدهما (X+2)، فما هو العامل الآخر؟

عينة Sample 2 امتحان سريع هندسة مستويات (5 دقائق)

إن قياس زاوية خارجية عند قاعدة مثلث متساوي هو °105، جد قياس زاوية المثلث. وبين جميع تفاصيل العمل.

عينة Sample 3 امتحان سريع – جبر سنة ثانية (8 دقائق)

لديك المعادلة: $2X^2-3X-7=0$

1. احسب قيمة المميز Discriminant.

2. صف طبيعة جذور المعادلة.

عينة Sample 4 امتحان سريع للصف الثامن Eighth Grade (5 دقائق)

1- ما قيمة %20 من العدد 40؟

2- عبر عن %7 كمرتبة عشرية.

3- ما هي النسبة المئوية التي تكافئ $0.\bar{3}$؟

عينة 5 Sample

اختبار هندسي عادي أو تعاوني – متوازي الأضلاع (فترة كاملة)

الاسم: ____________

أولا: ضع الإجابة في الفراغ المخصص (5 نقاط لكل منها)

1-5 اشرح ما إذا كان: دائما، بعض الأحيان، ليس صحيحا.

_____ 1. أقطار المعين ينصف بعضهما الآخر.

_____ 2. إذا كان مستقيمان عموديان على نفس المستقيم في المستوي، فإن المستقيمين متوازيان.

_____ 3. الشكل الرباعي متساوي الأضلاع، متساوي الزوايا.

_____ 4. إذا كان قطرا الشكل الرباعي متعامدين، فإنه معين.

_____ 5. الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متكاملة.

6-9 اختر افضل إجابة:

_____ 6. الزاوية الخارجية عند قاعدة المثلث متساوي الساقين تكون

أ. (حادة) ب. (منفرجة) ج. (قائمة) د. (تعتمد على نوع المثلث)

_____ 7. إذا كانت قياسات زوايا مثلث بالرموز x، y، x+y فإن:

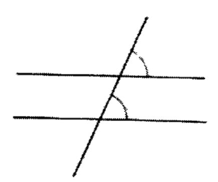
أ. (حاد) ب. (منفرج) ج. (قائم) د. (غير معروف–يعتمد على قيمتي y,x).

_____ 8. أي مما يلي استخدم في البرهنة على أن الرسم المرفق (لمستقيم مواز لمستقيم معطى خلال نقطة محددة) كان صحيحا.

(أ) من خلال نقطة خارجية معطاة يمكن رسم خط مستقيم واحد // للمستقيم المعطى.

(ب) إذا كان مستقيمان متوازيان، فإن الزوايا المتناظرة تكون متطابقة

(ج) المستقيمان // فإن الزوايا المتناظرة متطابقة.



_____ 9. في المثلث ABC، مد الخط المستقيم $\overline{BC}$ خلال النقطة C مكونا $\angle x$. أي مما يأتي ينبغي أن يكون صحيحا؟

(أ) $m\angle x \rangle m\angle BCA$ (ب) $m\angle x \langle m\angle BCA$ (ج) $m\angle x \rangle m\angle LB$ (د) $m\angle x \langle m\angle B$

10-13 إذا كان دائما صحيحا اكتب "صحيح"، وبعكسه اكتب "خطأ".

_____ 10. في مستوى، المستقيمان إما أن يكونان متوازيين أو متقاطعين.

_____ 11. إذا قسم قطر الشكل الرباعي إلى مثلثين متطابقين، فإن الشكل الرباعي هو متوازي أضلاع.

_____ 12. منصفا الزوايا المتقابلة بالمتوازي الأضلاع متطابقة.

_____ 13. إذا كان قطرا الشكل الرباعي متطابقان، ومتعامدان، فإن الشكل الرباعي هو مربع.

14-16 أعداد

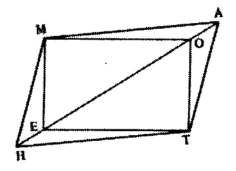
______ 14. جد محيط المثلث الذي نشأ عن ربط نقاط منتصف أضلاع المثلث بالاطوال الآتية: 5، 12، 13.

______ 15. لديك المعين ABCD حيث AB=5 و $m\angle ABC = 120°$ ، جد BD.

______ 16. لديك متوازي الأضلاع ABCD حيث $m\angle A=50°$ ، و $m\angle ABD= 75°$ ، جد قياس $m\angle CBD$.

ثانيا: (20 درجة)

القضايا　　　　الأسباب



المعطى: متوازي الأضلاع MOTE

$\overline{AE} \cong \overline{HO}$　　　　اطو الصفحة واستمر بالبرهان في الجانب الآخر

برهن: MATH متوازي أضلاع

للحصول على تقدير ودرجات إضافية (اعرض العمل على الجانب الآخر)

برهن: إذا كانت أقطار شبه المنحرف متطابقة، يكون متساوي الساقين.

Sample 6 عينة

اختبار رياضيات، مقدمة للجبر - الكسور والأعشار (حصة كاملة)

الاسم: ____________ التاريخ: ____________

1. جد المساحة:

13 1

8 02

2. جد المحيط:

12

8 03

3 اطرح 0.33 من 269.

4. جد نواتج القسمة:

أ. $7\overline{)14.35}$ ، ب. $0.5\overline{)51.510}$

5. ارسم دائرة حول الكسور المساوية للكسر الأول في كل مما يأتي:

(أ) $\frac{1}{2}$ $\quad \frac{20}{40}, \frac{7}{15}, \frac{5}{10}, \frac{4}{8}, \frac{3}{5},$

(ب) $\frac{2}{5}$ $\quad \frac{14}{35}, \frac{7}{15}, \frac{8}{20}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9},$

6. بسط ما يأتي:

(أ) $\frac{9}{24}$ (ب) $\frac{8}{56}$ (ج) $\frac{5}{45}$

7. استخدم الرمزين < و > بين الأرقام الآتية:

(أ) 8 3 ______

(ب) $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{7}$ ______

(ج) $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{5}$ ______

8. ارسم شكلا لتوضيح الكسر $\frac{2}{3}$.

9. في الكسر $\frac{9}{4}$، الرقم 9 هو جزء الكسر الذي يطلق عليه ______.

10. جد الرقم المفقود:

(أ) $\frac{2}{3} = \frac{__}{12}$ (ب) $\frac{4}{5} = \frac{__}{100}$

11. اجمع (قم بتبسيط الجواب):

(أ) $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ (ب) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10}$ (ج) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

12. جد الرقم المفقود:

(أ) $\frac{13}{8} = 1\frac{?}{8}$ (ب) $\frac{13}{4} = ?\frac{1}{4}$

13. اجمع (وبسط):

(أ) $2\frac{3}{8} + 3\frac{5}{8}$ (ب) $5\frac{7}{10} + 4\frac{9}{10}$

14. غير إلى كسور مركبة:

(أ) $\frac{38}{5}$ (ب) $\frac{29}{4}$

15. اكتب كسورا مكافئة بالمضاعف المشترك الأصغر لكل من الأزواج التالية:

(أ) $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{6}$

(ب) $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{9}$

عينة 7 Sample: سنة ثانية جبر- امتحان نصف السنة (80 دقيقة)

لا تكتب على هذه الورقة *اظهر عملك على ورقة الإجابة* *اكتب بوضوح*

القسم الأول: اجب عن جميع الأسئلة (5 درجات لكل مما يأتي).

1. عبر بدلالة i مجموع $5i$ و $3\sqrt{-100}$.
2. (أ). إذا كان $93.000.000 = 9.3 \times 10^n$ ، جد قيمة n.
   (ب). إذا كان $0.0000286 = 2.86 \times 10^k$ ، جد قيمة K.
3. بسط ما يأتي:

$$\frac{\frac{a}{b}-2}{4-\frac{a^2}{b^2}}$$

4. إذا كان a=log x ،b=log y ،c=log z عبر عن $\log\frac{\sqrt{xy}}{z^3}$ بدلالة a، b، c.
5. اكتب المعادلة التربيعية التي جذورها $1+i$ و $1-i$.
6. استخدم آلة حاسبة لإيجاد قيمة x إذا كان $\log x = 8.4365 - 10$
7. إذا كانت $x = 7$ ، جد قيمة $3x^{\circ} + (x+2)^{1/2} - 49x^{-2}$.
8. إذا كان R= $\{(1,2)، (-1,5)، (6,2)، (3,-7)\}$ جد قيمة R^{-1} وبيّن فيما إذا كانت R، R^{-1} دوالا، ولماذا؟.
9. حل المعادلة بدلالة x: $3^x = 9^{x-1}$.
10. جد قيمة k بحيث أن المعادلة الآتية تكون متساوية الجذور $x^2-4x+k=0$.
11. إذا كان $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ، جد قيمة $f(1/2)$.

القسم الثاني: اجب عن (3) أسئلة فقط (15 درجة لكل مما يأتي).

12. جد الجذور مقربة إلى اقرب مرتبة عشرية $2x^2-3x-1=0$.
13. حل المعادلات الآتية بدلالة a، b، c وتأكد من صحة ذلك في المعادلات الثلاثة.

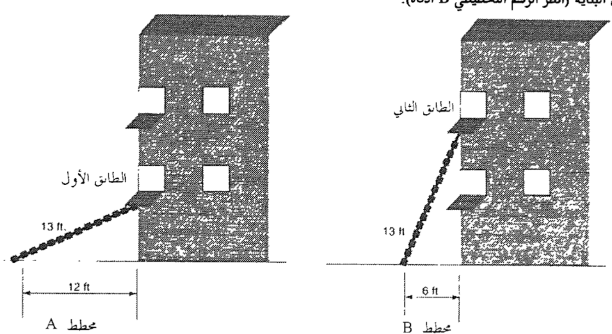
$$a + 3b - 4c = -13$$
$$2a - b + 2c = 4$$
$$4a - 6b + c = -1$$

14. اكتب معادلة أو مجموعة معادلات يمكن استخدامها في حل المسائل الآتية. وبين في كل حالة ماذا تمثل المتغيرات (حل المعادلات ليس مطلوبا)
   أ. قارب بخاري يقطع مسافة 8 أميال جنوبا في $\frac{1}{3}$ ساعة، ثم يعود إلى الشمال حيث نقطة بدايته في $\frac{1}{2}$ ساعة. جد (مقدرا بوحدة ميل/ساعة) سرعة القارب في الماء الراكد، وسرعة جريان التيار.
   ب. عدد يتألف من رقمين هو أقل بـ 2 من 5 أضعاف حاصل جمع رقميه. إذا تم قلب الرقمين، سيكون الرقم الجديد أكبر من الرقم الأصلي بـ 9. جد الرقم الأصلي.

عينة Sample 8 تقييم أداء

مسألة السلم الخشبي Ladder Problem

تم تثبيت سلم خشبي بطول 13 قدم على بناية فوصل إلى حافة نافذة الطابق الأول (انظر الرسم التخطيطي A أدناه). تبعد قاعدة السلم بـ 12 قدم عن قاعدة البناية. ولكي يصل السلم الخشبي إلى حافة الطابق الثاني من البناية، تم تحريكه بحيث اصبح أكثر قربا بـ 6 أقدام من البناية (انظر الرسم التخطيطي B أدناه).



جد المسافة التي تحركها السلم إلى أعلى (مقربا إلى اقرب قدم) البناية من حافة نافذة الطابق الأول إلى حافة نافذة الطابق الثاني. وبين كيفية حصولك على الإجابة. إن عناوين تعليقات الخطوط الحمراء الآتية ستوفر خطوطا دالة وقائمة معايير يمكن استخدامها في تقييم المسألة أعلاه والتي ترتكز إلى الأداء، وسيتم احتساب درجاتها على مقياس بأربعة نقاط، وكما يأتي:

(4) يجد ارتفاع 5 أقدام في الرسم التخطيطي A باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية. يجد ارتفاع 11.53 قدم أو 12 قدم في الرسم التخطيطي B باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية. يطرح 5 أقدام من 12 قدم للحصول على الإجابة الصحيحة 7 أقدام.

(3) جميع الحسابات صحيحة، لكن الإجابة لم تقرب إلى اقرب قدم

أو

ارتكب خطأ في حساب الارتفاع ولم يجد قيمة الفرق.

(2) توصل بنجاح إلى 5 أقدام بوصفها الارتفاع الأول في الرسم التخطيطي A وبذل جهدا لاستخدام مبرهنة فيثاغورث في إيجاد الارتفاع بالرسم التخطيطي B ولكنه قام بحسابات/تعويض خاطئة.

أو

قام بحساب الارتفاعين المطلوبين باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو دوال مثلثية، ولكن باستخدام تعويضات خاطئة.

(1) وجد ارتفاع 5 أقدام كالارتفاع في الرسم التخطيطي A فقط.

أو

حاول استخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية لكن التعويضات والإجابة كانت غير سليمة.

الطالب 1 Student

الدرجة 4 GRADE:
يجد ارتفاع 5 أقدام في الرسم التخطيطي A باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية. يجد ارتفاع 11.53 قدم أو 12 قدم في الرسم التخطيطي B باستخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية.
يطرح 5 أقدام من 12 قدم للحصول على الإجابة الصحيحة 7 أقدام

الرسم التخطيطي A

باستخدام نظرية فيثاغورث

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 13^2 - 12^2$

$b^2 = 169 - 144$

$b^2 = 25$

$b = 5$ أقدام

$12 - 5$

7 قدم

الرسم التخطيطي B

باستخدام نظرية فيثاغورث

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 13^2 - 6^2$

$b^2 = 169 - 36$

$b^2 = 133$

$b = \sqrt{133}$

$b = 11.53$

$b = 12$ قدم

(مقرباً لأقرب قدم)

Student 2 الطالب

GRADE 3 الدرجة

جميع الحسابات صحيحة، لكن الإجابة لم تقرب إلى أقرب قدم.

$$C^2 = a^2 + b^2$$
$$13^2 = 12^2 + b^2$$
$$169 = 144 + b^2$$
$$-144 \quad -144$$
$$\sqrt{25} = \sqrt{b^2}$$
$$5 = b$$
$$b = 5'$$

$$C^2 = a^2 + b^2$$
$$13^2 = 6^2 + b^2$$
$$169 = 36 + b^2$$
$$-36 \quad -36$$
$$\sqrt{133} = \sqrt{b^2}$$
$$11.532' = b$$

$$11.532 - 5 = 6.532$$

6.532 قدم

الطالب 3 Student

الدرجة 2 GRADE

توصل بنجاح إلى 5 أقدام بوصفها الارتفاع في الرسم التخطيطي A، وبذل جهدا لاستخدام مبرهنة فيثاغورث في إيجاد الارتفاع بالرسم التخطيطي B، ولكنه قام بحسابات / تعويضات خاطئة (66 لقيمة b^2) وقد انتقل هذا الخطأ خلال حل المسألة.

الرسم A

$a^2 + b^2 = c^2$

$12^2 + b^2 = 13^2$

$144 + b^2 = 169$

$b^2 = 25$

$b = 5$

الرسم B

$a^2 + b^2 = c^2$

$6^2 + b^2 = 13^2$

$66 + b^2 = 169$

$b^2 = 103$

$b = \sqrt{103}$

$b = 10.14$

$b = 10$ قدم

10 قدم
\- 5 قدم

5 قدم

الطالب 4 Student

الدرجة 1 GRADE

يحاول استخدام مبرهنة فيثاغورث أو الدوال المثلثية لكن التعويضات والإجابات كانت خاطئة. اكمل جزءا محددا منها فقط، ولا يوجد حل نهائي.

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$12^2 + b^2 = 13^2$$
$$144 + b^2 = 169$$
$$b^2 = 25$$
$$b = 5$$

سواء كان الامتحان من النوع القصير، أو امتحان نصف السنة طويل، ينبغي اتباع طرق إجرائية محددة خلاله. وفي حالة اختيار الموضوعات والأسئلة، ينبغي على المعلم أن يحاول تضمين عدد من المسائل تشابه تلك التي أنجزت داخل الصف، أو كجزء من الواجب البيتي المحدد، ولكن بأسلوب يسود فيه تحد أكبر. إن الاختبار الذي يمتلك أهمية خاصة لدى الطلبة توازي تلك التي يمتلكها الاختبار الصفي بالفترة الزمنية الكلية للدرس ينبغي أن لا يكون محشووا بالمفاجآت (أسئلة غير متوقعة أو مبتكرة) ولكن ينبغي إعداده بحيث أن الطالب الذي قام بإنجاز واجباته بصورة امينة، ولديه استيعاب مقبول بالموضوع، سوف ينال فرصة مناسبة للنجاح.

يمكن عرض عينة اختبار ومناقشتها في اليوم الذي يسبق الاختبار الحقيقي بحيث يصبح الطلبة أكثر ألفة مع صيغة الاختبار وأسلوبه، ونوع الأسئلة التي ستطرح خلاله. وعليه ستتوفر للطلبة فرصة التركيز على المحتوى المفاهيمي والمعرفي في يوم الاختبار.

ينبغي أن يؤشر المعلم أوراق الاختبار فورا، ودون إبطاء. وسيكون استخدام مساعدي الطلبة Student Assistants في تقدير الدرجة ذو خطورة بالغة لأنهم قد يرتكبون أخطاء،مع توفر احتمالية محاباتهم، وميلهم إلى أصدقائهم. لذا يمكن اعتماد مساعدي الطلبة، فقط، عندما يمكن إرشادهم ومراقبتهم بعناية.

قد يكون جديرا بالاهتمام (بالنسبة للطلبة) القيام بتكليفهم، بين الحين والآخر، بتمرين محدد أو نشاط مقابل درجات إضافية لغرض تحسين ملكة التفكير النقدي لديهم ولكي يصبحوا أكثر اعتيادا على تعليقات الخطوط الحمراء.

ومن ناحية أخرى، فإن من الأفضل للمعلم تثبيت درجات الامتحانات لكي يكون أكثر قربا من جهة: تشخيص، وتحديد الأخطاء التي يرتكبها الطلبة، مع ازدياد قدرته على التعامل معها. ووفق المواصفات المثالية، ينبغي أن تثبت درجات الامتحان وتعاد إلى الطلبة في اليوم التالي، بينما لا زالت مادة الاختبار عالقة في أذهان الطلبة. وإذا أعيدت الاختبارات في

بداية الفترة، ينبغي أن يكون المعلم متهيئا لاستعراض الاختبارات خلال جل تلك الفترة (باستثناء الامتحانات السريعة التي قد روجعت مباشرة بعد إعطاءها). أما إذا أعيدت أوراق الاختبار في نهاية الحصة، فيمكن تكليف الطلبة بتصحيح أوراقهم في البيت، والتهيؤ للمراجعة داخل الصف في اليوم القادم. وتكمن أهمية إعادة أوراق الاختبار عند نهاية الحصة في تجنب الشغب والهياج الذي قد ينشب عن إعادتها في البداية، نظرا لان الطلبة شغوفون بمعرفة الدرجات التي حصل عليها أقرانهم بالمرحلة، أكثر من اهتمامهم بموارد الخطأ في أوراق اختبارهم.

اختيار الأولويات من بين المفردات والمفاهيم التي تم تدريسها

Selecting Priorities Among Topics and Concepts Taught

لا يوجد ثمة اختبار، مهما كان اتساع مدى موضوعاته، يستطيع ضمان اختبار كل صغيرة وكبيرة لدى الطالب. وعندما نتذكر بأن معظم الاختبارات التي تعطى من قبل المعلمين خلال مدة الفصل الدراسي المدرسي، أو خلال السنة تكون محددة بحصة درس منفرد، سوف ندرك بأن الأولويات تشكل مطلبا ضروريا، وينبغي إرساء حدودها بعناية. لذا ينبغي على المعلم أن يختار، من بين جميع المفردات التي تم تدريسها داخل حلقة الدرس، خلال فترة زمنية محددة، ما ينبغي تضمينه أو استبعاده من دائرة الاختبار. إن هذا الأمر لا يعني بأن الموضوعات الأخيرة والختامية لن يتم إدراجها في الاختبار، ولكنها يمكن أن تختبر في الاختبارات الصفية – المستقبلية، وخصوصا، في أحد الاختبارات التراكمية، وستدرج – بصورة أكيدة – في امتحانات نصف السنة والامتحانات النهائية، سواء كان المعلم متهيئا أو بالتنسيق من خلال القسم. كما ينبغي على المعلم، كذلك، أن يقرر فيما إذا كان سيرجع بصورة حلزونية إلى الموضوعات التي تم تدريسها في مراحل مبكرة من الفصل الدراسي.

وإذا توفرت إمكانية، ينبغي على المعلمين إعطاء اختبار يستمر لفترة تعادل حصتين دراستين. وبهذه الطريقة سيكون الاختبار أكثر شمولا وتفصيلا ولن يعاني الطلبة من الحاجة إلى التعجل في إجاباتهم.

أنواع الاختبارات Types of Tests

يعتمد نوع الاختبار المقدم إلى طلبة درس الرياضيات، إلى حد كبير، على الغاية التي اعد الاختبار من اجلها. وبصورة عامة، فإن المعلم يسعى من إعداد الاختبار قياس إنجاز الطالب. فتتراوح اختبارات إنجاز الطلبة في طيفها من الامتحانات السريعة – المختصرة إلى الأسئلة الشاملة التي تطرح في امتحانات نصف السنة والامتحانات النهائية. قد يعد الامتحان السريع لاختبار فهم الطالب بمفهوم ما أو مفهومين، أو قد يصمم لتحقيق بداية عاجلة لدرس من الدروس، أو لتفحص قدرة الطالب على فهم الواجبات البيتية المحددة، أو بالعمل الذي تلقنه خلال اليوم السابق. إن إدارة وتدبير أنواع متعددة للتقييم ستزود المعلم بمراتب ومعلومات إضافية تسهم بدورها في تقدير عمل الطالب وإنجازاته بدقة.

تتضمن الاختبارات الشاملة لإنجازات الطالب، اختبارات الصف بحصة كاملة حول العمل الذي تم تغطيته خلال فترة ممتدة إلى أمد طويل، ولفترة تصل إلى أسبوعين أو أكثر، وامتحانات الوحدة، وامتحانات نصف السنة، والامتحانات النهائية.

يمكن إعداد الامتحانات النهائية بواسطة معلمين فرديين لأغراض الإدارة في صفوفهم المدرسية، أو قد تعد بواسطة لجنة من أعضاء القسم لاستخدامات المنظمة. وبأي حال من الأحوال ينبغي أن تعد الاختبارات بعناية لقياس موضوعات الوحدة، أو الفصل الدراسي، والحد الذي حققه الطالب من الأهداف.

قد يطلب من معلمي الرياضيات، في بعض الأحيان، إعداد أنواع أخرى من الاختبارات. وتستخدم الاختبارات التشخيصية Diagnostic Tests لبيان مقدرة الطالب ومواطن ضعفه في ميدان محدد بالرياضيات، بحيث يستطيع المعلم بناء وتخطيط أنشطة علاجية لمواطن الضعف الموجودة لدى الطلبة. وبرغم وجود عدد لا بأس به من هذه الاختبارات التي أعدت تجاريا للعرض على الحواسيب، فقد يطمح المعلم بإعداد اختباره / اختبارها الشخصي لقياس جوانب محددة من الخلفية العلمية للطالب، أو تكملة المعلومات التي قد توفرت من خلال الاختبارات القياسية. ومع ذلك عندما يعد المعلمون اختبارا ما، ينبغي أن يصار إلى توفير مجموعة من الخطوط العامة – الإرشادية لتقييم صلاحية الاختبار بدلالة معيار صدق المحتوى، وموثوقية الاختبار.

ما هو صدق المحتوى؟ :What Is Content Validity?

إن المعيار الأساسي للاختبار الصحيح يكمن في قدرته على قياس حصيلته التي تتطابق مع أهدافه التعليمية. إن أي أداة تعمل على قياس ما نتوقع منها قياسه يقال عنها بأنها تمتلك

صفة "صدق المحتوى". وإذا لم تمتلك إدارة التقييم هدفا أو غاية ما. فإن من المستحيل تحديد صدق المحتوى وسريان تأثيره.

ما هي موثوقية الاختبار؟ What Is Test Reliability?

إن اصطلاح الموثوقية يستخدم لبيان دقة الاختبار. وتشير الموثوقية إلى درجة توافق الاختبار وملاءمته في قياس ما تريد قياسه. آن بعد آن، وفقرة بعد فقرة. إن الثبات والرسوخ حول عاملي الزمن والفقرة هو المفهوم الأساس الذي ترتكز إليه الموثوقية.

أنواع الأسئلة Types of Questions

يتم تحديد أنواع الأسئلة المتضمنة في اختبار ما في ضوء جملة من العوامل. والتي تشمل: مستوى قابلية الصف وقدرات طلبته. وطبيعة المادة التي يراد اختبارها، والوقت المتوفر لعملية الاختبار. وندرج فيما يأتي أمثلة لبعض أنواع الأسئلة التي يشيع وجودها في اختبارات مادة الرياضيات:

- **أسئلة صح / خطأ False-True Questions**: تتضمن هذه الأسئلة قرارا بسيطا بشكل من الأشكال. وقد يحتاج المعلم إلى تضمين إجابة (خطأ) بتعديل الطالب للعبارة التي عرضت عليه في الاختبار.
- **أسئلة: دائما، في بعض الأحيان، قط Always-Sometimes-Never Questions**: إن هذه الأسئلة هي عبارة عن تعديل لأسئلة (صح/خطأ) نظرا لكونها تحتاج إلى تحديد فيما إذا كانت القضية تصح دائما (والتي تؤشر بالإجابة "صح" إذا كانت الصيغة صح/خطأ) أو تكون في بعض الأحيان صحيحة، أو لا تصح قط (إن كل من الخيارين الأخيرين تتطلب الإجابة بـ "خطأ" في اختبارات صح/خطأ). إن القرار الذي يمتاز بخيارين (في النوع السابق) اصبح قرارا يوازن بين ثلاثة خيارات.
- **أسئلة الاختيارات المتعددة Multiple Choices Questions**: تمتاز هذه الأسئلة بروح تحدي أكبر مما هي عليه في النوعين السابقين نظرا لأنها تحتاج إلى اختيار الجواب الصحيح من أربعة أو خمسة إجابات مطروحة في السؤال.
- **أسئلة الاختيارات المتعددة – المعززة Enhanced Multiple Choices Questions**: تتطلب من الطلبة إقامة علاقات بين جملة من المفاهيم قبل الوصول إلى الإجابة التي تمثل "الخيار الأفضل". وقد يجد الطلبة من الضروري استخدام أكثر من استراتيجية واحدة لحل المسألة، وعليه سيكونون بحاجة إلى ثلاثة أو أربعة دقائق إضافية للإجابة على السؤال. ينبغي على الطلبة عرض أسباب اختيار افضل إجابة، بصورة موجزة.
- **أسئلة الإتمام Completion Questions**: تقلل هذه الأسئلة عدة جوانب من الحزر والتخمين وتتطلب من الطالب تزويد الإجابة الصحيحة لعبارة غير متكاملة.
- **أسئلة المماثلة Matching Questions**: وتسمح ببعض التخمين ولكن يمكن التقليل من ذلك عن طريق توفير مزيد من الخيارات في العمود الذي يتم الاختيار من خلاله بالمقارنة مع بقية الأعمدة.
- إن التمارين العددية والجبرية هي "أسئلة موضوعية" تستخدم لاختبار فهم المبادئ، واستدعاء الصيغ وتطبيقها، وأمور أخرى مماثلة.
- **أسئلة المناقشة Discussion Questions** التي تدعو الطالب إلى مناقشة موضوع ما، وتوضيح مفهوم (تم اختبار محتواه). ويتضمن هذا الأمر توضيح وشرح نظرية، ووصف علاقة بين أكثر من موضوع، والبرهنة على نظرية ما،... الخ.

إن أنواع الأسئلة المذكورة آنفا (باستثناء النوع الأخير) هي موضوعية بالأساس، أما البراهين الهندسية فتقع في فئة الموضوعات الذاتية Subjective (كما في النوع الأخير من الأسئلة)، والتي تقابل أسئلة الاختبار المقالية Essay Questions في ميادين موضوعات أخرى. وكما هو الحال بالنسبة لأسئلة الاختبار المقالية، يمكن إعداد البرهان بعدة طرق تصح جميعها (يعني، قد يوجد أكثر من إجابة صحيحة لنفس السؤال). وتحتاج هذه الأسئلة إلى استدعاء مسلمات، وتعاريف، ونظريات قد برهنت في مراحل سابقة. وقد تتطلب أيضاً إلى عملية تذكر، لحد ما، نظرا لان بعض النظريات تمتلك أهمية خاصة بحيث، رغم وجود براهينها في الكتب المنهجية، فإن استدعاء الطالب لتفاصيل برهانها يمتلك أهمية بالغة: إن النظريات الأخرى التي تطلب براهينها في الامتحانات توفر قياسا لقدرة الطالب على الاستنتاج والمقايسة العقلية بصورة منطقية ومتسلسلة أكثر من تلك التي يمكن تذكرها دائما.

إن الأسئلة التي تتطلب إلى استنتاجات متسلسلة Sequential Reasoning عبر عدة أجزاء بحاجة إلى أن تعد بعناية بالغة، ويفضل أن تكون أجزاؤها مستقلة عن بعضها، كلما كان ذلك ممكنا. وبعكسه، فإن ظهور خطأ مبكر في عمل

الطالب سينجم عنه مجموعة أخطاء بحيث يصبح من المستحيل على الطالب استمرار العمل على الأقسام اللاحقة للسؤال. إن المثال الأول – الآتي – يمثل نظرية يتوفر برهانها في جل الكتب المنهجية التي تعالج الهندسة المستوية. ويمكن أن تعد المثال الثاني مثالا مبتكرا لأنه يقيم تحديا مع الطلبة لرسم وتأشير رسم تخطيطي، بصورة صحيحة، وإقامة استدلال منطقي سليم. ويتطلب استدعاء إضافي لخصائص مثلثات متماثلة، وتناسبات Proportions، واستعراض مفاهيم نسب التشابه Ratio of Similitude. وأخيرا، فإن السؤال يجمع بين الهندسة، والجبر، والحساب.

مثال EXAMPLE (هندسة) (Geometry)

1. برهن أن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي $180°$.
2. في متوازي الأضلاع ABCD، تمثل النقطة M نقطة منتصف المستقيم $\overline{AD}$ ، وان المستقيم $\overline{BM}$ يقطع القطر $\overline{AC}$ في نقطة E.

برهن:

(أ). $\Delta MEA \sim \Delta BEC$.

(ب). $(CE)(ME) = (BE)(AE)$.

(ج). إذا كان BE=8، ما هو طول ME؟

مثال EXAMPLE (حساب مثلثات) (Trigonometry)

راية علم ارتفاعها 40 قدم، ثبتت على الأرض بواسطة سلك يمتد من قمة العمود إلى نقطة تبعد 30 قدم عن قاعدته. إذا علمت بأن عمود الزاوية متعامد مع سطح الأرض.

(أ) جد قياس الزاوية بين السلك وسطح الأرض، مقربة إلى اقرب درجة.

(ب) جد طول السلك، مقربا إلى اقرب قدم.

إن الطالب الذي يستخدم نتائج الفرع (أ) للإجابة عن الفرع (ب)، وباستخدام دوال الجيب والجيب تمام، سوف يحصل على نتائج تختلف إلى حد ما عن النتائج التي يحصل عليها الطالب الذي قام بحل الفرع (ب) بصورة مستقلة وباستخدام مبرهنة فيثاغورث. وبالحقيقة، فإن الطالب الثاني قد يعجب من خاصية "مقربة إلى اقرب قدم" حيث أن النتيجة التي حصل عليها 50 بالتحديد أما الطالب الأول فيقبل هذا التخصيص حيث أنه أمر متوقع ويقوم بتقريب الإجابة إلى 50 أيضاً. ما لم يرتكب/ترتكب خطأ في الحل في القسم (أ) والذي سيكون فيه خطأ في الجزء (ب) أيضاً. ويمكن تجنب هذه الصعوبة بعكس القسمين (أ)، (ب) وإعادة صياغة القسم (أ) الجديد بطريقة تزيل اللبس والغموض عن عبارته: (أ) جد طول السلك.

كتابة سؤال جيد وتنظيم الأسئلة
Writing a Good Question and Arranging Questions

إن كتابة وإعداد اختبار جيد يعد فنا بلا مراء. فينبغي أن تعد الأسئلة بعناية، وتنظم على ورقة الاختبار لتمكين الطلبة من تحقيق افضل إنجاز يتناسب مع قدراتهم الشخصية. وقبل المباشرة الفعلية بإعداد أسئلة الامتحان، ينبغي أن يعد المعلم قائمة بالمفردات والمفاهيم التي سيشملها الاختبار، متضمنة معظم الحقائق، والمهارات، والمفاهيم، والمبادئ. ثم يصار إلى إعداد أسئلة واضحة، وجيزة، ومباشرة لكل من هذه المجالات. إن الخطوط الإرشادية المستخدمة في إعداد أسئلة صفية – جيدة تستعمل في كتابة أسئلة الاختبار أيضاً. فعلى سبيل المثال، ينبغي أن تكون أسئلة الاختبار بسيطة في إنشائها، ودقيقة العبارة؛ وإذا تم تضمين جملة مفاهيم في صياغة أسئلة محددة، ينبغي أن تضمن في أقسام منفصلة بكل سؤال. وعلى فقرات الاختبار أن تختبر قدرات الطلبة على التفكير النقدي بالإضافة إلى استعادة المعلومات فحسب. وستتغير أنواع الأسئلة في ضوء طبيعة المحتوى المراد اختباره، وقدرات طلبة الصف، لكن الجهود ينبغي أن تنصب على تضمين كل من الأسئلة الموضوعية والأسئلة غير الموضوعية، مثل مسائل وبراهين توظف الآلة الحاسبة الرسومية. ويمكن حفظ أسئلة الامتحانات في ملفات لأغراض الاستخدامات المستقبلية وضمن الملف الشخصي للمعلم، أو في ملفات يحافظ عليها في مكتب قسم الرياضيات. وينصح المعلمون الجدد بعرض اختباراتهم، مسبقا، على زملائهم ممن يتمتعون بخبرة جيدة، و/أو على الاستشاريين الذين يعملون معهم. وبهذه الطريقة يمكن التقاط الهفوات غير المتوقعة، والأمور غير المنتظمة أو المقبولة في الأسئلة، قبل أن تصل الأسئلة إلى أيدي الطلبة.

وقريبا سيتعلم المعلم الجديد كيف أن سؤالا قد يبدو مباشرا بمعيار المعلم، بينما يظهر غامضا أو ملتبسا لدى الطالب.

مثال EXAMPLE

جد ميل المستقيمات التي معادلاتها كما يأتي:

أ. $y=3x-5$

ب. $2x+y=3$

ج. $y=-7$

د. $x=2$

يختبر السؤال فهم وإدراك الطالب لدلالة ميول الخطوط المستقيمة من معادلاتها، لكن المستقيم الذي وردت معادلته في الفرع (د) لا يمتلك ميلا. ومن خلال عبارة السؤال، سيتصور الطالب بأن كل من المستقيمات الواردة في المسألة ينبغي أن يكون لها ميل لذا سيسعى ببحث لا طائل منه، أو يفتش بطريقة خاطئة عن عدد لا وجود له ليضعه مقابل قيمة ميل الفرع (د). إن صياغة عبارة السؤال بصورة دقيقة، ستجنب الطالب هذه المعضلة، فتصبح العبارة الجديدة: "جد ميل كل من المستقيمات التي معادلاتها كما يأتي. وإذا لم يكن هناك ثمة ميل اكتب (لا يوجد)".

ينبغي أن تستمر أسئلة الاختبار متدرجة من البسيط إلى الأكثر تعقيدا. إن هذا التنظيم يساعد على ترسيخ ثقة الطالب، ويشجع الطالب الأكثر ضعفا على بذل افضل ما يمكنه من جهد. لأنه يواجه الأسئلة الأبسط أولا. وقد يتساءل المعلمون في بعض الأحيان، هل ان من الحكمة تزويد الطلبة باختيار الأسئلة في الاختبار. إن الاختيارات توجد بكثرة في الامتحانات النهائية. وبالخصوص في الامتحانات الموحدة لكافة القسم. وتوفر الاختيارات للطلبة حرية ومدى إضافيا لتعويض الاختلاف في عمق معالجة المفردات والموضوعات المنهجية بواسطة مختلف المعلمين . وفي مثل هذه الحالات ستكون عملية اختيار الأسئلة مناسباً. أما في الاختبارات الصفية، المختصرة لحد ما (تمتد لحصة كاملة أو أقل)، فلا يوصى بعملية الاختيار نظرا لأن الطلبة غالبا ما يضيعون أوقاتا كثيرة في استعراض الأسئلة. فيباشرون بدايات هزيلة، ثم يتركون أسئلة، فيفقدون وقتا ثمينا ودرجات يعز الحصول عليها.

تحديد تعليقات العلامات الحمراء مع قيم النقطة لأجزاء من الاختبار

Assigning a Rubric with Point Values to Parts of The Test

ينبغي أن يحدد المعلم درجة لكل سؤال قبل أن يعطي الاختبار لطلبة الصف. ويميل الطلبة، على الدوام، إلى معرفة كم سيستأثر كل سؤال من الدرجات الكلية للاختبار. وتوفر القيم دليلا يعتمده الطلبة في تحديد كيفية تقسيم وقت الامتحان على أسئلة الاختبار. وينبغي أن تحدد قيم العلامات في ضوء جملة من العوامل التي تتضمن، الأهمية النسبية، وصعوبة كل سؤال من الأسئلة، والزمن الذي يتوقع استغراقه بواسطة التلميذ العادي لحل كل مسالة. وبالنسبة لاختبار الحصة الواحدة Period Test-Single ، فإن الأسئلة التي لا تحوي على عنصر تحدي للطالب تتطلب وقتا اقل (مثل الأسئلة الموضوعية ذات الطبيعة الحسابية والواقعية، وأسئلة صح/خطأ، وأسئلة دائما، في بعض الأحيان، قط) وينبغي أن تحدد لهذه الأسئلة، غالبا، علامات متدنية، ربما ثلاثة إلى خمس نقاط لكل منها. وتستحق أسئلة املأ الفراغ خمسة إلى ستة نقاط. أما الأسئلة التي تستغرق وقتا أكبر والتي تتضمن مهام تقييم الأداء، والتي يتم تحديد ثقل أهميتها باستخدام تعليقات الخطوط الحمراء فتستأثر بخمسة نقاط. وتستحق البراهين الهندسية والمسائل اللفظية خمسة عشر أو حتى عشرين نقطة.وينبغي على المعلم أن يباشر الاختبار بنفسه لغرض التأكد من الوقت الذي يتطلبه حل الأسئلة قبل أن يقدمه لطلبة الصف. إن اختبارا اعد لكي يستغرق الطلبة في إكمال حل أسئلته خلال أربعين دقيقة ينبغي أن لا يستغرق أكثر من عشرة دقائق من وقت المعلم لإكمال حل جميع مسائله.

عرض الاختبار Presenting The Test

قد تكتب الاختبارات على اللوحة، أو يتم إسقاطها على العارضة باستخدام جهاز الإسقاط العلوي الضوئي، أو قد تعد عدة نسخ منها لكل طالب باستخدام جهاز الاستنساخ Duplicating Machine. ويفضل معظم المعلمين الأسلوب الأخير، كلما كان ذلك ممكنا، نظرا لأنها توفر نسخة من أسئلة الاختبار لكل طالب. تقلل الاختبارات المطبوعة (لكنها لا تلغي جميعا) الأخطاء الناجمة عن نقل الأسئلة، وقراءة الرموز، وقراءة التوجيهات، واتباع التعليمات، وأمور أخرى قد تنسل خفية. وقد يكتب تمرين الامتحان السريع – المنفرد، على اللوحة بصورة دقيقة ويعطى للطلبة بضعة دقائق لكتابة إجاباتهم على صفحة الورق. ويستعمل جهاز الإسقاط العلوي الضوئي، على سبيل المثال، لإسقاط برهان هندسي – جزئي على العارضة، ويمكن أن يكلف الطلبة بإكمالها على صفحة ورقية. ينبغي أن يمارس المعلم التمرين من النسخة الأصلية وقبل توزيعها على الطلبة لكي يدرك الأخطاء الطباعية قبل أن يصاب الطلبة بالإحباط نتيجة لاستمرار محاولاتهم غير المجدية في حل سؤال غير ممكن. ويسري هذا الأمر على الاختبار المكتوب على اللوحة حيث ينبغي قراءة بدقة للتأكد من خلوه من الأخطاء.

إدارة الاختبار Administering A Test

إن الهاجس الرئيسي لدى المعلم عند إدارة اختبار الصف ينبغي أن يتوجه صوب توفير الظروف المثلى، بحيث تتوفر للطلبة افضل فرصة متاحة لبيان معرفتهم. ولتحقيق هذا الهدف المقصود، يمكن للمعلم أن يتبع عددا من المبادئ البسيطة في عرض اختبار الصف.

بدائل للإدارة Alternatives for Administration

ينبغي أن يبتدئ كل اختبار فورا من غير إبطاء بحيث يتوفر للطالب كامل وقت الاختبار المخصص للعمل على الأسئلة المعروضة. وان البداية المتأخرة، مهما كان سبب تأخيرها، تؤدي إلى إقلاق الطالب وحرمانه من استغلال كامل الوقت المخصص. وسواء كتب الاختبار على اللوحة بواسطة المعلم (وهو إجراء بطئ وغير مرغوب فيه)، أو تم توزيعه على جميع الطلبة في صحائف مستنسخة للطلبة، ينبغي أن تكون الأسئلة متوفرة بين يدي الطلبة بعد فترة قصيرة من ابتداء الحصة المخصصة. إن هذا التوزيع الفوري لأسئلة الاختبار يمتلك أهمية خاصة إذا كان قد خصصت للاختبار فترة زمنية كاملة، نظرا لان الوقت الذي سيضيع في بداية المدة قد يصعب استعادته فيما بعد.

ينبغي أن يتخذ المعلم قرارا فيما إذا كان على الطلبة الإجابة على الأسئلة أو العمل على المسائل مباشرة على ورقة الأسئلة في الفراغات المهيئة لذلك، أو على ورقة مستقلة. كما ينبغي أن يوفر فراغ مناسب للطلبة لحل المسائل وكتابة الإجابات، وإذا كان هناك ثمة نموذج محدد لصحائف الإجابات، و إذا كان على الطلبة إعداد هذه الصحائف بأنفسهم، ينبغي اخذ الوقت المستغرق في إعدادها بعين الاعتبار عند إعداد الاختبار. كذلك، ينبغي إخبار الطلبة، مسبقا، في حالة وجود حاجة إلى أية أداة خاصة يتوقع منهم إحضارها إلى الاختبار، مثل المساطر، والفرجار، والآلات الحاسبة، أو أوراق الخطوط البيانية Graph Papers.

تنظيم الصف Classroom Arrangement

يهتم المعلمون، غالبا، بمشكلة الحصول على نتائج صادقة عند إعطاء الاختبارات. إن الطلبة الذين ليس لديهم ثقة كافية بالنفس، أو الذين يمتلكون فعليا معرفة محدودة جدا بالمادة التي يتم اختبارها، سوف يساقون إلى مقاييس متهورة وطائشة. وإن من الأفضل، بالطبع، بالنسبة إلى للمعلم أن يتوقع مثل هذه المشاكل، ويحاول منع حدوثها بدلا من التعامل معها بعد أن تصبح حقيقة واقعة. فإذا كان الصف واسعا جدا، وتتوفر مقاعد شاغرة فيه، يمكن تفريق الطلبة الواحد عن الآخر. أن ترك مقاعد شاغر على كل جانب من جوانب الطالب (وكذلك أمامه وخلفه) يبدو بوضوح كإجراء احترازي إزاء الغش أثناء الاختبار. أو، إذا كان أثاث الصف قابل للحركة، يمكن أن يصار إلى إعادة تنظيمه بشكل يضمن انتشار الطلبة بصورة جيدة على رقعة الصف. كما وينبغي بذل كل الجهود لإبعاد وإزالة موارد الإغواء بعيدا عن الطلبة. وإذا لم تتوفر أمامهم أية فرصة للغش ستكون النتائج حقيقية وتصف بوضوح ودقة قدراتهم وإنجازاتهم العقلية.

يعمد بعض المعلمين إلى إعادة ترتيب الأسئلة على ورقة الاختبار بحيث يعرض للطلبة ما قد يبدو لأول وهلة بأنه اختبار مختلف.

إن هذه الاختبارات تستخدم في صفوف Rows متبادلة لتقليل مشاكل الغش، أو في صفوف مدرسية مختلفة، وبنفس الموضوع الذي يوافق أوقاتا مختلفة خلال نفس اليوم. إن هذا الإجراء قد يكون مناسبا لفترة ما، ولكن الطلبة يدركون ماذا يدور حولهم، وبعدها يستطيعون التغلب على هذه التقانة وإفراغ مضمونها. إن الأسلوب الافضل من ذلك، إلى حد ما، وبالخصوص للصفوف التي تلتقي في أوقات مختلفة ويتم اختبارها بنفس المادة، سيحدو بالمعلم إلى إعداد صيغ أو نماذج بديلة لكل سؤال، ويفضل، إعداد اصدارتين Versions مختلفتين لنفس الاختبار. وستكون الإصدارات المختلفة عادلة، فقط، إلى الحد الذي تكون فيه النماذج البديلة للأسئلة متساوية في الصعوبة، وان الاختبارات تكون متكافئة بصورة حقيقية. وخلاف ذلك، فإن مصير طالب محدد سوف يمليه عليه المقعد الذي سيختاره/ ستختاره، أو الاختبار الذي سيحدد داخل الصف.

اليقظة خلال المراقبة Alertness During Proctoring

رغم جميع الإجراءات الاحترازية المتخذة لأغراض كف عملية الغش أو الحد منها، فانه لن يسلم حتى أكثر المعلمين خبرة ودراية، ومهارة من مواجهة مشكلة الغش في بعض الأحيان. ويفترض أن ينبه طلبة الصف، عند بداية مدة الاختبار، بالانشغال بإنجاز حلولهم، وإبقاء أنظارهم على الأوراق التي تستقر بين أيديهم. وفي حالة إن هذا التنبيه قد حصل فعلا، فما هو طبيعة الإجراء الذي سيتخذه المعلم عند حصول انتهاك لهذا الأمر أثناء الاختبار؟

إن جل المعلمين الذي يلاحظون محاولات للغش في الاختبار، غالبا ما يتحدثون بهدوء مع المذنب أولا. حيث يتم

تنبيه الطالب، دون إحداث ثورة غضب قد تؤدي إلى إقلاق بقية الطلبة وهم يحاولون التركيز على فهم المسائل ومباشرة حلها، وخصوصا عندما يتم تغيير مقعد الطالب المذكور.

وينبغي أن يثبت المعلم ملاحظة على ورقة اختبار الطالب موضحا في أي نقطة من الاختبار تم حصول الغش، بصورة افتراضية. وان الخطوات التي تلي تلك النقطة تعد خاصة بإنجاز الطالب (إذا لم تلاحظ محاولات أخرى للغش). كما ينبغي أن يقرر كل معلم عقابا وجزاء صارما على الغش، ويبدو بأن الاستئناس بمشورة الاستشاري بهذا الخصوص أمرا مفيدا.

إن الخبرة ستعين المعلم على صياغة نتائجه/نتائجها والممارسات التي سيتخذها إزاء هذه المشكلة وصقل هذه العوامل بوصفها تغيير في الظروف والملابسات. إن اكتشاف الغش بعد انتهاء مراسيم الاختبار، وأثناء تحديد درجات أوراق الاختبار، يعد مسألة مختلفة وتمتاز بصعوبة ملحوظة عند التعامل معها. فالأخطاء المتماثلة التي تظهر على أوراق الاختبار الطلبة الذين جلسوا على مقاعد متقاربة خلال الاختبار قد تقترح غياب اليقظة من جانب المعلم. إن الاتهامات عند هذه النقطة قد تؤدي إلى ما هو أكبر من إقامة أحاسيس سيئة، وسينكر الطلبة الفعل الخاطئ. وقد يكون أحد الطلاب بريئا بالواقع!. فقد يلجأ أحد الطلبة إلى نسخ إجابة زميله دون أن يكون الثاني عارفا بهذه المخالفة.ويلجأ بعض المعلمين إلى إعادة اختبار العناصر التي تدور حولها شكوكه، بيد أن الكثير يفضل اللجوء إلى تقليل درجات الطلبة المشتركين بهذا الأمر، وتوجيه ملاحظة عقلية إلى نفوسهم لكي يصبحوا أكثر يقظة في المرات القادمة. وسيتلقن المعلم من الخبرة كما يتعلم الطالب، سواء كانت الخبرة إيجابية أو لم تكن كذلك.

المنجزون مبكرا Early Finishers

ينبغي أن يعد الاختبار بحيث يتطلب الوقت المخطط لإكماله بواسطة جميع طلبة الصف، ودون استثناء. وإذا أنهى عدد كبير من الطلبة الاختبار بصورة مبكرة، فيعد هذا الأمر مؤشرا على قصر الاختبار. بصورة عامة، يلاحظ وجود بضعة طلاب في كل صف ينجزون عملهم أسرع بكثير من زملائهم في الصف، وسينشب، نتيجة لهذه الظاهرة، انتهائهم من الاختبار قبل مرور كثير من الوقت. ويمكن أن يصار إلى مشاغلة هؤلاء الطلبة باستمرار عبر مسائل إضافية – اختيارية، أو مسائل متقدمة للحصول على علامات عالية ومميزة بينما يتاح لأقرانهم من طلاب الصف إكمال الجزء المطلوب من أسئلة الاختبار.كما ينبغي أن تتوفر هذه المسائل لجميع الطلبة ولكن الأرجحية سوف تكون بأن افضل الطلبة هم الوحيدون الذي سيتوفر لديهم وقت كاف للمحاولة في حل هذه المسائل أو إكمال حلولها بصورة صحيحة. وبأي حال من الأحوال، فإن الطلبة يستحقون الحصول على علامات إضافية، أو أية إمكانية بمنح العلامات، والتي يعدها المعلم مناسبة للمسائل الإضافية التي ينجحون في حلها. يفترض بالمكافآت التشجيعية لمثل هذه العلامات أن تتضمن درجات عالية في نهاية فترات التقدير، أو عند نهاية الفصل المدرسي.

المتغيبون Absentees

إن مشكلة التعامل مع الطلبة الذين يتغيبون عن الاختبار تعد مسألة مزمنة وتفتقر إلى حل مباشر أو مقبول. ان افضل نصيحة للمعلمين المبتدئين هي ضرورة تقدير كل حالة بحسب ظروفها وملابساتها، ومناقشة الموقف مع الاستشاري. ويكمن الشيء الأساسي في أن تكون عادلا ومنصفا مع جميع الطلبة المتغيبين.

تقدير درجة الاختبار Grading A Test

تعتبر مهمة تقدير درجات الاختبار مضيعة للوقت، ولكنها أهم مهمة للمعلم. ولا تعني الاختبارات أنها تقويم لعمل الطالب. ولكنها أيضاً لتقويم عمل المعلم ذاته. ويستطيع المعلم قياس فعالية تعليمه من خلال دراسة أساليب حلول الطلبة وتحليل أخطائهم. وسيواجه المعلم، أثناء تصحيحه الاختبار، عدداً من المواقف الغريبة من بينها سوء فهم الطلبة.

تحديد علامة جزئية Assigning Partial Credit

إن منح جزء من العلامة بدلا من علامة كاملة لجواب الطالب الذي يظهر جزءا، وليس فهما كاملا في طريقة الوصول إلى ذلك الجواب، هو أمر لا مناص منه. كذلك، فإن الطالب الذي يرتكب، بصورة واضحة، خطأ هيناً يستحق معظم العلامة التي تستحقها المسألة. تمتاز كثير من الأسئلة، بالطبع، بخصائص تحول دون إمكانية تطبيق مبدأ تحديد جزء من العلامة المخصصة للإجابة. وتتضمن هذه الفئة، أسئلة صح/خطأ، وأسئلة دائما، بعض الأحيان، وقط، والأسئلة الواقعية Factual Questions (مثال، اكتب الصيغة التربيعية). من جهة أخرى، تتضمن الأسئلة المطولة حجما كبيرا من الحسابات المتسلسلة (والتي قد يخطئ الطالب في إحدى خطواتها بحيث يسري الخطأ إلى النتيجة النهائية) وتستحق هذه الحالات جزءا من العلامة.

تعد البراهين الهندسية بدرجة كافية من الدقة، وبأخطاء

ضئيلة قد يرتكبها الطالب في بعض الأحيان، وتستحق هذا الأمور إدراكا واضحا لأسلوب منح العلامة لحلول الطلبة في هذا المضمار. إن الخبرة المتراكمة مع مرور الوقت، واستشارة الآخرين ستسهم في مساعدة المعلم المبتدئ على صياغة سياسات واضحة المعالم لمنح جزء من العلامة، والسعي إلى تعديلها بحسب ما تتطلبه الحالات المختلفة.

يوجد لدى الطلبة الكثير من الخطوات الصحيحة ذات الصلة بتمرين الاختبار، لكن هفوة غير مقصودة على طريق الحل قد تؤدي إلى الحصول على إجابة غير صحيحة. وعلى النقيض من ذلك، فإن بعض الطلبة قد يكون لديهم القليل من الخطوات الصحيحة لحل تمرين محدد، لكنهم قد يصلون إلى الإجابة النهائية الصحيحة!

تأمل الأمثلة الآتية:

مثال EXAMPLE (الجبر الأولي Elementary Algebra)

تبسيط الكسر.

$$\frac{x^2-25}{x-5}$$

الإجراء الصحيح.

$$\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}=x+5$$

الإجراء الخاطئ للطالب:

$$x+5 \qquad \frac{\cancel{x^2}\ \cancel{-}\cancel{25}}{\cancel{x}\ \cancel{-5}}$$

بهذا الإجراء حصل الطالب على إجابة صحيحة عن طريق إجراء شنيع Outrageous. ورغم أن هذه الطريقة قد أعطت إجابة صحيحة، لكنها تظهر بوضوح غياب فهم تحليل ثنائي الحد، أو اختصار الكسور الجبرية لدى الطالب الذي استخدمها في حله للمسألة، لذا فانه لا يستحق أي علامة مهما كان نوعها. إن المنهج الاعتيادي في تقدير الدرجة ومنحها، يعتمد على رؤية المعلم للجواب، دون الطريقة المستخدمة للوصول إليه، ثم منح الدرجة!

مثال EXAMPLE (حساب مثلثات Trigonometry)

جد قيمة جيب الزاوية 75° في الصيغة الجذرية Radical.

إجابة الطالب:

$$\begin{aligned}\text{Sin } 75° &= \text{Sin } (45°+30°)\\ &= \text{Sin } 45° \text{ Cos } 30° + \text{Cos } 45° \text{ Sin } 30°\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

في هذه الحالة يستحق الطالب جزءا من العلامة بلا ريب، رغم انه قد اربك النماذج نصف القطرية لقيم الدوال المثلثية . إن استحقاق العلامة يعود إلى إدراك الطالب بأن Sin 75° يمكن أن تعاد كتابته بوصفة جيب مجموع الزاويتين 45°، 30°، ولمعرفته بأسلوب فتح الصيغة Sin (A+B)، ولمعرفته بأسلوب ضرب الكسور وجمعها بصورة صحيحة، ولو أن هذه الكسور كانت غير صحيحة. وعليه، فانه لو استحق السؤال عشرة درجات، يمكن أن يمنح علامة بستة درجات.

في الهندسة، يطالب التلاميذ بكتابة براهين النظريات في الامتحانات، لذا ينبغي على المعلم، بداية، أن يلقي نظرة عجلى على سائر البرهان لتحديد هل ان محتواه يحمل مفهوما معقولا. يرتكب كثير من الطلبة أخطاء في بعض العبارات والقضايا و/أو التعليل الواردة في الفرضيات والنظريات. وإذا كانت الأخطاء كثيرة ومتعددة، وكانت الاستنتاجات هزيلة وتعكس تدني الفهم من جانب الطالب، بعدها لن يستحق الطالب أية علامة على البرهان الهندسي. ولكن إذا كانت إجابة الطالب تعكس معرفة جيدة بالموضوع، ولكن مع وجود أخطاء يسيرة، أو قد لا تكون خطوات الحل متسلسلة بصورة صحيحة، وفي مثل هذه الحالة يستحق الطالب تقديرا وعلامات جزئية على الحل. بصورة عامة، فإن الخطأ الميكانيكي البسيط يمكن أن يعاقب عليه إلى حد حسم ٪10، بينما تتراوح نسبة الأخطاء الأساسية في الجزء النظري بين ٪50–30 من قيمة العلامة المخصصة للمسألة، واعتمادا على أهميتها. إن هذه الأمور لا تزيد عن كونها خطوط إرشادية عامة، وان المعلم / المعلمة الجديد سوف يلجا إلى تغييرها في ضوء تراكم الخبرة لديه بمرور الوقت.

هل يمكن لجواب خاطئ أن لا ينتج عن حسم علامات؟ Can a Wrong Answer Not Result in a Deduction?

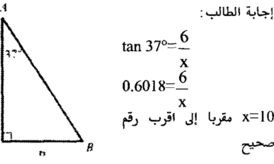
غالبا ما يحصل الطالب على إجابات غير صحيحة لمسألة

ما رغم استخدامه لطرق إجرائية صحيحة وعدم ارتكابه لأخطاء ميكانيكية. كيف يكون هذا الأمر ممكنا؟ إن الأمر بالغ البساطة. فالطالب يعمل على مسألة تتضمن استدلالا متسلسلا وعدة خطوات، تعتمد بعضها على الإجابات التي تم الحصول عليها في خطوات مبكرة. ينبغي أن يحاسب الطالب على الخطأ /الأخطاء الأصلية فقط. ويجب عدم تكرار حسم العلامات لمرتين أو أكثر بسبب الخطأ الأولي.

مثال EXAMPLE (حساب المثلثات Trigonometry)

في المثلث ABC، $\angle C$ هي زاوية قائمة، وقياس $m\angle A=37°$ وطول قطعة BC=6. جد، مقربا إلى اقرب عدد صحيح، AC و AB.

إجابة الطالب:



$\tan 37° = \frac{6}{x}$

$0.6018 = \frac{6}{x}$

x=10 مقربا إلى اقرب رقم صحيح

خطأ Error: قام الطالب بقراءة الجدول، أو ضغط مفتاح الآلة الحاسبة بصورة خاطئة – فحصل على قيمة sin 37° بدلا من tan 37°. فيظن الطالب / الطالبة بأنه قد وجد قيمة AC، لكنه بالحقيقة قد حصل على طول قطعة المستقيم AB. وإذا حاولت الآن إيجاد قيمة AB بواسطة مبرهنة فيثاغورث، ستحصل على الجواب 12، مقربا إلى اقرب عدد صحيح، وبذلك تكون قد ارتكبت ما يعرف بالـ "الخطأ المترابط Consistent Error" لذا سيكون هناك حسم واحد، نظرا لأنه هناك خطأ واحد ولا شئ سواه.

إن تقريب الإجابات في مراحل مبكرة من حل المسألة قد يؤدي إلى كثير من الأخطاء لاحقا في نفس المسألة. لذا ينبغي صياغة المسائل بحيث تقلل تأثيرات هذه الطرق الإجرائية إلى حدودها الدنيا. كذلك فإن تبني طرقا وأساليب بديلة في الحل (مثال. استخدم مبرهنة فيثاغورث أو استخدم مثلثات المثلث قائم الزاوية لإيجاد أطوال أضلاع، أو وتر المثلث) قد ينتج عنه نتائج مختلفة جزئيا، وإذا أريد استخدام هذه النتائج في أجزاء تليها من المسألة ذاتها، فقد تظهر مشاكل ملموسة بالحل. لذا ينبغي أن يكون المعلم منتبها لمثل هذه الاحتمالات.

عن ماذا نبحث ونتطلع عند تحديد درجات اختبار What to look for in grading a test

ينبغي أن يبذل المعلم كل ما يستطيع بذله من جهود لتقدير درجات كل ورقة اختبار بعناية بالغة ودون أي تحيز. وعندما يعمد الطلبة إلى مقارنة أوراق الاختبار ذات الدرجات بأوراق اختبار أقرانهم وزملائهم في الصف، سيصابون بانزعاج إذا حصل لديهم اعتقاد بأنه لم تتم معاملتهم بصورة عادلة أسوة بزملائهم، كذلك قد يلجأون إلى مقارنة أوراقهم مع أوراق اختباراتهم السابقة أثناء الفصل الدراسي لمعرفة مدى تقدمهم. عموما، فإن المعلم سيقوم بفحص أوراق الاختبار لتحديد عمق فهم المفاهيم – التي تم اختبارها – مدى قدرات الطلبة على الاستدلال المنطقي، والاستنتاج المتسلسل، وقابليتهم على حل المسائل وقدراتهم على إنجاز الحسابات العددية والطرق الإجرائية الجبرية بصورة صحيحة ودقيقة. وأثناء تحديد درجات أوراق الاختبار، يكتشف المعلم أكثر الأخطاء الشائعة التي يرتكبها الطلبة فتتوفر لديه فرصة مناسبة لإعداد خطط علاجية، أو أنشطة إعادة تعليم. ينبغي استكشاف هذه الأخطاء بعناية مع الصف، لتقليل ارجحية تكرار الطلبة لها في اختبار لاحق. بالحقيقة، إن عموم الاختبار ينبغي مراجعته مع الصف بعد إعادة أوراقه للطلبة، مصححة وقد حددت علاماتها. وتتم عملية المراجعة عن طريق إدراج الطلبة لحلولهم الشخصية لكل مسألة من المسائل على اللوحة ثم مباشرة توضيح وبيان الطرق الإجرائية المعتمدة في الحل لزملائهم بالصف، والإجابة على الأسئلة التي يطرحها عليهم زملائهم خلال المناقشة. وعندما يكون الوقت عاملا مهما، يمكن إكمال المراجعة بواسطة المعلم عن طريق توزيع نسخا مصورة من الصحائف التي تحوي الحلول الصحيحة للأسئلة لجميع الطلبة، ثم مباشرة الإجابة على استفسارات الطلبة وأسئلتهم التي تدور حول طرق الحل، شريطة أن يتوفر لهم وقت كاف لدراسة هذه الحلول عن كثب. ورغم أن هذه الطريقة توفر جزءا لا بأس به من الوقت، فإنها تسهم في تقليل حجم مساهمة الطالب في عمليتي المراجعة والتعلم. إن هذا الأسلوب يصلح في إجراء مراجعة شاملة للأسئلة من قبل الصف بأكمله. وتمتاز المجاميع الصغيرة بأنها أكثر فاعلية عند مراجعة الدروس بالمقارنة مع المجاميع الكبيرة، نظرا لان فرصة كافية ستتوفر للطلبة في: مناقشة، وتأمل، وتصحيح أخطائهم في هذا الأسلوب من التنظيم، وبالمقارنة مع مجاميع أكبر قد تشمل الصف بأكمله. وفي كل حالة من هذه الحالات ينبغي على المعلم إعداد صحيفة الإجابات لإرشاد

المجاميع أثناء مراجعاتهم. كذلك يجب على المعلم أن يكون متأهبا للإجابة على أسئلة إضافية، أو اقتراح تعليقات إضافية، إن ظهرت الحاجة لذلك.

تفسير نتائج الاختبار
Interpreting Test Results

بعد إعطاء الاختبار للصف، وتقدير درجاته، ومراجعته مع الطلبة، يصبح لزاما على المعلم فحص الاختبار عن كثب لتفسير النتائج المستحصلة منه. بعدها يستطيع المعلم تخطيط التعليم للوحدات المقبلة بعناية أكبر، ويخطط للأساليب الضرورية للعلاج، أو إعادة تعليم كامل مفردات مادة محددة، ويخطط لإعداد افضل للاختبار القادم إذا كان الاختبار الحالي يحوي على مفاجآت، أو قد سبب مشاكل غير متوقعة (سوء فهم الطلبة لمضمون الأسئلة، أو عدم توفر وقت كاف لإكمال حل المسائل،... الخ).

ما هي دلالة نتائج الاختبار
What the Test Results Indicate

تعد الاختبارات أدوات للقياس، وعليه فإنها تدل على درجة فهم الطالب للمادة قيد الاختبار. وتتوفر في الاختبار إمكانية قياس مقدار ما يستوعبه الطلبة من المبادئ التي يتلقنها أثناء الدرس، وقدراتهم على تطبيق المبادئ والمفاهيم في حل مسائل بموضوعات مختلفة، وكذلك يعد مؤشرا على أداء الواجبات اليومية المحددة التي انيطت بهم.

كذلك يوفر الاختبار معلومات عن المعلم / المعلمة والاستراتيجيات التي يتبناها أثناء تعليمه للطلبة. وغالبا ما تعكس درجة فهم الطلبة للمعلم. ويبدو بأن المعلم الجديد الذي يشعر بإحباط وقلق بالغ بسبب عدم أداء الطلبة وفق الحدود المقبولة هو عادة الذي سينتهي به الأمر بأن يكون معلما جيدا، ويبحث وينقب باستمرار عن وسائل إضافية لتحسين تقانات تعليمه للارتقاء بتعلم الطلبة ويعمق فهمهم.

تحليل فقرات منفردة أو أجزاء من الاختبار
Analyzing Individual Items or Parts of a Test

إن تحليل الاختبار الذي قد تم تحديده هي تقانة بالغة الفائدة لتحسين وتطوير أعداد الاختبارات. فهو يساعد المعلم على تحديد الأسئلة التي كانت تعاني من بساطة شديدة، أو صعوبة بالغة بالنسبة لعموم الطلبة، ولكنها كانت مناسبة بوصفها أسئلة متميزة، أو أسئلة لمنح علامات إضافية، أو بالغة الصعوبة على جميع الطلبة، أو مختصرة جدا، أو مسهبة جدا، أو غير واضحة، أو تورث التباسا، أو تكون عرضة لسوء التفسير نتيجة لاستخدام اصطلاحات وعبارات هزيلة، أو قد تكون غير منصفة في ضوء تحديد العلامة المناسبة.

يعين تحليل الاختبار المعلم، أيضاً، على تحديد المفردات والموضوعات التي كانت اقرب إلى فهم الطلبة وإدراكهم، والأخرى التي كانت بمنأى عن إفهامهم.

يتألف تحليل الفقرات من تحليل سؤال- بعد - سؤال لإجابات الطالب، وغالبا ما يؤدي إلى الخروج باستنتاج يخص صلاحية سؤال محدد وأهميته بالنسبة للاختبار ومن يمتلكون قدرات وقابليات متميزة.

والسؤال الجيد عبارة عن مميز ذي فاعلية بين الطلبة ذوي القدرات العالية والقدرات المتدنية.

اختبارات الاختيارات المتعددة
Multiple Choice Tests

مع الازدياد المستمر - ودون هوادة - في أعداد الحواسيب في المدارس ازداد التوجه نحو الاختبارات ذات الإجابات القصيرة والمختصرة، في حين كانت تجتنب هذه الأسئلة في سنين خلت. إن أكثر الاختبارات شيوعا هو اختبار الاختيارات (أو الإجابات) المتعددة. ويعد استخدام الحاسوب (في هذا الأسلوب من الأسئلة) مناسبا جدا، نظرا لان المجيب Respondent يقدم إجابات لا تزيد كل منها على حرف واحد فقط. ولجعل مثل هذا الامتحان مؤثرا وذو فعالية ملموسة، ينبغي بذل عناية خاصة في إعداد هذه الأدوات وتفسيرها.

عند كتابة فقرات الاختبار، ينبغي أن يكون المعلم متيقظا (على الدوام) لضمان خلوها من الإبهام واللبس. وإذا كان هناك فرصة كافية من الوقت، فمن الحكمة كتابة الاختبار وتركه جانبا لبضعة أيام، وستظهر القراءة الثانية لفقراته (بعد مرور فترة كافية من الوقت)، غالبا، وجود التباسات محتملة. إن كتابة فقرة الاختيارات المتعددة ليست أمرا بسيطا، كما يعتقد البعض، لأن الجزء الأهم من فاعليتها يرتكز إلى قدرة الكاتب على صياغة "مركبات" جيدة - إجابات غير صحيحة. وسيكون لزاما على معد الاختبار محاولة توقع طبيعة، وأنواع الأخطاء التي قد يرتكبها الطالب عند كل فقرة واشتقاق هذه المركبات من بين هذه الإجراءات الخاطئة.

بصورة طبيعية، إذا كان لدى أحدنا وقتا كافيا، آنذاك ينبغي تحليل كل فقرة بمفردها قبل أن توزع أوراق الاختبار. لكن هذه الطريقة تتطلب إدارة الاختبار لمجموعة مثالية من

الطلبة؛ وتحليل مدى تأثير كل فقرة بوصفها صفة مميزة بين تحقيق النقاط: العليا، والمتوسطة، والدنيا. وتعد الفقرة فعالة إذا كان الحاصلون على أعلى النقاط هم الذين أجابوا عليها بصورة صحيحة، وان الحاصلين على اقل النقاط لم يحسنوا ذلك. وغالبا، لا يكون تحليل الفقرة عمليا في اختبارات الصفوف العادية، نظرا لان إدارة الاختبار مرتين يكون أمرا مستحيلا. أما بالنسبة لاختبارات معظم المدارس، فإن مثل هذا الإجراء قد يبدو أكثر قبولا، وخصوصا إذا كان الاختبار يستخدم في أكثر من فصل دراسي واحد.

يبدو السؤال المطروح حول كيفية تحديد نقاط اختبار بخيارات متعددة، في بعض الأحيان، مصدرا لإثارة مزيد من الجدل والخلاف. فيدعي بعض التربويين بأن عدد الفقرات التي تمت الإجابة عليها بصورة صحيحة تعد الأساس الذي ترتكز إليه عملية تحديد نقاط الاختبار، بينما يذهب آخرون بأن اختبار الخيارات المتعددة ينبغي "أن يصحح من أجل التخمين والحزر Corrected for Quessing". أي أن عملية تحديد نقاط الاختبار (الدرجة الخام Raw Score) ينبغي الحصول عليها من الصيغة:

$$\text{مجموع الدرجات الخام (الأولية)} = R - \frac{w}{n-1}$$

حيث أن R تمثل عدد الفقرات الصحيحة، w عدد الفقرات الخاطئة، و n عدد الخيارات التي تم توفيرها لكل فقرة. إن عدد الفقرات المهملة لا يحمل تأثيرا مباشرا على الحسابات.

رغم سهولة تحديد درجات اختبارات الخيارات المتعددة (وبالخصوص مع المساعدة التي يوفرها الحاسوب) عند إعدادها بصورة صحيحة، فإن الصعوبة تكمن في إعدادها نظرا لان هناك أمور بحاجة إلى عناية وتنظيم أكثر من إعداد السؤال بذاته، وان البحث عن مادة جيدة تورث الطلبة التباسا عند اختيار الإجابة الصحيحة من بين الخيارات المطروحة وهو أمر بالغ الصعوبة ويبتلع الوقت ابتلاعا.

مسؤوليات الطالب Student Responsibilities

إن الانطباع الذي يؤسس مفهوم أن اجتياز الفصل الدراسي أو الفشل فيه يعتمد فقط على معدل درجات الاختبار، أو على مداومة الحضور في الصف، ينبغي أن يصار إلى تغييره بحيث يدرك الطالب بأن ما ذكر لا يعدو عن كونهما عاملين من جملة عوامل تساعد على تحديد الدرجة النهائية. إن الجهود التي تضمن النجاح للطالب في فصل دراسي هي حصيلة تكامل ثلاثية المعلم – الطالب – الأبوين. سيحاول المعلم تقديم وعرض دروس مناسبة، ويعطي امتحانات عادلة ومنصفة، ويحدد مهام ومشاريع معقولة ومناسبة، وهكذا. وينبغي على الطالب أن يقيم ملتزما بمهام محددة لكي ينال النجاح. ولكن ماذا ينبغي على الطالب فعله بالضبط؟ إن بعض هذه المسؤوليات تتضمن الآتي:

1. الواجبات البيتية المحددة Homework Assignments

يكون الطالب مسؤولا عن:

أ. الحصول على الواجبات المحددة بصورة صحيحة.

ب. متابعة التعليمات في أمثلة الواجب البيتي.

ج. العمل بجد وإتقان.

د. إنجاز كل واجب محدد بصورة تامة.

هـ. بذل الوسع في الحصول على مساعدة، إن ظهرت الحاجة لذلك.

و. إنجاز الواجبات المحددة حتى في الأيام التي يتغيبون فيها.

ز. مراجعة الواجبات اليومية المنجزة بصورة دورية (في ضوء الحاجة لذلك).

2. المشاركة الصفية Classroom Participation

يحتاج الطلبة إلى:

أ. أن يكونوا متأهبين بسرعة في بداية الدرس.

ب. لديهم جميع المعدات الضرورية: دفتر الملاحظات، أقلام،...

ج. محاولة التركيز على المادة التي تدور النقاشات حولها.

د. طرح أسئلة تتعلق بدرس اليوم.

هـ. الإنصات إلى أسئلة الغير وإجاباتهم.

و. أن يكونوا مشاركين فاعلين في جميع مناقشات المجاميع والصف.

ز. التطوع بأداء الواجبات على اللوحة أو الإجابة على الأسئلة وهم جلوس على مقاعدهم.

3. الاختبارات Tests

يمكن رفع وتحسين نتائج الاختبارات إذا كان الطلبة:

أ. يستعرضون المواد بصورة كافية بصورة مسبقة، بحيث يستطيعون أداء فعل غير متعجل وشامل، خلال الاختبار، لعكس قدراتهم الحقيقية.

ب. قراءة أقسام مناسبة وتمارين نموذجية في الكتب المنهجية.

ج. يؤمنون بقدراتهم ويتذكرون دائما بأن الدرجة النهائية سوف تحتسب على أساس جميع نشاط الفصل وليس على أساس اختبار واحد.

د. أن تكون لديهم جميع المعدات اللازمة: كالأقلام، والفرجار،...
هـ. يتبعون التوجيهات، ويقرأون التعليمات بعناية.
و. يظهرون جميع العمل بصورة واضحة.
ز. بذل كل ما يستطيعون من جهد للتحضير بصورة جيدة لكل امتحان.
ح. إنجاز واجباتهم اليومية بصورة منتظمة.

4. الحضور في الصف Attendance in Class

ينبغي أن يتذكر الطلبة بأن:

أ. التغيب ليوم واحد عن درس الرياضيات هو أمر خطير لأنه يعني خسارة حقيقية لعمل يومين – اليوم الذي تغيبوا فيه واليوم التالي الذي عاودوا الدوام فيه (نظرا لأنه قد لا يتوفر لديهم فهم تام بما يقوم به المعلم عند عودتهم إلى الصف).
ب. مقاطعة الصف هو نقض للانضباط المدرسي، إضافة إلى كونه خسارة ليوم من الدراسة.
ج. القدوم متأخرين إلى الصف يعني خسارة وقت ثمين قد يتعلمون خلاله شيئا مفيدا. يضاف إلى ذلك، إن التأخير يؤدي إلى تشتت المعلم، وفك عرى الصف. إن التأخير المستمر يعكس ميلا ضعيفا للطالب تجاه المادة.

5. الانضباط المدرسي Discipline

ينبغي أن يتم إخبار الطلبة بأن:

أ. السلوك غير الصحيح في الصف يؤثر بشكل ملحوظ على الجميع.
ب. التصرف السيئ لن يكون مجديا، وسيؤثر على المعلم وبقية الطلبة في تكوين انطباع سيئ وسلبي تجاه المذنب.

6. الموقف والجهد Attitude and Effort

ينبغي أن يظهر الطلبة بأنهم حريصون على الأداء الجيد عن طريق:

أ. البحث عن مساعدة إضافية عندما تظهر الحاجة لها من المعلم، أو زملاء الصف، أو مجموعة العمل، أو خارج المدرسة.
ب. إنجاز عمل بعلامات إضافية عند تحديد الواجبات.
ج. عدم الدخول إلى الصف متأخرا، أو تكوين موقف سلبي، بصورة مسبقة، تجاه الرياضيات.
د. التعايش مع المهام المدرجة سابقا.

المسؤوليات الأبوية Parental Responsibilities

يمتلك كل إنسان بالغ يدين، يمسك المعلم بواحدة ليساعد على إرشاد وتوجيه الطالب في العملية التعليمية، كما قد تدرب لإنجاز ذلك. ويمسك الأبوان باليد الأخرى، وهما اللذان يلتزمان أخلاقيا، وشرعيا بإرشاد وتوجيه تعليم ولدهما بأفضل ما يستطيعان من بذل جهود ورعاية.

وعليه، فإن الأبوين يشاركان في المسؤولية التي تخص أداء الطالب في الصف. ورغم أن مسؤولية الأبوين قد تكون قليلة، وتختلف لحد ما عن المسؤوليات الملقاة على عاتق الطالب، وعاتق المعلم، لكنها لا تقل أهمية عن هاتين المسؤوليتين في كثير من جوانبها. وفي الحقيقة، تتركز مسؤولية الأبوين الطبيعية بوصفهما مصدر لمنح الثقة، والتشجيع المستمر، إضافة إلى كونهما مراقبين دائميين.

1. التأكد من قيام الطلبة بأداء الواجبات البيتية – المحددة بصور متكاملة ودقيقة.
2. إظهار اهتمام خاص بنتائج اختبارات أولادهم، مع توفير التشجيع والدعم كلما كان ذلك مناسبا.
3. الاتصال بالمعلم، من حين إلى آخر، للتأكد من تقدم الطالب.
4. مناقشة مشاكل أبنائهم وبناتهم والتي قد تؤثر على عملية التعلم.
5. التقدم بمساعدة إضافية أن اقتضت الحاجة ذلك.

تحديد درجة الفصل الدراسي
Determining The Course Grade

فلسفات تحديد العلامات المدرسية
Grading Philosophies

قبل معالجة كيفية تحديد الدرجات، يجب أن يكون المعلم على دراية كافية بفلسفته الشخصية بخصوص تحديد العلامات الدراسية للطلبة. كما ينبغي أن يدرك المعلم بأنه كما أنه ليس هناك ثمة نقاط اتفاق بخصوص الموقف السياسي الصحيح أو الخاطئ، فكذلك الحال بالنسبة لفلسفة وضع العلامات Marking Philosophy.

وأن المعلم الذي يمتلك فلسفة صارمة في وضع العلامات سوف يلتزم بشدة في تقييم الطالب على أساس متوسطات الاختبارات، دون النظر إلى الطالب كمعطى كلي عند تحديد الدرجة. وسيكون هذا المعلم مؤمنا إيمانا مطلقا بأن هذه هي الطريقة الوحيدة للحفاظ على الثوابت والمعايير، والارتقاء بمستوى الأداء الذي قد انخفض بشكل كبير في المدارس العامة. يميل هذا النوع من المعلمين إلى إعطاء درجات منخفضة للطلبة.

من جهة أخرى، يميل المعلم الذي يتبنى فلسفة متعاطفة Sympathetic Philosophy إلى التأكيد على أن علامات

الجميع تتأثر في الخلفية بالإضافة إلى القدرة. لذا فانه يؤمن بأن العوامل التي تقع خارج تحكم الطالب وسيطرته والتي يحوزها فحسب بولادته مصادفة، ينبغي أن لا تستخدم في تحديد الدرجات التي قد تؤثر تأثيراً حاسماً على مستقبلهم – سواء كان في الكلية أو الوظيفة. أن مثل هذا المعلم يميل إلى منح الطلبة درجات عالية.

ورغم أن هناك الكثير من الجدل والنقاش الدائر بين أنصار وجهتي النظر هاتين، لاشك أن الأفضل – بالنسبة للمعلم – هو التوجه صوب تحديد مسار متوازن. وينبغي أن ننشد توازنا يحاول التوفيق بين الحساسية تجاه الطالب وخلفيته، بالإضافة إلى الرسوخ والثبات في طلب شواهد متينة على الأداء المقبول. إن هذين الأمرين بحاجة إلى الاعتبار بعناية عند تحديد درجات الطالب.

تقانات لتحديد الدرجات

Techniques for Determining Grades

متى تم اعتبار مسؤوليات الطلبة، والآباء، والمعلمين في العملية التعليمية سيكون كل من الطلبة والآباء على أهبة الاستعداد لفهم كيف وصل المعلم إلى بطاقة تقرير الدرجة. إن بطاقة تقرير التقديرات المرسلة Report Card Rating عدة مرات خلال السنة للطلبة وآبائهم، تعد ذروة عملية التقويم. وفي تلك الأوقات، تقوم باختبار سجلاتك الخاصة بفقرات نوعية وكمية الواجب البيتي للطلبة، وجميع جوانب أنشطتهم الصفية، وعلامات اختبارهم، والحضور، والانضباط داخل الصف، والموقف الشامل، ومشاركتهم في مناقشات المجاميع الصغيرة والكبيرة، والمشاريع، ومجموع علامات الاختبارات المعيارية، ومهام تقييم الأداء، وحقيبة التقارير والمكتوبات الأخرى، والمعرفة بالآلات الحاسبة، والحواسيب، والممارسات التشكيلية المناسبة.

وبعبارة أخرى، أن تحاول تحديد مدى إيفاء الطالب بمسؤولياته، والى أي حد نجح/أو نجحت في تحقيق ذلك. وأخيرا سوف تصل إلى تحديد درجة، سواء كانت عبارة عن حرف:

A = مستوى رائع من الأداء.
B = مستوى جيد من الأداء.
C = مستوى مقبول من الأداء.
D = مستوى هزيل ولكنه أدنى حد مقبول من الأداء.
F = مستوى الفشل من الأداء.

أو عبارة عن رقم:

91-100 = A
81-90 = B
71-80 = C
65-70 = D
دون 65 = F

غالبا ما يسئ الآباء والطلبة فهم الطرق التي اعتمدها المعلم بالوصول إلى تحديد الدرجة. وان تراكب سوء الفهم هذا هو حقيقة امتلاك الدرجات درجة من الذاتية وتكون في بعض الأحيان اعتباطية. كذلك فإن مجموع درجات الاختبار تعكس درجة محددة من الذاتية، نظرا لأنها تنتج من الاختبار الذي يعده المعلم، والتي تمتاز بكونها أداة ذاتية بحد ذاتها إلى حد ما. ورغم بذل محاولات متعددة لتحديد طريقة علمية أو موضوعية للوصول إلى بطاقة تقرير التقديرات، فلم يفلح أحد في تحقيق ذلك، أي لم يفلح أحد في استبدال الحكم الاحترافي للمعلم بصيغة موضوعية. إن بعض الطرق التي تمهد للوصول إلى تحديد درجة، قد نوقشت بتفصيل أكبر في العناوين الآتية، والتي تتضمن:

1. استخدام صيغة.
2. إجراء مقارنات مع طلبة آخرين في الصف.
3. تحديد مقدار التحسن.
4. استخدام سجلات مميزة بدلا من الدرجات.
5. تحديد درجتي "مرور Pass" أو "إخفاق Fail" فقط.

تأمل الصيغة الآتية والتي تحدد فئات معلومة بنسب من الدرجة النهائية.

معدل اختبار الصف.	40٪
العمل الصفي وعمل المجموعة.	20٪
الحقيبة المدرسية (والتي تتضمن الواجب البيتي، والمشاريع، والتقارير، وغيرها).	20٪
الامتحان النهائي.	20٪

قد تعتقد بأن هذه الصيغة تمثل قاعدة عقلانية أو خطاً إرشاديا لتحديد الدرجات، ولكن الحقيقة، هو أن صيغة مشابهة قد استخدمت من قبل الكثير من المعلمين . علاوة على ذلك، تأمل الذاتية المتضمنة في أمور مثل: إعداد الاختبارات وتحديد درجاتها، بالإضافة إلى تحديد قيم النسب المثبتة.يضاف إلى ذلك، إن فقرات مثل الدقة في مراعاة المواعيد، والحضور، والموقف، والانضباط تمتلك تأثيراً كبيرا على قرار المعلم وبطريقة ذاتية. لذا حتى نجد تطبيق الصيغة، فإن العلامة المحتسبة قد تعدل إلى قيمة أعلى أو أدنى كما يراها المعلم مناسبة لكل حالة.

إن التقانة الثانية لحساب التقرير تركز إلى مبدأ مقارنة أداء الطالب الفعلي مع أداء طلبة آخرين في الصف. وعليه، فإن الطلبة الذين يبلون بلاء حسنا في نتائج الاختبار، والواجب البيتي، وبقية المهام (في ضوء قرار المعلم) سوف تكون علاماتها A: والفئة التي تليها ستكون علاماتها B، وهكذا تعد هذه التقانة الأفضل بالنسبة لصفوف الشرف والصفوف البطيئة أكثر من كونها صالحة للصفوف المتوسطة. أن تفسيرا مسهبا لهذه التقانة سوف يأتي بمرحلة لاحقة من هذا الفصل. أما التقانة الثالثة فتتكئ إلى احتساب مقدار التحسن الذي حصل خلال الفترة الزمنية المستغرقة. فعلى سبيل المثال، فإن طالبا في صف علاجي Remedial Class والذي ابتدأ بمستوى الحساب يكافئ الصف الخامس (وفقا للاختبارات المعيارية)، ولكنه أنهى الفصل الدراسي بمستوى الحساب يكافئ الصف السابع، يكون قد حصل على درجة معينة لمكافأة التقدم بسنتين خلال فصل دراسي واحد. وفي موقف من مثل هذا النوع، ستحدد فلسفة المدرسة فيما إذا اجتاز الطالب الفصل الدراسي، حتى ولو كان العمل دون المستوى المناسب للمدارس الثانوية. وستحدد سياسة المدرسة فيما إذا ستضمن هذه العلامة في المعدل الكلي للمدارس الثانوية الذي يخص الطالب المذكور (بالتكافؤ مع مساقات دراسية مثل الإنجليزية والدراسات الاجتماعية).

لقد حاز التقرير الذي يستخدم سجلات مميزة للطلبة والآباء شعبية ملحوظة في بعض قطاعات المدرسة. وبدلا من أن يلجأ المعلم إلى تحديد درجة حرفية أو رقمية، يلجأ إلى تقديم وصف مكتوب لموقف كل طالب من طلبته، ونتائج الاختبار، والواجب البيتي، والسلوك، وعوامل أخرى. ترتبط هذه التقانة، في بعض الأحيان، مع الدرجات الحرفية أو الرقمية مرة واحدة بالسنة، على الأقل.

حصلت تقارير "مرور – إخفاق Pass-fail" على شعبية واسعة في عقد الستينات وبداية عقد السبعينات. وفي هذا النظام يصدر المعلم حكما بصدد عبور طالب محدد للمساق الدراسي، من عدمه، وهل يستحق الحصول على وحدة تقديرية Credit، ام لا يستحق. ورغم أن عددا لا بأس به من الناس يعبر عن تأييده التام لهذا النظام، فإن قطاعات محدودة من نظم المدارس لا زالت مستمرة على استخدامه. ويعود السبب الرئيسي لتراجعه إلى وضعه المقدرة الأكاديمية المعتدلة على نفس المستوى الذي يتبوءه الإنجاز الفعلي. إن غياب إدراك وتمييز: الموهبة، والقدرة، والثقافة يعد أمرا غير مقبول لدى فئة كبيرة من الأشخاص.

تعد عملية تحديد الدرجات من أكثر المهام الصعبة التي تجابه المعلمين نظرا لضرورة اتخاذ مجموعة كبيرة من القرارات الذاتية. وكيف يستطيع المعلم أن يحدد موضوعياً فيما إذا كان الطالب يؤدي واجباته بقدر القدرة المتاحة، أو ما هو موقف الطالب تجاه الموضوع؟. يضاف إلى ذلك ان الدرجة ذاتها تتغير في المعنى والدلالة إلى حد كبير. فقد تدل علامة "A" على "عبقري أو موهوب في العمل" أو "مجاهد ومكافح في العمل". ومع ذلك، فإن كثيرا منا، ممن يعد نتاجا واقعيا لنظم مدارسنا، بالإضافة إلى أولئك الذين لا زالوا فيها، قد تعلمنا من خلال بعض طرق الحاسة السادسة ماذا تعني الدرجة. وإذا أردت أن تسأل الطلبة في صفك أن يباشروا بتقييم أنفسهم قبل أن تفعل ذلك بنفسك، فانهم سوف يمنحون لأنفسهم درجات تقارب تلك التي ستذهب إلى منحهم إياها، والى حد مقبول. إن المعلمين الذين يسألون طلبتهم بإعداد تقييم ذاتي لتقدمهم وإنجازاتهم في الصف عند نهاية الفصل الدراسي على علم بما ذكرناه آنفا. وعلى كل حال، فإن الأشياء ليست تصادقية كما قد تظهر لأول وهلة، ومن أجل هذا تظهر حالات فهم غير مكتوبة بين الطلبة والمعلمين بخصوص ما هي العلامة المحددة التي يستحق الحصول عليها نتيجة لأدائه خلال المساق الدراسي. ومع ذلك، تعد درجة الطالب التي يستحق الحصول عليها، خلال المساق الدراسي غير صالحة لان تكون مؤشرا على القدرة والإنجاز. ورغم ذلك، فإنها الدرجة، والعلامة الدقيقة التي يفترض بها أن تخبر: الطالب، والأبوين، والكليات، أو الجهة الموظفة بنجاح الطالب أو فشله في المساق الدراسي. وقد تستعمل، في بعض الأحيان، في توقع النجاح أو الفشل المحتمل في مجال واسع من الأنشطة والفعاليات المستقبلية. إن مثل هذا التأثير الكامن على مجرى الحياة المهنية للطالب، يستلزم بذل عناية بالغة عند إعداد تقييمات الطالب.

اختبارات الصف وامتحاناته السريعة – المعدلة
Adjusted Classroom Tests and Quizzes

إن التأكيد على اختبار "المعايير" القبلية Pre- Standards Testing يهدف إلى قياس براعة الطالب وتمكنه من وقائع ومهارات محددة. ومنذ تقديم "المعايير" التي قام بإرسائها المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات، فإن التأكيد والاهتمام قد اتجه نحو طرائق وأساليب بديلة لتحديد إمكانية الطالب. من أجل هذا اقترحت أساليب ومعالجات تختلف عن الطرائق التقليدية السائدة.

تركز الأساليب المستحدثة على تقويم الطالب من خلال الكتابات التي تشمل: التقارير، وسجلات العمل، والمفكرة

الشخصية، والحقيبة المدرسية. إن استخدام هذه الأساليب لا يعني تفريغ المعاني التي تمتاز بها الاختبارات الصفية، والتي قد ألفنا التعامل معها، أو وجود ثمة إمكانية لاختفائها من درس الرياضيات. وبالحقيقة فإن الاختبارات والامتحانات السريعة سوف تبقى الآلة الرئيسية لتقويم الطلبة وتحديد درجاتهم. وينبغي أن نتذكر على الدوام، بأن الاختبارات والامتحانات السريعة هي طرق قد نجحت، وبمرور الزمن، في اجتياز الاختبار فأضحت أساليب لا غبار على قدراتها في تقويم أداء الطالب، في حين لا زالت الأساليب والطرائق الجديدة بحاجة إلى أن تقدم لنا براهين ملموسة على عنصر القيمة الذي تمتاز به. وهناك حاجة ملموسة إلى بعد زمني قد يستغرق بضعة سنين قبل أن يقتنع المعلمون، والطلبة، والاستشاريين، والآباء بجدواها وصلاحيتها.

إنشاء اختبارات جديدة من أخرى قديمة

Creating New Tests from Old

تبدو مسألة تبديل الاختبار سهلة نسبيا حتى تشخص أمامها عقبة التطابق والتكيف مع توجهات "المعايير" الجديدة. ويمكن تعديل الأسئلة لكي نعكس عمق الإدراك المفاهيمي في الرياضيات. فعلى سبيل المثال، إن المسألة الآتية قد أعدت بأسلوب الاختيارات المتعددة: يقوم هاري بتصميم إشارة حملة Campagin، وقد استخدم الحرف العلوي H على:

1. نقطة تماثل واحدة فقط.
2. خط تماثل واحد فقط.
3. خطي تماثل ونقطة تماثل واحدة فقط.
4. نقطتي تماثل وخطي تماثل.

في هذا السؤال تبرز، في بعض الأحيان، صعوبة تحديد هل أن الطالب قد أدرك المفهوم الرياضي، أم انه بارع في مهارات التعامل مع الاختبار. ولغرض التحكم بهذا الأمر، يمكن أن تعرض المسألة دون إدراج الاختيارات الأربعة، فتصبح المسألة، "يقوم هاري بتصميم إشارة حملة، مستخدما الحرف العلوي H. اعرض وحدد عدد نقاط / خطوط التماثل الموجودة". إن تعديل هذه المسألة قد نتج عنه تغير ملحوظ في مهام الطالب من دائرة الاختيار إلى دائرة "الأداء"، أي، سيتوجب على الطالب عرض وتحديد المعرفة المفاهيمية Canceptual Knowledge لتماثل النقاط والخطوط. ورغم سهولة تحديد درجة أسلوب الاختيارات المتعددة، لكن هذا الأسلوب لن يكون افضل أداة تقييم يمكن استخدامها لتحديد الإدراك المفاهيمي. وعليه فإن الاستراتيجية المفيدة في تحويل اختبارات الاختيارات المتعددة من النوع الذي "يرتكز إلى الحقائق Fact- based" إلى تقييم أداء ستكون عبر تعديل بسيط لسؤال الاختيارات المتعددة واستبعاد الخيارات من مضمونها.

أمثلة على أسئلة بتوجيهات "المعايير"

Examples of Questions with Standards Orientation

1. أ. وضح برسوم تخطيطية مناسبة معنى أن دالة log x تساوي عددا سالبا.

   ب. استخدم آلة حاسبة علمية أو رسومية لاحتساب قيمة x مقربة إلى اقرب عشرة إذا كان Log x = - 1.5365.
2. أ. اعرض تطبيقا عمليا وبرهن باستخدام رسم تخطيطي النظرية القائلة بأن نقطتين أو أكثر والتي تبعد كل منها بمسافة متساوية عن نهايتي قطعة مستقيم تحدد المنصف العمودي لقطعة ذلك المستقيم.

   ب. بين وبرهن معكوس النظرية الواردة في الفقرة (أ).
3. استخدم الرسم التخطيطي – الشجري Tree Diagram لعرض الاحتمالات الآتية:

   إذا انقلبت قطعة نقود كبيرة خمس مرات، جد احتمالية الحصول على 3 أوجه (كحد أدنى)، أو 3 اوجه بالضبط، أو 3 أوجه وظهرين.
4. اكتب بأبسط صورة حدود مفكوك $(x+y)^5$.
5. جد المتوسط، والوسيط Median، والمنوال Mode، والانحراف المعياري لمجموعة الأعداد: 16، 4، 1، 20، 8-، 7، 13-. ارسم مخطط المستقيم المتكسر Broken Line الذي يضم هذه النقاط.

نظم أخرى لتحديد العلامات المدرسية

Other Grading Schmes

إن إحدى التقانات البسيطة المستخدمة لتحديد درجات الطالب، والتي استخدمت بنجاح بواسطة أكثر من معلم تتضمن عدة خطوات:

1. إهمال مبدأ 100 بالمائة التقليدي بوصفه مؤشرا على ورقة الاختبار المثالية. فهناك، بالواقع، بعض الاختبارات التي تمتاز بكونها أكثر صعوبة، واكثر تفصيلا، أو أكثر أهمية بمعيار رياضي من البقية. وعليه، فإن تحديد علامات جميع أنواع الاختبارات على أساس 100 بالمائة يبدو غير معقولا بصورة صارخة، وبالخصوص، عند إيجاد معدل علاقاتها، وكانت جميعا متوازنة من حيث وزن علاقاتها. لذا يمكن أن تعد الاختبارات بحيث يكافئها أي مجموع

من العلامات استنادا إلى حكم المعلم بخصوص قيمة العلامة لكل سؤال.

2. عند نهاية فترة تحديد العلامات، يتم جمع نقاط الاختبار. يضاف إلى ذلك أن الصيغة التي يحددها المعلم، ومن النوع الذي تم وصفه سابقا، وتتضمن: الواجب البيتي، والأداء الصفي، والموقف، والحضور، وأمور أخرى، يمكن استخدامها أيضاً في تحديد درجة تشمل مواضيع خارج الاختبار في التقويم الشامل للطالب، وبعدها يتم احتساب المجموع الكلي لكل من نقاط الاختبار وما سوى الاختبار.

3. تعد قائمة بأسماء الطلبة مرتبة من أكبر مجموع كلي للنقاط نزولا إلى اقل مجموع كلي. وعلى هذا الأساس يكون الطالب الأول حاصلا على درجة 99٪ (أو 100٪، أو 95٪ في ضوء قرار المعلم) وستتغير قيم درجات الطلبة الذين يلونه بالترتيب وفقا لهذه الصيغة.

4. بعد إكمال عملية تحديد الدرجات، تظهر الحاجة إلى تفحص نهائي يباشره المعلم لمعرفة فيما إذا نجم عن استخدام هذا الأسلوب أي نوع من الجور الواضح على أحد الطلاب، فحصل على درجات قليلة جدا لا تتناسب مع ما حصل عليه أقرانه، أو زيادة غير مبررة. فعلى سبيل المثال، رغم أن الطالب قد يؤدي أداء هزيلا في النصف الأول من فترة تحديد العلامات، فقد يكون ذو أداء متفوق في النصف الثاني، والذي قد يكون الجزء الأهم منهما. آنذاك قد يميل المعلم إلى عكس هذه الحالة الواقعية في الدرجة النهائية للطالب، وسيعمد آنذاك إلى تعديل الدرجة في ضوء ذلك. وهذا مثال آخر على الحكم الذاتي الذي قد يلجأ المعلم إلى استخدامه في تحديد الدرجات.

تتوفر أساليب أخرى من نظم تحديد العلامات المدرسية لاستخدامات المعلمين في بعض المدارس. أحدها نظام معياري المرجع Criterion Referenced (يخالف نظام معياري المحك Norm Referenced والذي تم وصفه سابقا) والذي يتيح للمعلم فرصة تقييم مقدار ما توصل إليه الطالب في أمور موضوعية محددة. ويتم تصنيف هذه الأهداف وتدرج في فقرات بواسطة المهارة أو المفهوم. إن الفائدة الأساسية من هذا النظام تكمن في إخبار الطلبة (بالإضافة إلى ذويهم) بمواطن القوة والضعف المقيمة لديهم خلال مساق دراسي محدد، وبالمقارنة مع القدرات التجميعية لعموم المساق الدراسي.

ولا يوفر الأخير أي تجزئة وتقسيم بالخبرة كما يفعل سابقه.

ولسوء الحظ، فإن القرار الخاص باختيار نظام تحديد العلامات المدرسية لا يقع في دائرة اختيار المعلم، لان مثل هذه القرارات تتخذ، غالبا، بواسطة إدارة المدرسة، وعليه ستكون معرفة المعلم بالخيارات المتعددة مثمرة ومفيدة إذا استدعته الإدارة لغرض المشاركة في عملية صنع القرار الذي يخص استراتيجيات التقييم وتحديد الدرجات.

خلاصة SUMMARY

ماذا يحمل عبور المساق الدراسي من معان؟ انه يعني بأن الطالب قد استكمل جميع المسؤوليات التي تخص الواجب البيتي، والمشاركة الصفية، والحضور، والموقف، وقواعد انضباط السلوك الصفي، والحصول على نتائج اختبار مقبولة. وهناك دور حاسم أمام الأبوين والمعلمين لكي يشاركوا في إدارته بمساعدة الطالب على استكمال المسؤوليات: الأبوين بوصفهما مراقبين، والمعلم بوصفه مرشدا.

وبطريقة مشابهة، "الفشل في مساق دراسي" يعني بأن الطالب لم يباشر المسؤوليات الملقاة على عاتقه، وان من الواضح بأنه ليس المعلم بمفرده الذي يحمل على عاتقه مسؤولية هذه الواقعة.

يقوم المعلم بتقويم الطالب في ضوء إكماله للمسؤوليات عدة مرات خلال الفصل الدراسي، ويحدد علامات الطالب بواسطة درجات حرفية أو رقمية، أو بواسطة تقرير مكتوب، واعتمادا على السياسة التي تنتهجها المدرسة. ورغم الجهود المبذولة لإرساء تقدير درجات الطالب على أسس علمية محكمة، فإن الحكم الذاتي للمعلم يلزم بلعب دور حاسم في عملية التقويم.

في مسألة تحديد الدرجة، ذهب بعض الناس إلى استعراض دور المعلم كما هو دور الناسخ الذي لا يزيد ما يفعله على تدوين أداء الطلبة. إن هذا المنظور الضيق يجافي الواقع الملموس، ويحد من مساحة الدور الذي يتصدره الحكم الاحترافي للمعلم، والذي ينبغي أن يمارسه في عملية تحديد العلامات المدرسية.

Suggested References مراجع مقترحة

"Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught Using Dynamic Software." Mathematics Teacher. (January 1998) 76-82.

Assessment Standards for School Mathematics. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1995.

Battista, Michael T. "The Mathematical Miseducation of America's Youth: Ignoring Research and Scientific Study in Education." Phi Delta Kappan 80 (February 1999): 424-433.

College Board. "1998 Free-Response Questions." www.collegeboard.org/ap/calculus/frq98/index.html.

Croker, Linda, and James Algina. Introduction to Classical and Modern Test Theory. New York: Holt, Rinehart, & Winston, 1986.

Darling-Hammond, L., and B. Falk. "Using Standards and Assessments to Support Student Learning." Phi Delta Kappa (November 1997) 190-199.

EQUALS: Assessment Alternatives in Mathematics. California Mathematics Council.

Evaluation in Mathematics. 1972 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1972.

"Focus Issue on Assessment." Arithmetic Teacher 84 (February 1992).

"Focusing on Worthwhile Mathematical Tasks in Professional Development: Using a Task from the National Assessment of Educational Progress." Mathematics Teacher. (February 1998) 156-161.

Greer, Anja S., Helen L. Compton, Alice B. Foster, Jo Ann Mosier, Lew Romagnano, and Carmen Rubino. Mathematics Assessment: A Practical Handbook for Grades 9-12. Assessment Standards for School Mathematics Addenda Series. Edited by William S. Bush and Jean Kerr Stenmark. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1999.

"Implementing the Assessment Standards for School Mathematics." Mathematics Teacher 94, no. 1 (January 2000): 31-37.

Office of Educational Research and Improvement (OERI). Facilitating Systemic Change in Mathematics and Science Education: A Toolkit for Professional Developers North Central Regional Educational Laboratory. U. S. Department of Education. 2001.

Office of Educational Research and Improvement (OERI). Improving Classroom Assessment: A Toolkit for Professional Developers. North Central Regional Educational Laboratory. U. S. Department of Education. 2001.

Ott, Jack, Alternative Assessment in the Mathematics Classroom. New York: Glencee-McGraw-Hill, 1994. 5-17.

Principles and Standards for School Mathematics. Reston VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

Rubrics: North Central Regional Educational Laboratory (1998). http://www.iecrel.org/sdrs/areas/issues/methods/instrctn/in51k59.htm

Simmons, W., and L. Resnick. "Assessment as a Catalyst of School Reform." Educational Leadership (February 1993): 11-15.

"Students Generating Test Items: A Teaching and Assessment Strategy." Mathematics Teacher. (March 1998) 198-212.

"Student Portfolios in Mathematics." Mathematics Teacher (April 1998) 318-325.

"Student Self-Assessment and Self-Evaluation." Mathematics Teacher. (October 1996) 548-554.

Thompson, Denisse R., and Sharon L. Senk. "Implementing the Assessment Standards for School Mathematics Using Rubrics in High School Mathematics Courses." Mathematics Teacher 91 (December 1998): 786-793.

Tuckman. Bruce W. Testing for Teachers. New York Harcourt Brace Jovanovich, 1986.

7 إثراء تعليم الرياضيات
Enriching Mathematics Instruction

تنسجم العقيدة التي تؤكد على ضرورة إثراء تعليم الرياضيات، كلما كان ذلك ممكنا ومناسبا، مع جميع إصدارات المعايير التي أبصرت النور خلال السنين القليل الماضية. وفي البداية ينبغي أن ينص بصورة مشددة بأن إثراء الرياضيات لن يقتصر على ذي المواهب، فجميع الطلبة بكافة مستويات قدراتهم يجب أن يحصلوا على إثراء ملموس في تعليم الرياضيات. وسنحاول في هذا الفصل استكشاف الطرق التي يمكن أن تكون مصدرا خصبا في إثراء تعليم الرياضيات لجميع الطلبة.

يمكن أن ينجلي إثراء الرياضيات ذاتيا بثلاثة طرق مختلفة، على الأقل. إن اسهل هذه الطرق واقلها إبداعا وابتكارا في الإنجاز هي طريقة التعجيل acceleration. وترتكز هذه الطريقة إلى عملية نقل الطالب الأفضل خلال المسار الرياضي بصورة أسرع. بصورة عامة، تعاني عملية التسريع من بضعة عوائق، (الأول) يمكن نقل الطالب بسرعة كبيرة بحيث يتجاوز حدود الرياضيات. أي، إن الطالب قد ينهي متطلبات المساق الدراسي الذي تقدمه المدارس الثانوية، دون أن يتبقى لديه أي مساق من مادة الرياضيات يمكن أن يناله في حين لم يكمل بقية متطلبات المساقات الدراسية للمواد المدرجة في قائمة متطلبات المدارس الثانوية. وفي مثل هذه الحالة، قد يستمر الطالب بصورة شخصية مع معلم يتطوع بأن يكون الناصح المخلص Mentor له خلال الفترة المتبقية أمامه، أو قد يلجأ إلى التسجيل على مساق دراسي في إحدى الكليات القريبة (إذا توفر الخيار)، أو قد يمنح الطالب نفسه عطلة من الرياضيات "Takes Vacation". وتعد الخطوة الأخيرة خزيا لا يغتفر، لأن الطالب اللامع قد يضيع تماما عن دراسة الرياضيات في المستقبل القريب.

إن مبرراً آخر لإثراء المعرفة الرياضية للطالب بطرق أخرى غير تعجيله / أو تعجيلها لأن مثل هذا الإثراء قد يؤدي إلى حث وتحفيز الطالب على مواصلة دراسة الرياضات بجدية في الفترات اللاحقة، أو قد تؤدي ببساطة إلى تحفيز الطالب على تحسين فهمه المفاهيم والأفكار الرياضيات. وهناك المزيد من الموضوعات والمفردات الرياضية التي يستطيع الطالب استكشافها، والتي تقع خارج دائرة المنهاج الدراسي النظامي. إن اعتبار هذه المواضيع المتعددة (والتي قد تعد "خارج المسار المألوف Out off the Beaten Path") يمكن أن يؤخذ بصورة أكثر جدية بعد استعراض جملة من الأفكار المتعددة والتي تعرض بوصفها وحدات إثرائية في نهاية هذا الكتاب.

يطلق على النوع الآخر من الأساليب الإثرائية "التوسيع Expansion". يشير هذا الاصطلاح إلى عمق الموارد المعرفية لمعلم الرياضيات بحيث ينقب في مفردات وموضوعات المنهاج الدراسي المقرر بصورة تفصيلية خارج السياقات التقليدية المطلوبة. إن عرض المزيد من التفاصيل الدقيقة سوف يحث الطلبة المتميزين والنابهين على التنقيب في أعماق سحيقة بالموضوعات التي تدرس داخل الصف.

يشير اصطلاح "الاستطراد Digression" إلى أسلوب إثرائي آخر، يميل إلى تخصيص جزء من وقت الدرس لمراجعة موضوع يقع خارج نطاق المنهاج الدراسي المقرر، بيد انه يرتبط بصلة واضحة مع احدى

المفردات الموجودة فيه. إن الخروج عن التخوم الحصينة للمقرر الدراسي والى موضوعات تمت إليه بصلة، ودراسة هذه الموضوعات بتفصيل مناسب قد يفتح أفاقا جديدة أمام اهتمامات الطلبة. ولكن ينبغي أن يبقى عالقا في أذهاننا، على الدوام، بأن الطلبة الصغار لا يمتلكون (بصورة عامة) قدرات محنكة على التجريد كما هو الحال مع الكبار، أو الطلبة الأكثر نضوجاً.

وقد تجلى بوضوح من خلال الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب، بأننا نتعهد عقيدة إثراء تعليم الرياضيات في المدارس الثانوية، وأن جزءا من وقت الموضوعات المقررة الذي اقتطع لإجراء أنشطة إثرائية لا يمكن أن يعد وقتا ضائعا من التدريس النظامي. ولكن يصح العكس! فالوقت المستخدم في الأنشطة الإثرائية هو بالحقيقة استثمار للوقت. وسيصبح الطلبة المشاركين أكثر نشاطا في قاعة الدرس، ومتعلمين بكفاءة اكبر عندما سيصرف المدرسون جزءا من الوقت لتحفيزهم وتعميق اهتمامهم بالرياضيات.

إن المستمع "المنتبه Turned on" يحتاج إلى زمن اقصر لتعلم المفاهيم الجديدة.

إثراء تعليم الرياضيات بواسطة الأسلوب التاريخي
Enriching mathematics instruction with a historical approach:

تذهب الأسطورة الشائعة إلى أن درس الرياضيات لا حياة فيه. وأنه فاتر باهت. ولسوء الحظ، غالبا ما تكون هذه الأسطورة مقاربة للصواب – ولو أنها بحاجة لأن لا تكون كذلك. وكثيرا ما نجد أنفسنا غارقة بالتركيز على تعليم الرياضيات للوصول إلى الموعد النهائي للإنجاز Deadline، مثل تقديم اختبار. أو إكمال مساق دراسي. إن التنعّم بتعليم ماهية الموضوعات التي تعالجها الرياضيات يبدو بعيدا عن تناول أيدينا المتعبة. ولكن هل هذا هو الواقع؟ فنحن نستطيع أن نعلّم ببساطة موضوع من أين جاءت الرياضيات، ومن سبق في التفكير والتأمل بها، ومن قام في مرحلة لاحقة بتطويرها وتخليصها من الشوائب العالقة بمفاهيمها.

ببساطة، نستطيع توظيف تاريخ الموضوع، والذي يشمل: الواقع الحي. والحب، والنجاحات، والإخفاقات الذي عاناه الأشخاص الذين اخترعوا الرياضيات وأبدعوا تفاصيلها، لكي ننفخ بالحياة في جسدها الذي لولا هذه المحاولة لبقي فاترا لا حياة فيه ولا دماء تدب في أوصاله. وتظهر أوقات حيث يتكامل التاريخ مع مادة الموضوع بطريقة مشرقة مليئة بالحيوية والنشاط.

إن القسم الآتي سيوفر عينة متواضعة حول كيفية تحقيق هذا التكامل في موضوعات محددة برياضيات المدارس الثانوية. إن البيبلوغرافيا التي تم اختيارها بعناية بالغة ستظهر في نهاية هذا الفصل. وستسهم في مد يد العون لك في تنمية وتطوير الخلفية المطلوبة لاستخدام الأسلوب التاريخي عند تعليم مادة الرياضيات.

الهندسة: في البداية
Geometry: In the Beginning

إن النمو والتطور الأصيل للرياضيات في مصر وبلاد الرافدين كانت نتيجة لرغبة الكهان في بناء المعابد والنصب، والطموح الذي لا يعرف حدودا لدى الملوك والفراعنة الذين يريدون الاستيلاء على مساحات شاسعة من الأراضي ،واقتناء الضرائب من أصحابها، والعاملين فيها. كانت التقانات السائدة في تلك العصور بسيطة، وبدائية، ومدركة بالبديهة لكنها كانت دقيقة ومناسبة لتغطية متطلباتهم. وتتوفر لدينا شواهد تاريخية لبعض من هذه التقانات في ورق البردي لاحمس Ahmes Papyrus والتي قد دونت في حدود عام 1650 قبل الميلاد وتم العثور عليها في القرن التاسع عشر، وقد احتفظ بأجزاء منها في كل من متاحف لندن ونيويورك.

احتوت أوراق البردي على صياغات لاحتساب مساحة المستطيل، والمثلثات قائمة الزوايا، وشبه المنحرف الذي يحتوي على ساق واحد عمودي على القاعدة، وأخرى لتقريب مساحة الدائرة. ويبدو بأن المصريين قد نجحوا في تطوير هذه الصياغات من خبرتهم في التعامل مع مساحات الأراضي المنتشرة لديهم.

يعد طاليس (640-546 ق.م) أول رياضي الذي أبدى معارضته وعدم ارتياحه إزاء الطرق التي ترتكز إلى الخبرة بصورة كلية. ونحن نكن لهذا الرجل احتراما بالغا في هذه الأيام بصفته الإنسان الذي كان يؤكد دائما مقولته الشهيرة "برهن ذلك Prove It" وكان يكثر من تطبيق مقولته على ارض الواقع. ومن بين افضل النظريات المعروفة، والتي برهنت للمرة الأولى بحججه الرياضية والمنطقية هي:

- زاويتا قاعدة المثلث متساوي الساقين متطابقة.

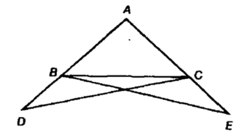
- الزوايا القائمة متطابقة.
- الزاوية المماسة المرسومة في نصف دائرة هي زاوية قائمة.

اقتفى فيثاغورث (582-507ق.م) واتباعه الذين ينتمون إلى تيار الفيثاغورية أثار خطى طاليس، واستخدموا طريقته في البرهان بتطوير نظرية فيثاغورث، والنظريات التي عنيت بمجموع قياسات زوايا الأشكال متعددة الأضلاع، وخواص المستقيمات المتوازية، والأجسام الخمسة الصلبة-المنتظمة، والكميات غير القابلة للقياس Incommensurable Quantities. لقد كانت جهود طاليس وآراؤه الرياضية، الحجر الأساس لبداية عصر التطور الرياضي والتي أضحى فيها الاستنتاج الرياضي المنهج الأكثر قبولا في دائرة الاستدلال المنطقي. استخدمت هذه الطريقة لاشتقاق وتوليد النظريات من مسلمات، وفرضيات، وبهذه الطريقة، بدأت بتطوير نظام يتألف من عبارات وقضايا ذات نسق منطقي محكم. لقد وصل هذا العصر إلى ذروته مع عناصر اقليدس *Euclid's Elements* بعد طاليس بثلاثمائة عام.

توجه اقليدس، في "العناصر"، نحو توحيد عمل المدرسيين Scholars الذين سبقوه عبر جمع وعرض الإرث الرياضي في زمنه وبأسلوب منهجي – ويعد حقا إنجاز رائعا. تضمن عمله، أيضاً، على عناصر إبداعية وأخرى مستحدثة، وباستخدام مناهج استدلالية نجح في وصف كم هائل من المعرفة التي يمكن إحرازها واكتسابها بواسطة الاستنتاج الرياضي فقط. لقد ضمّن اقليدس في كتاباته الجبر، ونظرية العدد، والهندسة.

لقد اصبح كتاب "العناصر" عملا رياضيا ذو أهمية بالغة في حضارة العالم المتمدن، وقد بوشر بترجمته من اللغة اليونانية إلى اللغة العربية (عام 800م) ثم من العربية إلى اللاتينية (عام 1120م). ولقد ظهرت الطبعة الأولى-اللاتينية عام 1482م، وقد تبعتها طبعات أخرى متلاحقة. يأتي "العناصر" بعد كتاب الإنجيل في عدد الطبعات والإصدارات بلغات متعددة، حيث لا ينافسهما كتاب آخر في تاريخ الحضارة الأوربية. لقد كتب العمل الأصلي في ثلاثين قطعة رق منفصلة (كتاب). إن النظرية الخامسة في الكتاب I هي النظرية المعروفة "زاويتا قاعدة المثلث متساوي الساقين متطابقة" (اشتقت كلمة متساوي الساقين Isosceles من كلمتين يونانيتين هما:

isos والتي تعني متساوي، و skelos والتي تعني ساقين). إن الطريقة التي تستخدم حاليا، بكثرة، للبرهنة على صحة هذه النظرية تتطلب إنشاء منصف زاوية من خلال زاوية الرأس. وتورث هذه الطريقة خلافا مع الصفائية Purists، نظرا لأنها تطرح مسألة منصف الزاوية قبل حلول أوانها. بيد أن إقليدس قد قام في عرضها بأسلوب مختلف. إن رسما تخطيطيا لبرهانه كما يلي:



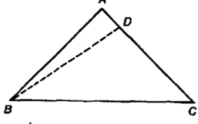
المعطى: المثلث ABC وفيه $\overline{AC} \cong \overline{AB}$. قم بمد المستقيمين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ خلال النقطتين B، C، على التوالي، إلى النقطتين D،E بحيث $\overline{CE} \cong \overline{BD}$. إذن $\Delta ADC \cong \Delta AEB$ بحيث $\angle D \cong \angle E$ و $\overline{EB} \cong \overline{DC}$.

بعدها $\Delta BDC \cong \Delta CEB$، حيث $\angle DBC \cong \angle ECB$.

إذن $\angle ABC \cong \angle ACB$.

وهو المطلوب إثباته Q.E.D[*] (و.م.أ).

إن النظرية التي استكمل برهانها انفا، كانت تعرف بـ "Pons a Sinorum" أو "جسر تخمين (المجانين)" في العصور الوسطى. إن المعنى المتضمن في هذه التسمية يعود إلى ان بعض الطلبة يعانون من صعوبة "اجتياز" هذا الجسر لكي يستطيعوا الاستمرار بدراستهم للهندسة. لقد برهن اقليدس نقيض هذه النظرية بطريقة غير مباشرة (reduction ad absurdum).



المعطى: المثلث ABC، حيث $\angle B \cong \angle C$. إذا كان $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ بعدها افترض AB∠AC. ثبت نقطة D على قطعة المستقيم $\overline{AC}$ بحيث $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. ثم $\Delta DCB \cong \Delta ABC$. وهذا أمر مستحيل. $\therefore$ $\overline{AC} \cong \overline{AB}$.

خلال تيار التاريخ الإنساني، وبالخصوص خلال القرون الأربعة الأخيرة، فإن عناصر اقليدس قد بقيت تعاني من تحريفات وتشويهات لا يمكن تصورها. فقد تم: تبسيطها،

(*) Q.E D هو اختصار quod erat demonstrandum والتي تعني "وهو المطلوب إثباته". وتكتب في بعض الأحيان بعد استنتاج البرهان في الرياضيات.

وتعقيدها. وإسقاطها، وتشويهها، وتحريفها، وفي أحايين أخرى غيرت بحيث ضاعت معالمها. وكانت النتيجة؟ هندسة تحليلية. وهندسة وصفية، وطوبولوجيا، وهندسة لا اقليدية، ومنطق. حتى التفاضل والتكامل (الحسبان)، والفيزياء النظرية المعاصرة. ولا زالت النهاية بعيدة عن تخيلاتنا الواهنة!.

إنشاءات: الفرجار والمسطرة العدلة

Constructions Compasses and Straightedge

حيثما كانت الإنشاءات مطلوبة في ميدان الهندسة، فإن الأدوات التي ينبغي استخدامها (وما لم يشر إلى أمر محدد) تتألف من الفرجار المألوفة ومسطرة عدلة بلا تأشيرات فقط (*). أن تبرير توظيف هذه الأدوات يستند إلى المسلمات الثلاثة الآتية. والتي ذكرت في بداية "عناصر" اقليدس:

لنسلم بما يأتي:

1. إن الخط المستقيم قد يرسم من نقطة إلى أية نقطة أخرى (مسطرة عدلة).
2. إن قطعة الخط المستقيم يمكن مدها بأي امتداد على طول خط مستقيم (مسطرة عدلة).
3. إن الزاوية يمكن رسمها من أي مركز، وبأي مسافة من ذلك المركز (الفرجار).

لقد مارس اقليدس عمله بواسطة فرجار بدائي، أما الفرجار الذي نستخدمه في هذه الأيام فيمكن استخدامه، فقط، في المسلمات السابقة، وتمتلك القابلية على عمل إنشاءات أكثر سهولة. لحد ما، من تلك التي كانت لاقليدس.

يمكن إجراء الإنشاءات المعهودة للهندسة الاقليدية بواسطة الفرجار فقط. في عام 1797، كتب الرياضي الايطالي، لورنزو ما شيروني Lorenzo Mascheroni، هندسة الفرجار Geometry of Compass، والتي برهن من خلالها بأن جميع إنشاءات المسائل التي يمكن حلها باستخدام المسطرة العدلة والفرجار، يمكن حلها بواسطة الفرجار فقط (**). وتعرف هذه القضايا باسم "إنشاءات ماشيروني". وندرج فيما يأتي مثالا بسيطا عن إنشاءات ماشيروني:

(*) الكلمة فرجارات هي اسم جمع. مثل كلمات المقص، والسروال لأن كل منها يحتوي على فرعين. ورغم استخدام كلمة فرجار Compass لبيان كلمة Compasses فإن كلمة فرجار Compass، بمعيار محدد، هي اداة لتحديد الاتجاه (المؤلف).

(**) للحصول على برهان بأن المسطرة العدلة بمفردها تصلح أن تكون بديلا عن المسطرة والفرجار انظر كتاب.

Advanced Geometric Constructions, By A. S Posamentier and W. Wernick (Palo Alto: Dale Seymour, 1988).

المعطى قطعة المستقيم $\overline{AB}$. احتسب بواسطة الفرجار، فقط، نقطة المنتصف M لقطعة المستقيم $\overline{AB}$.

ان التسلسل الآتي للأشكال الرسومية يستثمر الفرجار المألوف في أيامنا هذه، ويظهر الحل الخاص بالمسألة المطروحة.

خطوة ١: معطاة

خطوة ٢

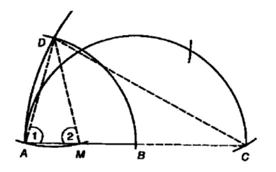
خطوة ٣: استخدم الفتحة AB كنصف قطر

خطوة ٤

خطوة ٥: استخدم C كمركز

خطوة ٦: استخدم D كمركز و M كنقطة منتصف

ويظهر هنا مخطط آخر للبرهان على صحة الإنشاء.



ارسم خطوط الإنشاء كما مبين، ولاحظ بأن $\overline{ABC}$ هو خط مستقيم.

1. بما إن المثلث ABC هو مثلث متساوي الساقين، $\angle CDA \cong \angle 1$.
2. بما إن المثلث $DAM\Delta$ هو مثلث متساوي الساقين، $\angle 2 \cong 1\angle$.
3. إذن، $\Delta ACD \sim \Delta DAM$.
4. إذن، $\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AD}$ أو $AM = \frac{(AD)^2}{AC}$

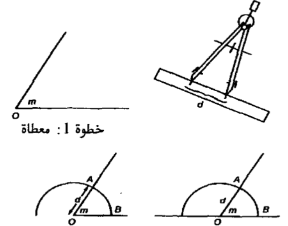
5 لكن، AB=AD، 2(AB)=AC.

6 إذن، $AM=\frac{(AB)^2}{2(AB)}$ أو $AM=\frac{AB}{2}$

إن تصنيف قطعة مستقيم أو زاوية ما بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة لا تزيد عن كونها أمرا بالغ السهولة. أما تقسيم قطعة المستقيم إلى ثلاثة أقسام فتمتاز بكونها أكثر صعوبة وتعقيدا، لكنها ممكنة. وقد أصيب المهندسين اليونان-الأوائل- بحيرة وارتباك عندما فشلوا في محاولاتهم المستمرة لتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة فقط. (نحن نتحدث هنا عن زاوية عامة General Angle، وليس زاوية خاصة مثل الزاوية القائمة، والتي يمكن تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية عن طريق إنشاء زاوية بقياس 60^{o} ثم زاوية بقياس 30^{o}).

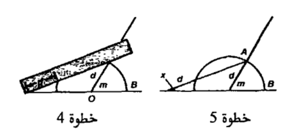
إن إحدى التقانات الأكثر خصوبة في الرياضيات، هي تلك التي تعمل على تغيير التعليمات Regulations التي تعمد إلى اتباعها. وعندما تصبح هذه المحددات قيودا تكبل يديك عن فعل ما تريد. وعليه، إذا استخدمت أدوات الإنشاء التقليدية فانك ستفشل بالبحث عن حل لمسألة التقسيم الثلاثي Trisection Problem، ربما قد تكون هناك أدوات أخرى تستطيع إنجاز هذا العمل البارع. وهذا يعني، بالطبع، بأن مسلمات اقليدس الإنشائية ينبغي أن تعدل ويصار إلى تغييرها.

اقترح ارخميدس Archimedes بأن من المكن تقسيم زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة والتي تحوي على تأشيرتين عليها، فقط. ويظهر فيما يأتي وصف لإنشاء ارخميدس، ويأتي من بعده البرهان.



خطوة 1: معطاة

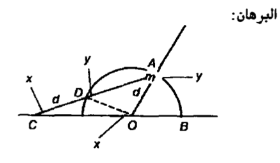
لتكن المسافة بين التأشيرتين d.



خطوة 4 خطوة 5

يمكن نسخ $x=\frac{1}{3}\angle m$ بطرق الإنشاء المعتاد في $\angle m$.

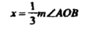
البرهان:

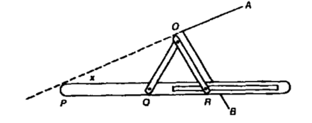


1. المستقيم $\overline{OD}$ قد رسم حيث d=OD.
2. المثلث متساوي الساقين DCO فيه زوايتي قاعدة متطابقتان، وكذلك الحال بالنسبة للمثلث متساوي الساقين ADO.
3. في المثلث DCO، y=x+x=2x.
4. في المثلث ACO، m=y+x.
5. إذن m=2x+x أو $x=\frac{m}{3}$.

إن هذا الإنشاء قد اصبح ممكناً لأن قواعد اللعبة (المسلمات) قد تم تغييرها. وقد عمد رياضيون في العصور السابقة، وآخرون في عصرنا الحالي إلى تغيير القواعد بصورة جذرية فانتجوا طرائق بارعة وذكية لتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية.

فقد اخترع الرياضي الفرنسي بليز باسكال Blaise Pascal آلة غير تقليدية للتقسيم الثلاثي للزاوية. إن القضبان قد مثلت بواسطة قطع المستقيمات $\overline{PQ}$، $\overline{QO}$، و $\overline{OR}$ متساوية الأطوال. إن كل من Q، O مرتكزات متحركة Movable Pivots، وتتحرك R على طول الشق. يمكنك أن تبرهن بسهولة أن:


$$x=\frac{1}{3}m\angle AOB$$



هناك إنشاءات أخرى حيرت اليونانيين، ولا زالت تحير الرياضيين الذي أتوا من بعدهم لمدة تزيد على 2000 عام. إحداها مسألة "تربيع دائرة Sequaring a circle"، التي تحتاج إلى إنشاء مربع تكون مساحته مساوية لمساحة دائرة. وأخرى. "مضاعفة حجم المكعب Duplication of the Cube" (مضاعفة الحجم). والتي تتطلب إنشاء مكعب بحجم يساوي ضعف حجم مكعب آخر. إن هذه المسائل تشابه إلى حد كبير، مسألة التقسيم الثلاثي، والتي برهن فقط في أوقاتنا الحالية بأنه لا يمكن أن تنشأ بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة بمفردهما(*).

إن إنشاءات أخرى قد تمتنع ويصعب نوالها بواسطة افضل الرياضيين لعدة قرون، بينما يمكن إنشاء أشكال محددة لمتعدد الأضلاع بتوظيف بسيط وسهل للأدوات الهندسية التقليدية، وأشكال أخرى مثل متعدد الأضلاع المنتظم ذو السبعة أضلاع، (heptagon, or 7-gon) أو ذو السبعة عشر ضلعا (17–gon)، والتي كانت في حينها صعبة النوال.

ففي عام 1796 برهن الشاب ذو الـ 19 عاما، "كارل فردريش كاوس" إمكانية إنشاء متعدد الأضلاع المنتظم بسبعة عشر ضلعا. بواسطة الفرجار والمسطرة العدلة فقط، بينما لا يمكن إنشاء أشكال أخرى محددة مثل متعدد الأضلاع المنتظم بسبعة أضلاع (7–gon). إن ما استطاع "كاوس" البرهنة عليه هو إن الشكل متعدد الأضلاع ـ المنتظم بعدد أضلاع فردية قابل للإنشاء إذا تحققت إحدى الشروط الآتية:

شرط **Condition I**: عدد الأضلاع يساوي $2^{2^n}+1$، حيث أن n هو العدد الكلي وأن $2^{2^n}+1$ هو عدد أولي. ويمكن الحصول على أمثلة متنوعة في الجدول الآتي.

n	$2^{2^n}+1$	هل يمكن إنشاء متعدد الأضلاع	عدد الأضلاع
0	3	نعم	3
1	5	نعم	5
2	17	نعم	17
3	257	نعم	257
4	65537	نعم	65537
5	ليس اوليا	كلا	—

الشرط **Condition 2**: ان عدد الأضلاع هو حاصل ضرب عددين أو أكثر من تلك التي نحصل عليها من شرط 1. (تستطيع أن تنشئ متعدد الأضلاع–منتظم، بخمسة عشر ضلعا. لأن 5×3=15، وأن 5، 3 هي أعداد اشتقت من القاعدة الموجودة في الشرط (1).

(*) للوقوف على برهان عدم إمكانية التقسيم الثلاثي للزاوية، انظر الوحدة الإترانية 97.

إن اكتشاف هذه النظرية الرائعة والاستثنائية أقنعت كاوس بالدخول إلى حقل الرياضيات كميدان عمل علمي استغرق طوال حياته بدلا من علم العلوم اللغوية التي كان متفوقا فيها أيضاً. أن نصبا تذكاريا أقيم له في مدينة برونزويك Brunswick، حيث مسقط رأسه، تألف من متعدد أضلاع بسبعة عشر ضلعا 17–gon، ليرمز إلى إنجازه الكبير.

حساب مثلثات العملية: أصل الجيب
Practical Trigonometry: The Original Sin

بالرغم من أن اقليدس قد عرض في "عناصره" بأن المثلثين المتطابقين بالنسبة لضلعين وزاوية متضمنة هما متطبقان (SAS)، بعبارة أخرى، وأن مقياس هذين المثلثين ثابت عندما يكون قياس 'S، A، و 'S'(*) قد أعطي بهذا الترتيب؛ لكنه لم يبد اهتماما خاصا بإيجاد قياسات الأجزاء الثلاثة المتبقية من المثلثين.

ويصح الأمر، بصورة مماثلة، مع ASA و SSS. إن الفيلسوف–الرياضي اليوناني في عصر اقليدس لم يأخذ بنظر الاعتبار الهندسة "العملية" أو "التطبيقية" ولم يعرها أي اهتمام. وقد نجم عن هذا المنظور، تباطؤ ملحوظ في نمو ذلك الفرع من الرياضيات والذي عرف بحساب بالمثلثات(**). وبصرف النظر عن الرأي الشائع تجاه أية دراسة جدية لهذا الموضوع، فإن حساب المثلثات قد نجحت بأن تولد بين اليونانيين. وأن مخترعها، هيباركوس Hipparchus (140 ق.م)، قد عانى من الحاجة إلى قياسات المثلث التي ارتبطت بعمله الدؤوب في ميدان علوم الفلك، وقد لجأ إلى تطوير تقانات لاحتساب مقياس أبعاد مثلث ثابت. ثم شارك مينيلاوس Menelaus (100م) بتعميق المعرفة العلمية في هذا الحقل عن طريق تطوير "حاب المثلثات الكروية Spherical Trigonometry"، والتي تعنى بقياس المثلثات على السطوح الكروية، والتي كان بأمسّ الحاجة إليها أثناء عمله في مضمار علوم الفلك.

وبقي الأمر بانتظار بطليموس Ptolemy (150م) العالم الرياضي والفلكي الشهير الذي عاش في مدينة الإسكندرية، لإنجاز المساهمة الأساسية – الأولى في ميدان حساب المثلثات (بالارتباط مع الفلك، أيضاً) في كتابه "المجسطي" Almagest.

(*) يؤشر الحرف 'S إلى الضلع Side، اما الحرف A فيؤشر إلى الزاوية Angle– فانتبه.

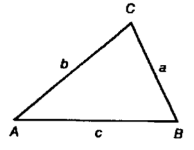
(**) اشتقت كلمة حساب مثلثات Trigonometry من الكلمتين اليونانيتين trigonon والتي تعني "مثلث"، وكلمة metria والتي تعني "قياس Measurement".

في هذا العمل، والذي يعني عنوانه "الأعظم The Greatest" حيث ظهرت الجداول المثلثية الواسعة والشاملة.

بقيت علوم المثلثات خادما امينا لعلوم الفلك، وحتى عام 1464م، عندما كتب الرياضي الألماني يوهان مولر " Johann Muller" (والذي يعرف أيضاً باسم ريجيومونتانون) كتابا يعالج المثلثات كموضوع رياضي صرف، نشأ عن نمو وتطور بإحدى جوانب علم الهندسة، فارسى العلم الجديد حدوده وبرهن على أهليته وصلاحيته.

اضحى حساب المثلثات، في هذه الأيام، أداة مهمة في الرياضيات نتيجة للطبيعة التي تمتاز بها الدوال المثلثية كونها مناسبة للاستخدام في تحليل الظاهرة الفيزيائية التي تحدث بصورة دورية، كالكهربائية، والموسيقى، والضوء.

إنا نقول بأنه "قد تم حل مثلث A Triangle is Solved" عند احتساب قياس أبعاده الستة (ثلاثة زوايا وثلاثة أضلاع). وأن الأدوات الأربعة – الرئيسة والتي تستخدم لحل المثلثات هي:



1 نظرية فيثاغورث.

2 مجموع قياس زوايا المثلث يساوي 180°.

3. قانون الجيوب: في أي مثلث ABC.

4. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

5. قانون جيوب التمام:

في أي مثلث ABC،

$c^2=a^2+b^2-2ac\cos C$

أو $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

أو $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

ان الجداول المثلثية، التي نستخدمها في هذه الأيام، في حل مسائل المثلثات تشابه الجدول السابق الذي اخترعه بطليموس.

ولقد عرضنا الآن فكرة عامة عن كيفية تطوير بطليموس للجدول المثلثي، باستثناء استخدامنا لرموز واصطلاحات حديثة ومعاصرة (استخدم بطليموس قياسا ستينيا Sexigesimal، وهو نظام يبتنى على العدد 60). سنبدأ، أولا، بإعطاء بعض الأسس والمبادئ.

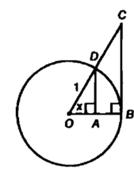
أ- يمثل تمثيل ووصف الدوال المثلثية لقطعة مستقيمة.

في وحدة الدائرة، O، لدينا

$$\sin x=\frac{AD}{OD};\cos x=\frac{OA}{OD};\tan x=\frac{BC}{OB}$$

بما أن OB=OD=1، إذن،

AD = sin x,
OA = cos x,
BC = tan x,



ب- اشتقاق الكلمة "جيب": إن قطعة المستقيم $\overline{AD}$ في الشكل التخطيطي هي نصف الوتر الذي يعرف بـ ajiva باللغة السنسكريتية. إن هذه الكلمة قد عثر عليها، للمرة الأولى، في الكتابات الهندية عام 510. وقد اخطأ المترجمون بكتابة هذه الكلمة كـ jaiv في اللغة العربية جيب أو حفرة. وقد ترجمت الكلمة العربية، في آخر الأمر، إلى الكلمة اللاتينية المكافئة لكلمة " حفرة = Sinus". وعليه فإن نصف الوتر، jiva، قد أصبحت كلمة جيب Sine، والتي يرمز إليها بالصيغة المختصرة Sin.

ج- استخدمت صياغات محددة في تطوير الجداول المثلثية التي ظهرت في كتاب المجسطي Almagest. إن كثيرا من هذه الصياغات تتبع ما يأتي:

1. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
2. $\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
3. $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$
4. $\sin 2x=2\sin x\cos x$
5. $\sin \frac{1}{2}x=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
6. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

إن الصيغة السادسة، والخاصة بـ tanx، قد استخدمها الرياضي العربي الحسيب في عام 860 لإعداد الجدول الأول لقيم الظل Tangents. (إن اشتقاقات هذه الصياغات نجدها

في أي كتاب مثلثات معياري).

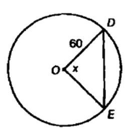
د- احتسب بطليموس جدولا لأطوال الأوتار لأقواس من 0° إلى 180°. وبخطوة قدرها $\frac{1}{2}^\circ$، وفي دائرة يساوي نصف قطرها 60 وحدة. وعليه، فقد أعطى جدوله قياس الوتر $\overline{ED}$. والذي يقطع قوسا لـ x°، بقيمة تتراوح $0^\circ \langle x^\circ \langle 180$.

وقد ترجم قسم من الجدول، إلى نظرية يمكن تتبعها بسهولة.

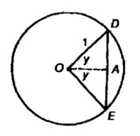
إن أطوال الأوتار قد أعدت بالنظام الستيني، على سبيل المثال. فإن الرقم 2, 5, 40 بالنظام الستيني تصبح:

في العشري $2+\frac{5}{60}+\frac{40}{60^2}=0.0350$

أقواس Arcs	أوتار Chords
½°	0, 31, 25
1°	1, 21, 50
1 ½°	1, 34, 15
2°	2, 5, 50
2 ½°	2, 37, 4
3°	3, 8, 28
3 ½°	3, 39, 52



إن الجداول المثلثية المعاصرة، تعطي طول نصف الوتر $\overline{AD}$ (siny=) للزاوية المناظرة 2y في دائرة بنصف قطر قدره وحدة واحدة.



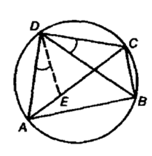
وعليه. إذا تأملت قيمة جيب 45° في الجداول المثلثية الموجودة لديك، ستجد بأنها تكافئ 0.7071، بينما تظهر القيمة المناظرة في جداول بطليموس، بعد إجراء تحويلات مناسبة، والتي تخبرك بأن قوسا بـ90° تقطع وترا بطول 1.4142 وبهذه الطريقة يستطيع المرء التحويل من جداول بطليموس للأوتار إلى دوال الجيب المعاصرة.

إن جيوب التمام والظل يمكن أن تحتسب، فيما بعد من الصياغات الآتية:

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1 \quad , \quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

يظهر فيما يأتي الخطوط العامة لبرهان يعرف بنظرية بطليموس Ptolemy's theorem، والتي اشتق من خلالها بطليموس مجموعة من الصياغات التي احتاج إليها في إنشاء جداول مثل sin (x-y)، sin (x+y)

نظرية THROREM إذا كان الشكل ABCD رباعي الأضلاع ومرسوما في داخل دائرة، فإن مجموع حاصل ضرب الأضلاع المتقابلة يساوي حاصل ضرب قطريه.



المعطى: الشكل الرباعي ABCD مرسوما في داخل دائرة، وبقطريه $\overline{AC}$، $\overline{BD}$.

برهن: AB x CD + BCxAD = DBxAC

1. أنشئ $\angle BDC \cong \angle ADE$.
2. $\angle CDE \cong \angle ADB$.
3. $\angle ACD \cong \angle ABD$.
4. $\therefore \Delta CED \sim \Delta ADB$.
5. $\therefore \frac{CE}{AB}=\frac{CD}{DB}$ أو DB x CE = AB x CD.
6. بين أن $\Delta CDB \sim \Delta ADE$.
7. $\therefore \frac{AE}{BC}=\frac{AD}{DB}$ أو ADxBC = DB × AE.
8. من الخطوتين 5 و 7:

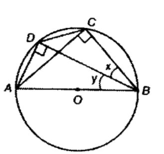
$$AB\times CD+BC\times AD = CE\times DB+DB\times AE$$
$$= DB(CE+AE)$$
$$= DB\times AC$$ (و.م.أ)

تمرين Exercise:

استخدم نظرية بطليموس لاشتقاق الصيغة:

$\sin (x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

إن الخطوط العامة للبرهان كما يأتي:



في دائرة بوحدة قطر AB،

1. $AB \times CD + BC \times AD = DB \times AC$
2. في المثلث قائم الزاوية BDA

$AD = \sin y \qquad DB = \cos y$

3. في المثلث قائم الزاوية $BDA\Delta$

$BC = \cos x \qquad AC = \sin x$

4. في المثلث DCB،

$$\frac{CD}{\sin(x-y)} = \frac{BC}{\sin \angle CDB}$$

5. ولكن، بما أن $\angle CAB = \angle CDB$، إذن

$$\sin \angle CDB = \sin \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{1} = BC$$

6. من الخطوتين 4 و 5

$$\frac{CD}{\sin(x-y)} = \frac{BC}{BC} = 1 \quad \text{أو} \quad CD = \sin(x-y)$$

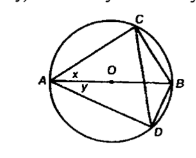
7. والآن، تأكد بتعويض نتائج الخطوات 2-6 في الخطوة 1 من أن:

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$

(و.م.أ)

تمرين **Exercise**: استخدم رسما تخطيطيا ونظرية بطليموس في اشتقاق الصيغة:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$



إن معظم المواد المطلوبة لحل المثلث قد تم تطويرها قبل عام 1600. وقد جاءت التعديلات الإضافية كنتيجة للعمل مع اللوغاريتمات وحساب التفاضل والتكامل Calculus.

أظهرت نظرية دي مويفر De Moivre's Theorem وجود علاقة بين الدوال المثلثية والقيمة الخيالية i في الصيغة:

$(\cos A + i \sin A)^n = \cos nA + i \sin nA.$

عند نهاية القرن السابع عشر أصبحت السلسلة اللامتناهية Infinite Series لدالة الجيب sin x معروفة:

$$\text{Sin}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$\text{Cos}\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

تستفيد الآلات الحاسبة العلمية، في هذه الأيام، من نقطة تقارب هذه السلاسل في احتساب قيم الجيب، والجيب تمام لأي زاوية من الزوايا شريطة أن يكون قياسها دائريا. ويحدد عدد المراتب العشرية التي تظهر على لوحة العرض بسعة الآلة الحاسبة.

لذا، بالرغم من أن علم حساب المثلثات كان في بداياته أداة لحل المثلثات في دائرة الهندسة فقد أصبحت في وقتنا الراهن كعلاقة دورية Periodic للأعداد المركبة Complex Numbers – وهي تختلف تماما عن بداياتها التطبيقية.

الجبر: الاختزال الرياضي
Algebra: Mathematical Shorthand

قد نشأت مادة الجبر التي تدرس، بصورة تقليدية، لطلبة مدارسنا الثانوية، كنتيجة لتطورات مستقلة عكف عليها رياضيون من: اليونان القديمة، والعالمين الهندي والعربي.

كانت معالجات الجبر لدى اليونانيين تنحو منحى هندسيا، وقد كرس جزء كبير من "عناصر" اقليدس، بالحقيقة، لإيجاد الحلول بمنهج هندسي، لما ندعوه معادلات جبرية في أيامنا الحالية. وسنعرض وصفا تفصيليا لهذا الموضوع في موضع لاحق من هذا القسم. وعليه، فإن ما نكتبه بالأسلوب الآتي:

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

كان يفكر بها اليونانيون بدلالة الرسم التخطيطي الآتي:

a + b

ab	b^2
a^2	ab

a + b

إن كثيرا من المعرفة الجبرية التي كانت لدى اليونان قد لم شملها الرياضي البارز دايوفانتوس (275)م Diophantus والذي لا زال عمله، على حلول التكامل لأنواع محددة من

المعادلات، يدرس إلى يومنا هذا. إن أول امرأة رياضية وردتنا أخبارها من الأزمنة القديمة هي هايباتايا (1410)م Hybataia والتي قد قامت بتدوين شروح وتعليقات على الأعمال الرياضية لدايوفانتوس.

في الجزء الآخر من العالم، اهتم علماء الرياضيات الهنود بطرائق حل المعادلات، وبالخصوص المعادلات التربيعية. وتكمن أهم مشاركاتهم في معالجة الموضوع باستمتاعهم في معالجة المسائل بطريقة غنية بالألوان. وسنعرض مثالا (وهناك المزيد من هذه الأمثلة في كتب تاريخ الجبر، والتي قد أدرجت في المصادر الموجودة بنهاية هذا القسم).

من مجموعة فواكه المانجو، اخذ الملك $\frac{1}{6}$، وأخذت الملكة $\frac{1}{5}$ من المتبقي، واخذ الأمراء الكبار – الثلاثة $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{7}$ من نفس المتبقي، واخذ الطفل الصغير فواكه المانجو الثلاثة المتبقية. أوه، يا من كنت بارعا في الكسور، اذكر عدد ثمار المانجو الموجودة في تلك المجموعة.

هيمن العلماء العرب – المسلمون على مسرح العلوم لجبرية في العصور القديمة ولعدة قرون. إن اكبر علماء المسلمين في الجبر ومن جهابذته هو محمد بن موسى الخوارزمي (825م) والذي يعد كتابة "الجبر والمقابلة" إماما ومرجعا في هذا الميدان، ومصدرا لاشتقاق اصطلاح "الجبر". إن أهم الإسهامات العلمية لهذا العالم الجليل هو اختراعه للخوارزميات Algorithms بوصفها أداة رياضية فاعلة. وقد اشتقت كلمة الخورزميات من اسم العلامة الخوارزمي لكي تؤسس مكانته في تاريخ الرياضيات والجبر عبر الأجيال والقرون.

أصبح الإنتاج العلمي للخوارزمي وابداعاته في ميدان الجبر معروفا وشائعا في أوربا خلال القرن الثاني عشر، وبدأت خلال القرن السادس عشر الرموز التي نستخدمها في الجبر، هذه الأيام. تظهر ببطيء ويصار إلى تطويرها وصقلها. وندرج، في هذا المقام، مثلين على كيفية كتابة المعادلات في السنين المذكورة، وستلاحظ كم كان الأمر شاقا في كتابة هذه المعادلات والتعامل مها (تم إلحاق الصيغ المعاصرة بين الأقواس).

1545: cubus P6 rebus aequalis 20 ($x^3 + 6x = 20$)
1613: xxx + 3bbx = zccc ($x^3 + 3b^2x = 2c3$)

إن علامة "=" قد استخدمت للمرة الأولى بواسطة روبرت ريكورد Robert Recorde (15557) في كتابه " The Whetstone of Witte". وفي عام 1637 اخترع رينيه ديكارت Rene Descartes رمز الأس الذي نستخدمه في جل العمليات الرياضية بوقتنا الراهن.

لعبت المعادلات التربيعية وحلولها دورا بارزا في تاريخ الجبر، فقد نجح البابليون، قبل غيرهم، في حل بعض أشكال المعادلات التربيعية قبل ما يزيد على 3600 عام، كما ظهر في الرقوم الطينية الموجودة الآن ضمن مجموعة YBC6967 في جامعة ييل Yale University. أن ترجمة المسألة الموجودة على هذه الرقوم تكافئ "جد مقاسات المستطيل الذي يزيد طوله على عرضه بمقدار 7 إذ كانت مساحته تساوي 60".

لم يستخدم الحل البابلي رموزا جبرية ولكنه قدم انموذجا أوليا Prototype لمسالة مشابهة. وعليه، فإن حل المعادلة التربيعية – البابلية:

$$x^2 + px = q \quad , \quad q > 0$$

قد عرض في الرقم الطيني كما يأتي:

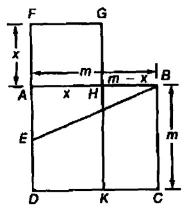
$$x = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$$

لذا، إذا كانت y= الطول، x= العرض فإن المعادلتين، $y = x + 7$، $xy = 60$ وبعد استخدام تعويضات مناسبة، ستصبح وفق النوع البابلي $x^2 + 7x = 60$. وعليه، سيكون حل المسألة المعروضة:

$$x = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 9} - \frac{7}{2} = 5$$

حاول أن تقارن هذا الحل مع صيغة حل المعادلة التربيعية التي نكثر من استخدامها في هذه الأيام.

هناك معادلة تربيعية، أخرى، قد ذاع صيتها، وعمد اقليدس إلى حلها هندسيا في الموقع 11 من الكتاب الثاني من "العناصر".



قضية Proposition لتقسيم خط مستقيم إلى قطعتين بحيث إن المستطيل النشأ على الخط المستقيم واحدى قطعه يساوي مربع القطعة المتبقية { بمعنى آخر، أن تقوم بتقسيم المستقيم ($AB = m$) إلى مستقيمين x و ($x - m$) بحيث يكون $m(m-z) = x^2$}

الحل Solution

1. أنشئ المربع ABCD على قطعة المستقيم $\overline{AB}$.
2. قم بتنصيف قطعة المستقيم $\overline{AD}$ عند E وارسم $\overline{EB}$.
3. مد $\overline{AD}$ خلال A إلى النقطة F بحيث $\overline{EF} \cong \overline{EB}$.
4. أنشئ المربع AFGH على قطعة المستقيم $\overline{AF}$.
5. مد المستقيم $\overline{GH}$ بحيث يقطع المستقيم $\overline{DC}$ في نقطة K.
6. إذن المستطيل HBCK يساوي في مساحته المربع AHGF.

البرهان PROOF

1. $\overline{AF} \cong \overline{ED}$ (لأن E هي نقطة منتصف).
2. مساحة المستطيل FGKD=(EF+ED)(EF-ED)
3. مساحة المستطيل $FGKD=EF^2-ED^2$
4. مساحة المستطيل $FGKD=EF^2-AE^2$
5. $\therefore\ FGKD+AE^2=EF^2$
6. $AB^2 + AE^2 = EB^2 = EF^2$ (لأن EB = EF وأن المثلث AEB هو مثلث قائم الزاوية).
7. $\therefore\ AB^2 + AE^2 = FGKD + AE^2$ أو $AB^2 = FGKD$.
8. $\therefore\ FGKD = AH^2$ (يطرح FGKD من طرفي المعادلة (و.م.أ).

إن ما فعله اقليدس في هذا الموضوع، تمت ترجمته إلى رموز جبرية، لبيان كيفية تقسيم قطعة المستقيم AB إلى قطعتين x و (m-x) بحيث $m(m-x)=x^2$ وأن القطعة AH، أو x، هي العدد المطلوب. ونحن الآن عبر استخدامنا الصيغة التربيعية التي تنص بأن:

$$x = \frac{m(\sqrt{5}-1)}{2}$$

إن الذين ينقبون خارج الدائرة رياضيات المدارس الثانوية يعلمون بأن الجبر قد اصبح أداة فاعلة في حل المسائل عبر نظرية الزمرة والجبر الخطي.

ملاحظات تاريخية Historical Notes

إن الزينة التي تنتج عن إدراج الملاحظات والتعليقات التاريخية في درس الرياضيات قد تعد إثراء في مفرداته. وعادة ما يفضل الطلبة الموضوع ويميلون إليه إذا توفرت أمامهم فرصة لإقامة العلاقة مع الأصول والموارد التي نشأ عنها. ان أي كتاب يعالج موضوع تاريخ الرياضيات قد يزودك بأفكار مفيدة تساعد على إثراء تدريسك عبر إدراج حكايات ونوادر مختصرة أنتجت بعناية من تاريخ الرياضيات. إن المراجع الآتية تعد ذات فائدة وقيمة كبيرة لمثل هذه الاستخدامات.

Beckmann, Petr. A History of π. New York: St. Martin's Press, 1971.

Bell, E. T. Mathematics, Queen and Servant of Science. Washington. DC: Mathematical Association of Amerra. 1979.

Bell, E. T. Men of Mathematics. New York: Simon & Schuster, 1937.

Boyer, Carl B. A History of Mathematics. New York: John Wiley, 1968.

Burton, David M. The History of Mathematics, An Introduction. Boston: Allyn and Bacon, 1985.

Campbell, Douglas M., and John C. Higgins, Eds. Mathematics: People, Problems, Results. Belmont, CA: Wadsworth, 1984.

Dunham, William. Journey Through Genius. New York: Wiley, 1990.

Eves, Howard W. An Introduction to the History of Mathematics. New York: Saunders College Publishing, 1983.

______. The Other Side of the Equation. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1971.

______. In Mathematical Circles, Vols. 1 and 2. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1969.

______. Mathematical Circles Revisited. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1971.

Gamon, George. One, Two, Three ... Infinity: New York: Viking Press, 1947.

Gray, Shirley B., and C. Edward Sandifer. "The Sumario Compendioso: The New World's First Mathematics Book." Mathematics Teacher 94 (2001): 98-103.

Kaplan, Robert. The Nothing That Is: A Natural History of Zero. New York: Oxford University Press, 1999.

Kasner, E., and J. Newman. Mathematics and the Imagination. New York: Simon and Schuster, 1940.

Kelley, Loretta. "A Mathematical History Tour." Mathematics Teacher 93 (2000): 14-17.

Lee-Chua, Queena N. "Mathematics in Tribal Philippines and Other Societies in the South Pacific." Mathematics Teacher 94 (2001): 50-55.

Mathematics Teacher 98 (November 2000) the entire issue.

Moritz, R. E. On Mathematics: A Collection of Witty, Profound, Amusing Passages about Mathematics and Mathematicians. New York: Dover, 1958.

National Council of Teachers of Mathematics.

Historical Topics for the Mathematics Classroom. 31st Yearbook. Reston, VA: NCTM, 1969.

Norwood, Rick, "A Star to Guide Us." Mathematics Teacher 92 (1999): 100-101.

Posamentier, Alfred S., and Noam Gordon. "An Astounding Revelation on the History of π." Mathematics Teacher 77 (1984): 52.

Resnikoff, H. L., and R. O. Wells, Jr. Mathematics in Civilization, New York: Dover, 1984.

Schaaf, William L., Ed. Our Mathematical Heritage. New York: Macmillan, 1963.

Stillwell, John. Mathematics and Its History. New York: Springer-Verlag, 1989.

Turnbull, H. W. The Great Mathematicians. New York: New York University Press, 1961.

Veljan, Darko. "The 2500-Year-Old Pythagorean Theorem." Mathematics Magazine 73 (2000): 259-272.

Willerding, Margaret. Mathematical Concepts. A Historical Approach. Boston: Prindle, Weber, and Schmidt, 1967.

إن بعضاً من هذه الكتب سوف يقدم يد العون لاستخلاص النوادر والحكايات بصورة سريعة لاستخدامات الصف، وسيتطلب البعض الآخر قراءة أكثر دقة. إن هذه الكتب سوف تزودك بموارد إثرائية وافرة من خلال توظيف الحكايات والنوادر التاريخية.

تقانات الإثراء لجميع المستويات

Enrichment Techniques For All Levels

إن لب المنهج الدراسي "للمعايير" يقترح بأن يعرض جميع الطلبة إلى نفس الموضوعات الرياضية، رغم تمايزها بمستويات التجريد الخاصة بالمهام والمبادئ. وتتوفر فرص كافية لإثراء التدريس في جميع المستويات وبالخصوص، عندما تكاملها مع تطبيقات الحياة اليومية.

سيحدد المعلم مقدار التحرك من دائرة الواقع الملموس إلى التجريد لكل طالب، وهل سيتوجه صوب مجاميع الطلبة الصغيرة أو الواسعة، وطبيعة عمل المشاريع، أو المحاضرات. وتبقى المرونة المفتاح الأساسي للإثراء المنتج والفعال.

عندما تدخر الأنشطة الإثرائية للمجاميع الصغيرة، تستطيع كل مجموعة محددة أن تتحرك وتعمل في ضوء طريقتها الخاصة. وسيعمد الطلبة إلى التنقيب في الأفكار والآراء مع زملائهم بالصف الذين يمتلكون اهتماما وميلا نحو نفس الأفكار. وستتوفر لهم فرصة كافية ليدققوا ويمعنوا النظر في تلك الأفكار أو ما وراء نمو هذه الآراء وتطورها، خلال فترة الدرس النظامية. وعليه، فانهم سيمارسون المزيد من الاستكشافات والتنقيبات، ويقيمون علاقات خارجة عن دائرة الرياضيات وعلومها.

تطبيقات ذات صلة Relevant Application

إن غالب التطبيقات العملية، التي تتم دراستها بكونها ذات صلة بالرياضيات ، توفر موردا مفيدا ومثاليا للإثراء، وكما توضحه الأمثلة الآتية.

موضوع جمع الكسور وضربها

إثراء: حساب احتمالات بسيطة بعد تطوير بعض العاب الاحتمالات التي تعد في الصف(مثال، اختيارات بطاقات من مجموعة أوراق اللعب، أو قذف قطعة نقود أو حجر النرد). إن القدرة الإبداعية والخلاقة لدى المعلم تحتل أهمية بارزة في إنجاح هذا الأمر.

موضوع النسبة المئوية Percentage

إثراء: تتضمن حساب وتخمين الإعلانات في الصحيفة اليومية نسباً مئوية (مثال، المبيعات، وإعلانات، المصارف). إن استخدام هذه التحريات، بصورة جيدة، سيكون عاملا للتحفيز وذو صلة مباشرة بالموضوع. وقد أظهر نتائج باهرة بين الحين والآخر.

موضوع استخدام الصياغات Using Formulas

إثراء: دع الطلبة يباشرون عمليات احتساب: مساحة أرضية مبنى، أو الفائدة التي يمنحها احد المصارف، أو حجم جسم غير منتظم من البيئة التي تحيط بهم. ويفضل أن تجرى الحسابات على ارض الواقع، كلما كان ذلك الأمر ممكنا، لكي تكون المعاني التي تكمن وراء هذا النشاط أكثر قربا من أذهان الطلبة.

موضوع قراءة جداول Reading Tables

إثراء: يزوّد الطلبة بمسائل حقيقية وباستخدام مخططات المسافة الميلية Mileage Charts، معدل قوائم أسعار الحوالة البريدية، ومعدل قوائم أسعار خدمة الهاتف، وقوائم الحافلات، وقوائم ضريبة الدخل، الخ. ويفضل أن تتعلق هذه الأمور بحالات ميدانية، كلما كان الأمر ممكنا.

موضوع المفاهيم الأساسية للهندسة

إثراء: قياسات مباشرة وغير مباشرة لهياكل وبنى محلية. ينبغي

أن يكلف الطالب بحساب مساحات، وحجوم، ...الخ، من البيانات التي تم جمعها ميدانيا.

الرياضيات الاستجمامية
Recreational Mathematics

تعد الرياضيات الاستجمامية إحدى أشكال الإثراء في مادة الرياضيات، لأن كل شيء ذو صلة بالاستجمام غالبا ما يشد اهتمام الطلبة. لذا، فإن الموضوعات الرياضية التي تم تدريسها يمكن أن تدعم بصورة متحمسة على هيئة استجمام يقبل الطلبة على ممارسته.

موضوع تبسيط الكسور

إثراء: اعرض بضعة قواعد التقسيم لتسهيل إدراك العوامل المشتركة (انظر الوحدة الإثرائية 84).

موضوع التمرن على الإضافة

إثراء: يمكن استخدام أشكال متنوعة من المربع السحري Magic sequare (انظر الوحدة الإثرائية 2,1) لتعزيز حقائق الإضافة من خلال مسائل غير تقليدية.

موضوع تدريب حسابي – عقلي متنوع

إثراء: إن ألعاباً وألغازاً محيرة ومتنوعة، والتي تتطلب من الطلبة إجراء حسابات كجزء من النشاط، تساهم في إثراء موضوع يثير الضجر. وتتألف هذه الأشياء من العاب تثير روح التنافس، وألغاز على شكل أنشطة فردية. وهنا تظهر قيمة الإثراء بوصفه أداة لضمان النجاح الأمثل للصف مع العمل المنظم. نظرا لأن الطالب المحفز سيؤدي عملا افضل من الطالب الذي قد أدار ظهره للرياضيات ولم يعد يأبه لها.

موضوع أنشطة آلة حاسبة متنوعة

إثراء: ينبغي أن يتم اختيار العاب وألغاز مناسبة يتم التعامل معها بواسطة آلة حاسبة (انظر الوحدة الإثرائية 11) شريطة أن يكون الاختيار دقيقا.

من السهولة السقوط في فخ ترك جوانب الاستجمام للدرس (بمختلف أشكالها) تهيمن على جلسة الصف. وعندما نتعود ونألف هذا النوع من المبالغة في توظيف الاستجمام داخل النشاط الصفي، سوف ينقلب هذا الأمر إلى عكس ما أريد منه، بحيث أن أية محاولة للعودة إلى المنهج الدراسي المقصود سوف ينظر إليها الطالب بشيء من الاستياء والغضب. لذا ينبغي أن نتذكر دائما بأن جوانب الاستجمام في الدرس قد صممت للإثراء فحسب، وليس لاستبدال المنهج الدراسي المنتظم.

رحلات ميدانية Field Trips

إنه من غير المألوف التفكير في الرحلات الميدانية كوسيلة لإثراء برنامج تعليم الرياضيات. ومع ذلك فإن مثل هذه الأنشطة لا تقتصر فقط على صف الدراسات الاجتماعية. فهناك مواقع قد تدعم تعلم الرياضيات وتزيده ثراء. على سبيل المثال، إذا كانت الاحتمالات هي الموضوع قيد الدراسة داخل الصف، فإن رحلة إلى موقع قريب لحلبة سباق، حيث يفترض أن ترتكز عملية المراهنة إلى أرجحية فوز حصان ما، قد تكون مناسبة ومثيرة للاهتمام. وهناك عدة صفوف تقوم بزيارة الأماكن الخلفية والكواليس لرؤية كيفية حساب الرهانات عن كثب.

إن المواقع التي يعتاد زيارتها ستكون للوقوف على استخدام الرياضيات في الصناعة، وأعمال التأمين، والهندسة، والعمارة، والأعمال، وبرمجة الحاسوب، ... الخ وينبغي في كل حالة من هذه الحالات، وقبل بدء الرحلة الميدانية، تهيئة جلسة مناسبة للصف، وقد تكون هذه الجلسة، في كثير من الأحيان، بنفس أهمية الرحلة التي سيقبل عليها الطلبة، يستطيع المعلم أن يقدح اهتمامات الطلبة باستخدام وسائل سمعية – بصرية، تشمل مواقع الانترنيت للمكان الذي خطط لزيارته في الرحلة.

قد يريد المعلم أن يطبق مبادئ الرياضيات التي تمت دراستها بصورة مبكرة في الصف، عبر إجراء تجارب خارجه. على سبيل المثال، قياس مساحة موقع الرياضة، أو تحديد ارتفاع عمود الراية على بناية قريبة، أو حساب ارتفاع احد أبراج البنايات، كلها ستكون تطبيقات مناسبة بميدان حساب المثلثات الأولية. إن مثل هذه الرحلات الميدانية سوف تعكس بوضوح فائدة الرياضيات التي يتم تعلمها داخل الصف وأهميتها البالغة في دائرة الحياة اليومية.

إن عملية التخطيط المسبق للرحلة مع الصف هي العامل الأكثر أهمية، لأنه عندما يساهم الطلبة في عملية التخطيط للرحلة سوف تتوفر لديهم معرفة كافية ودقيقة بماهية الأهداف المتوخاة من الرحلة وما تصبو إلى تحقيقه في درس الرياضيات، كذلك فإنهم سيعمدون إلى التركيز على وقتهم، أثناء الرحلة، بصورة جيدة.

وبنفس أهمية التخطيط المسبق للرحلة، ستكون أهمية الجلسة التي ستلي الرحلة، والتي سيتم خلالها التعرض لكل ما تم تعلمه خلالها. إن التنفيذ والإنجاز السليم للمخطط، وحسن إدارة أنشطته الميدانية سيجعل من الرحلة الميدانية أداة لإثراء وتقريب

الرياضيات التي تدرس في الصف إلى دائرة الواقع الملموس.

شبكة الإنترنيت The Internet

تتوفر تطبيقات لا حصر لها على شبكة الانترنيت توفر مناخا مناسبا لإثراء البرنامج التدريسي. إن محاولة إعداد قوائم بمواقع الويب المتاحة على الشبكة سوف يعاني من التقادم بسرعة كبيرة، بسبب ظهور أعداد كبيرة من المواقع على شبكة الانترنيت، كل يوم، كما ان بعض المواقع القديمة قد تختفي من ساحة الشبكة العملاقة. تعد المنظمات المحلية للمعلمين، والـ NCTM موارداً مفيدة وجيدة. **لأهم المواقع في الوقت الحالي.**

إن مواقع الانترنيت ذات الصلة بالموضوع سوف:

- توفر ملاحظات تاريخية
- الاشتراك بأفكار التعليم.
- عرض دروس نموذجية (معززة بالوسائط المتعددة).
- إدراج أفكار للأنشطة الإثرائية.
- تزويد مسائل تحدي.
- اقتراح ارتباطات مع صفوف أخرى في مواطن أخرى من البلاد أو في بلدان أخرى حيث تتم المشاركة معهم بالآراء والأفكار.
- تزويد أفلام فيديوية لتطبيقات في الرياضيات.
- إرشاد وتوجيه الطلبة الموهوبين من خلال أنشطة بحوث رياضية.
- عرض ارتباطات بين مواقع مختلفة و/أو موضوعات في الرياضيات.
- أراء وأفكار أخرى لا يحصرها خيال!.

الطالب الموهوب The Gifted Student

يعد الطلبة ذوي مواهب متقدمة بالرياضيات عندما: يظهرون حذقا وإبداعاً، وحب استطلاع فكري، وموهبة إبداعية، وقدرة على الاستيعاب والتعميم، ومستوى عال من الإنجاز الرياضي. غالبا ما يشارك الطلبة الموهوبين في الرياضيات في أنشطة خارج نطاق المنهج الدراسي للرياضيات فتظهر لديهم رغبة عميقة في مطالعة كتب الرياضيات، والمجلات الدورية، وكتيبات متنوعة وكراسات. ان هذه الأنشطة المستقلة قد تؤدي إلى إذكاء مزيد من التنافس وروح التحدي بينهم في مواصلة ومتابعة دراسة مواضيع في الرياضيات قد تكون خارج نطاق المنهج المألوف، أو جزءا متقدما من المنهج الدراسي (والتي قد تدرس في أيام قادمة من المنهج الصيفي).

لاشك بأن أكثر الخبرات المكافئة لمعلم الطلبة الموهوبين ستكون عندما يلاحظ طالبا ينجز اكتشافا أو يطور أسلوبا غير مألوف في تناول موضوع أو مسألة ما. إن هذه البصيرة الفريدة التي يبديها الموهوب ينبغي أن يحتضنها المعلم ويعمد إلى تنميتها من خلال أنشطة إثرائية ينتقيها بعناية ودقة.

يمكن تصنيف الأنشطة الإثرائية المخصصة للطلبة الموهوبين إلى ثلاثة أصناف: التسريع، والتوسع، والاستطراد.

التسريع Acceleration

يتضمن التسريع، غالبا، نقل الطلبة الموهوبين عبر المنهج بسرعة اكبر من تلك التي تعتمد مع بقية الطلبة. وهذا يعني مباشرة دراسة الجبر الأولي في مرحلة مبكرة ثم تمكين الطالب من الوصول إلى حساب التفاضل والتكامل (وفي بعض الأحيان إلى موضوعات متقدمة) رغم وجودهم في المدارس الثانوية. وقد تعني أيضاً استكمال المساقات الدراسية – السنوية خلال فترة تقل عن ذلك بكثير، لتوفير مساحة لدراسة موضوعات متقدمة في وقت مبكر.

لاشك بأن الفوائد المتوخاة من هذا الإجراء تكمن في إتاحة الفرصة أمام الطلبة الموهوبين في معاناة روح التحدي والمنافسة، بصورة مناسبة، ومن ثم الحد من ظاهرة غياب الاهتمام الناجم عن محدودية المنهج الدراسي المخصص للطلبة ذوي القابليات الاعتيادية.

في المقابل هناك مخاطر محتملة ينبغي مراقبتها عند تسريع الطلبة الموهوبين فإذا كان التسريع سريعا جدا، فقد يكلف الطالب بالعمل مع مواضيع بالغة التجريد، بسرعة كبيرة، وخلال حقبة زمنية قصيرة، الأمر الذي قد ينشب عنه، عدم جاهزية الطالب للإنجاز. إن هذه الظاهرة قد تكون ذات نتائج عكسية وتطول فترة تأثيرها السلبية على الطالب/ الطالبة. وينبغي أن لا تقتصر متابعة المعلم على مراقبة استعداد الطالب، ولكن يجب أن تكون موجهة صوب التحفيز الذي يحتاجه أي طالب، بغض النظر عن قدراته.

إن الطالب الذي قد تم اعتباره موهوبا، ينبغي أن لا يدفع بقوة خلال مسار تم تحديده بصورة مسبقة. وإذا لم يتم تحقيق توازن متناسب بين الميول والقدرات، فسيظهر احتمال قوي بأن هذا الطالب الموهوب سيشيح بوجهه عن الرياضيات ويغادرها إلى غير رجعة. وبصرف النظر عن طبيعة التسريع ودرجته فإن المراقبة الحذرة للطالب (أكاديميا واجتماعيا) تتبوأ أهمية كبيرة. وينبغي أن يكون المعلم متيقظا إلى علامات وإيماءات قد تشير إلى إن الطالب قد غالى بالتوسع الرياضي، أو غالى في بذل

الجهود والعمل، أو قد أقصى نفسه اجتماعيا. ودون الاهتمام والرعاية التي ينصح باستعمالها، والتي ستكون عملية التسريع من خلالها ذات فائدة ملموسة، وبدون هذا الاهتمام والرعاية المناسبة قد تتحول هذه العملية إلى أذى يصعب علاج آثاره الوخيمة.

التوسع Expansion

يشير التوسع إلى شكل من الإثراء يتيح للطالب أن ينقب بعمق في مادة الموضوع ومفرداته التي يدرسها في الصف. ان مثل هذا التوسع في المنهج الدراسي القياسي قد يحصل، بصورة اولية، كجزء من تعليم الرياضيات داخل الصف، ولكنه قد يكون جزءا من البرنامج غير المنهجي.

دعنا نلقي نظرة فاحصة على بعض أمثلة.

موضوع نظرية فيثاغورس (مساق دراسي في هندسة المدارس الثانوية)

إثراء: سيتيح التوسع للطالب دراسة أي أو جميع ما يأتي:

1. تحري واستكشاف مجموعة متنوعة من براهين نظرية فيثاغورث.
2. تحري واستكشاف توسيع نظرية فيثاغورث بحيث تشمل المثلث حاد الزاوية، والمثلث منفرج الزاوية (يعني، بالنسبة للمثلث حاد الزاوية $a^2 + b^2 > c^2$، وبالنسبة للمثلث منفرج الزاوية $a^2 + b^2 < c^2$).
3. دراسة بعض خواص ثلاثية فيثاغورث Pythagorean Triples بالبدء مع صياغات لتوليد هذه الثلاثيات:

$$a = m^2 - n^2$$
$$b = 2mn$$
$$c = m^2 + n^2 \qquad \text{حيث } n < m$$

4. تصنيف الأنواع المختلفة لثلاثيات فيثاغورث، على سبيل المثال، بالكشف عن القيم التوليدية لكل من m و n التي تنتج ثلاثيات حيث $|a-b| = 1$ أو $|b-c| = 1$، وهكذا.
5. تأمل علاقة نظرية فيثاغورث ببقية الموضوعات في حقل الرياضيات (مثال، حساب المثلثات، ونظرية بطليموس، ومعادلات دايوفانتين).
6. تعميم نظرية فيثاغورث على قانون جيوب التمام.

موضوع التحليل العاملي

إثراء: إن توسيعا ينشأ عن تقانات التحليل العاملي التقليدية (مثل التحليل العاملي للفرق بين مربعين) قد يتيح للطالب اعتبار بعض الأنواع الخاصة من التحليل العاملي، مثل:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

بالنسبة للطلبة ذوي المواهب الفريدة، قد تكون الحالات العامة ذات فائدة كبيرة.

1. بالنسبة لقيم n الفردية:

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots+y^{n-1})$$

2. بالنسبة لجيمع قيم n:

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\ldots+y^{n-1})$$

3. بالنسبة لقيم n الزوجية:

$$x^n - y^n = (x^{n/2} + y^{n/2})(x^{n/2} - y^{n/2})$$

يمكن تزويد أمثلة إضافية عن التحليل المعقد لكي يجرب الطلبة حلها، مثل:

$$y(y-1)x^2 + (2y^2-1)x + y(y+1),$$

والتي يمكن تحليلها عامليا كما يأتي:

$$(xy + y + 1)(xy - x + y)$$

إن مصدرا مفيدا لبعض من أمثلة مسائل التحليل العاملي غير المألوفة هو:

Hall, H.S., and S.R. Knight, Revised by F.L. Sevenoak, Algebra for Colleges and Schools, New York: Macmillan, 1941.

وبشكل عام فإن هناك كتباً قديمة في الجبر تحتوي على مادة مماثلة.

موضوع حساب مثلثات

إثراء: يستطيع معلم مادة حساب المثلثات أن يوجه طلبته نحو توسيع قانون الجيوب إلى قانون الظلال.

بعد توضيح قانون جيوب التمام، يمكن عرض بعض حلول مسائل المثلثات المعقدة بوصفها توسعا للمسائل الاعتيادية الموجودة في الكتب المنهجية الحالية.

مرة ثانية، توفر الكتب المنهجية السابقة موردا خصبا للتوسع في موضوع ما. إن أحد هذه الكتب في حقل المثلثات هو:

Kells, L.M., F.K. Willis, J.R. Bland, and J.B. Orleans, Elements of Trigonometry, New York: McGraw Hill, 1943.

موضوع هندسة الدائرة

إثراء: إن التوسع الوحيد المتاح لهذا الموضوع قد يتضمن مناقشة تعريف وتاريخ π ، بدءا بمصادرها في الإنجيل (I Kings 7:23) (*) وتتبع تطورها لغاية الطرق والمناهج

(*) للحصول على تفسير ممتع لهذا المرجع، انظر:

An Astounding Relevations on the History of π, by:

A.S. Posamentier and N.Gordon, The Mathematics Teacher 77. (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, January, 2984, P.52).

الحديثة الخاصة بالحاسوب. إن مناقشة حسابات π سوف تؤدي إلى عدة تحريات ممتعة (مثال، انظر إنشاء π في وحدة إثراء 59)

موضوع الاحتمالات

إثراء: بمثل البساطة التي يتسم بها بيان مسألة الميلاد Birthday Problem ستكون الصعوبة التي تشخص أمام فهم وإدراك هذه الظاهرة غير التقليدية. أن تطوير الاحتمالات المختلفة تصنع توسعا جميلا للاحتمالات الأولية، وقد تؤدي بالطلبة وترشدهم نحو تحريات أخرى ذات صلة بالموضوع (انظر: مسألة الميلاد، وحدة إثراء 31).

موضوع TOPIC إنشاءات المثلث

إثراء ENICHMENT بصورة عامة فإن الإنشاءات الهندسية الوحيدة (باستخدام المسطرة العدلة والفرجار) للمثلثات في هندسة المدارس الثانوية هي تلك التي تعد من قياسات معينة لأضلاع وزوايا. إن توسيع هذه القيم المعينة بحيث تتضمن قياسات احد منصفات الزوايا الثلاثة أو المستقيم المتوسط، أو الارتفاع، أو أجزاء الأخرى من المثلث – ذات الصلة، سوف تؤدي بالطلبة إلى فهم أكثر أصالة وعمقا بخصائص المثلث. وتستطيع البدء بالاطلاع الشخصي على هذا الموضوع بقراءة (إنشاءات مثلث ـ وحدة إثراء 38) .ويمكن الحصول على معالجة موضوعية عميقة وخصبة لهذا الموضوع النفيس جدا في كتاب

Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Students and Teachrs, by: A.S. Posamentier (Emenyville, CA: Key Collage Publishing, 2002).

في كل من الأمثلة السابقة حول الإثراء من خلال التوسع في موضوع من المنهج القياسي، سنلاحظ بأن المناقشة كانت محددة دائما بتزيين وزخرفة الموضوع الأصلي دون أن تكون استطرادا نحو موضوع آخر. إن الحالة الأخيرة (الاستطراد) هي الشكل الأخير من الإثراء المخصص للطلبة الموهوبين، والذي سيكون موضوعا للمناقشة.

الاستطراد Digression

إن شكلا شائعا من الإثراء ينشأ، بصورة عامة، عندما يعمد المعلم إلى الاستطراد من موضوع في المنهاج الدراسي الأصلي لاعتبار موضوع آخر ذو صلة به، ويكون عموما نتيجة أو نموا مباشرا للموضوع الأول. نظرا لأن الصف الذي يضم طلبة موهوبين يستطيع غالبا إتقان موضوع بوتائر أسرع بكثير من الصف التقليدي، سيتوفر المزيد من الوقت لمناقشة مواضيع أخرى ذات صلة بالموضوع الأول قبل الاستمرار بإكمال المقرر الدراسي المنهجي.

تمتاز هذه الاستطرادات بفوائد تربوية جمة، وقد تستغرق أوقاتا تتراوح بين جزء محدود من جلسات الدرس إلى عدة جلسات.

وكما هو الحال مع بقية الأنشطة الإثرائية التي نوقشت سابقا، ينبغي أن يوظف الاستطراد لإثراء المنهج الدراسي القياسي، دون أن يخرج عنه. وغالبا ما تكون هذه الأنشطة الإثرائية فاتنة وساحرة، بحيث تؤدي من ناحية أخرى، إلى إظهار المنهاج الدراسي اقل إغراء وبلا جاذبية. لذا فإن المعلم، الذي يعي هذه الإمكانية، يجب عليه أن يحاول، باستمرار، إقامة علاقة بين الاستطراد والمنهاج الدراسي القياسي بحيث، بدلا من تقليله وإنقاص الاهتمام به، يسعى إلى جعل موضوع الإثراء سببا لتزينيه وتقريبه إلى الطلبة: ينبغي أن تسهم الأمثلة الآتية في مساعدة وتوفير فهم افضل لما تعنيه أنشطة الإثراء التي تعد استطراداً عن المنهج الدراسي المعتاد.

موضوع الهندسة (المدارس الثانوية الدنيا أو المتوسطة)

إثراء: إن المعالجة المناسبة والمتأنية لموضوع الشبكات Network قد تكون استطرادا مفيدا من الهندسة العامّية Informal Geometry. ومع الهدف المحتمل عند استكشاف مسألة جسر كونسبورغ Konigsberg Bridge Problem. وقد تكون دراسة الشبكات مليئة بالإثارة، وتؤدي إلى تحريات طوبولوجية ذات الصلة بالموضوع (انظر "شبكات"، وحدة إثرائية 96).

موضوع المثلثات (مستوى المدارس الثانوية العليا)

إثراء: بعد أن يمتلك الطالب معرفة تطبيقية جدية بحساب المثلثات المتضمنة في المنهج الدراسي القياسي، يصبح الاستطراد الممتع النشاط الإثرائي الذي يتيح للطالب فرصة دراسة حساب المثلثات الكروية. ومع ذلك فإن هذا الأسلوب من الاستطراد قد يؤدي إلى فهم أكثر كمالا بحساب المثلثات.

موضوع التزامن

إثراء: نظرا لأن موضوعات التزامن والاستقامة Collinearity قد أهملت في مساق الهندسة الدراسي بالمدارس الثانوية العليا، فإن استطراداً يهدف دراسة هذه الموضوعات بصورة أكثر تفصيلا

قد يكون ذو أهمية بالغة. وستسهم نظريتا جيوفاني سيفا Giovanni Ceva (1647–1736) ومينالاوس الإسكندرية (100)م Menelaus of Alexandria في أن تقودنا إلى ظواهر هندسية أكثر إمتاعا.

وللبدء بالاطلاع الذاتي على هذه الموضوعات، انظر: (البرهنة على تلاق مستقيمين" وحدة إثراء 53، و "البرهنة على استقامة نقاط"، وحدة إثراء 55). وإذا أردت أن تستزيد من أفكار أخرى، يمكن الرجوع إلى:

Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Students and Teachers, by: A.S. Posamentier (Emeryville, CA: key College Publishing, 2002).

موضوع المعادلات التربيعية (الجبر)

إثراء: بعد استكمال دراسة الطرق المختلفة التي تستخدم في حل المعادلات التربيعية، قد يرغب الطلبة بتعلم كيفية حل معادلات بدرجات أعلى. إن اعتبار بعض الأساليب لحل المعادلات التكعيبية قد يشكل أمرا تنويريا بالنسبة للطلبة الموهوبين. وسيؤدي هذا الأسلوب من التحري بهم إلى تقدير عمل الرياضيين القدماء (على سبيل المثال، نيكولو تارتاجليا Nicolo Trataglia (1506-1557)، (انظر: قسم الآلة الحاسبة، في هذا الفصل).

موضوع المقاطع المخروطية (مدارس ثانوية متقدمة).

إثراء: إن المعلم واسع المصادر يستطيع، بدون شك، مناقشة بعضا من التطبيقات الفيزيائية المتعددة للمقاطع المخروطية. ولا تكاد تجد معلماً يستطرد في مناقشة كيفية إنشاء المخروطات. إن هذه المناقشات سوف تؤدي إلى تغطية أغلفة المنحنيات المخروطية. يعد موضوع إخاطة المنحني Curve Stitching فرعا ممتعا لهذا التحري (انظر: "إنشاء القطع الناقص"، وحدة إثراء 106، و "إنشاء القطع الزائد"، وحدة إثراء 107).

إن المحدد الوحيد على الموضوعات التي تسهم في إنشاء استطرادات مناسبة للإثراء يكمن في الحكم الذي يتبناه المعلم، فهناك مجموعة متنوعة من الموضوعات المحتملة التي يمكن أن نختار ما نشاء منها. ولكن ينبغي أن يرتبط الاستطراد بموضوع محدد في المنهج الدراسي يعد نقطة بداية، على أن يخطط له بصورة محكمة بحيث يمتلك بداية واضحة، واستنتاج منطقي، وفوق كل هذا، أن يكون ذو هدف محدد.

استخدام الآلات الحاسبة في إثراء التدريس
Using Calculators To Enrich Instruction

تحدي حب الاستطلاع غير الاعتيادي
Investigating Unusual Curiosities

بمساعدة الآلة الحاسبة، فإن كثيرا من أمور حب الاستطلاع الرياضي–المتع (وغالبا من دون تفنيد) والتي تطفو على سطح خبرات المواطن العادي–اليومية قد تفيد بوصفها تطبيقات ممتازة في رياضيات المدارس الثانوية العليا. على سبيل المثال، فإن إعلانات المصرف تلقي الضوء على "العائدات الاستثمارية السنوية المتحققة" بعد بيان مقدار الفائدة التي تمنحها. وأن القيام بتفحص أربعة من هذه الإعلانات سيظهر العائدات الاستثمارية السنوية الفعلية لفائدة سنوية مقدارها $5^{1/4}$٪ مركبة يوميا: 5.35٪، 5.39٪، و 5.46٪. إن إدراج إعداد أيام متغيرة (في سنة)، n، في أجزاء مختلفة من الصيغة الآتية :

$$I=(1+\frac{r}{n})^{n}-1$$

سينشب عنه إجابات متنوعة. سوف يشجع توفر الآلة الحاسبة على ممارسة هذا النوع من الاستكشاف. من جهة أخرى قد يتضمن نوع آخر من الاستكشافات احتساب تأثير حسم ضريبة الدخل على الأفراد في فئات ضريبة الدخل المختلفة.

إن مثالا "في المعايير" قد بين كيف أن نفس المحتوى يمكن عرضه على عدة مستويات مختلفة رغم أن استراتيجيات التعليم سوف تعاني من تغييرات وفقا لمستويات: الفائدة، والمهارات، والأهداف.

إن وصفا مختصرا للمثال سندرجه أدناه.

مثال EXAMPLE: تأمل مسألة إيجاد كمية النقود التي ستكون في حساب التوفير بعد انقضاء عشرة سنوات، إذا كان المبلغ الأساسي المودع ($100) وكان مقدار الفائدة المركبة السنوية (6٪).

عند المستوى 1 في المنهج الدراسي الأساسي، يستخدم الطلبة الآلات الحاسبة لحل المسألة بواسطة احتساب المبلغ بعد كل سنة متعاقبة. وقد يلجأون إلى استخدام الصحائف المتدة Spreadsheet على الحاسوب. يمكن أن يشجع الطلبة على إيجاد النمط الكامن، على سبيل المثال:

المبلغ عند نهاية السنة 1 = 100 $(1.06)^{1}$

المبلغ عند نهاية السنة 10 = 100 $(1.06)^{10}$

عند المستوى 2، سيلجأ الطلبة إلى تعميم هذه المسألة على

مراحل. وأخيرا سيصلون إلى الصيغة $A_n=A_0(1+r)^n$، حيث A_n هو المبلغ بعد مرور n من السنين، A_0 هو مقدار المبلغ المودع في البداية، وأن r يمثل مقدار معدل الفائدة.

عند المستوى 3، سيعمد الطلبة إلى تعميم اكبر في الصيغة بحيث تتوفر لديهم فرصة كافية لاستكشاف مسائل أخرى حيث تتراكب الفائدة بأسلوب: نصف سنوي، أو ربع سنوي، أو شهري. أو يومي.

عند المستوى 4، ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل المسألة المذكورة في المستوى 2 ولأي متغير من متغيراتها.

إن التوسعات المحتملة للموضوع ستتضمن:

- حل مسائل حيث يوفر النمو المتراكب في علوم الأحياء، ومعدل الانحلال في الكيمياء تطبيقات مناسبة.
- برهنة النتائج باستخدام الاستقراء الرياضي.
- إقامة ارتباط بين هذا الموضوع والرقم فير القياسي e.

إن كثيرا من مسائل الحياة الواقعية (مثل: القروض، والضرائب. والمشتريات بالتقسيط) يمكن استكشافها وتحري تطبيقها بمساعدة الآلة الحاسبة. ان مثل هذه التحريات قد نفيد بوصفها مصادر ممتازة للتطبيقات للمنهج الدراسي التقليدي بالمدارس الثانوية. وهناك الكثير من الآراء حول المسائل في كتاب NCTM السنوي لعام 1979 والذي يحمل عنوان. *Applications in School Mathematics.* *تطبيقات في الرياضيات المدرسية.*

أنشطة الآلة الحاسبة-الصفية

Classroom Calculator Activities

ينبغي على المعلمين أن يستفيدوا من حقيقة كون الآلات الحاسبة قادرة على توليد البيانات بصورة دقيقة وسريعة. لذا فإن الطالب الذي يستخدم الآلة الحاسبة قد أتيحت له فرصة ذهبية لاستكشاف الرياضيات وإجراء ملاحظات وحدوس دون معاناة أعباء حسابات معقدة ومطولة. وتتوفر، بالوقت الحالي، لطلبة الصف فرصة مناسبة لاستكشاف المسائل التي ستبقى حبيسة في واقع متردد، أو ربما غير مشجع.

وإن المسائل التي لم تؤخذ بعين الاعتبار ستكون الآن مرشحة للحل بواسطة طلبة يتمتعون بحد أدنى من القدرات الحسابية. ويؤمل أن تسهم هذه النتائج في شحذ فهم الطلبة ومهاراتهم التحليلية

إن الأنشطة الأولية مثل جمع البيانات المناسبة وتقييمها، سوف تجعل من هذه المسائل أكثر قربا من المواقع الملموس، واشد إمتاعا من المسائل التقليدية مع تقانات الحلول المصاحبة لها. وندرج فيما يأتي بعض الأمثلة حول عدة أنواع من المسائل التي يتوجب اعتبارها، اعتمادا على مستوى المرحلة، والقدرات، ومقدار نضج طلبة الصف.

1. كم قطرة من الماء توجد في قدح ماء مملوء؟
2. كم شعرة توجد في شعور طلبة الصف؟
3. ما هو عدد حبات الرمل الموجودة في صندوق أبعاده 12 بوصة × 4 بوصة × 6 بوصة؟
4. احسب مساحة الدائرة التي يبلغ قطرها 5 بوصة.
جد أبعاد المستطيل الذي مساحته تساوي بالتقريب مساحة الدائرة.
5. كم دقيقة، أو ساعة، أو يوم تستغرق في متابعة جهاز التلفاز كل شهر؟ أو كل سنة؟ قارن هذا الرقم بالوقت الذي تستغرقه أثناء وجودك بالمدرسة.
6. كم عدد الأقدام الموجودة في محيط الكرة الأرضية؟ وكم عدد البوصات؟ وكم عدد الأمتار؟.

هناك عدد غير محدود من المسائل المتنوعة التي يستطيع المعلم المبدع أن يشجع طلبته على "كتابتها" و"حلها" بواسطة الآلة الحاسبة. انظر (وحدة إثراء 11، "إثراء بواسطة إلى حاسبة بيدك").

سوف ندرج ستة أنشطة آلة حاسبة – إضافية والتي ستفيد بوصفها تحديا خاصا بالطلبة في المراحل 7– 9.

قواعد حدسية Conjecturing Rules

اكمل الجدول الآتي:

ادرج 50 رقما صحيحا عشوائيا	(1) اضرب في 2	(2) اضرب في 10	(3) اضرب في 100	(4) اضرب في 1000
1				
2				
17				
23				
107				
113				
.				
.				
.				

والآن، أجب عن الأسئلة التالية:

1. ماذا تلاحظ حول آخر رقم من كل عدد في العمود (1)؟ اصنع حدسا.
2. قارن الأعمدة 2، 3، 4. ماذا تلاحظ؟ اصنع حدسا.

3. اكمل الجدول لخمسين رقم عشوائي، واصنع بعض الحدوس والتخمينات ثم اختبرها. هل تستطيع أن تبرهن على صحة حدسك؟

4. اكمل الجدول لخمسين رقم عشوائي ولكن قسم في الأعمدة 2، 3، و 4.

اصنع بعض الحدوس وحاول اختبارها

الأرقام الأربعة – السحرية Four Magic Digits

1. اختر أية أربعة أرقام أربعة مختلفة، مثل 2، 3، 4، و5. اتبع الخطوات الآتية:

(أ) كوِّن أكبر عدد يمكنك: 5432

أن تكوِّن أصغر عدد: 2345-

اطرح: 3087

(ب). مع الأرقام 3، 0، 7 و 8، ومن الفرق، اتبع الخطوات الآتية:

كوِّن أكبر عدد: 8730

كوِّن اصغر عدد: 378 -

اطرح: 8352

(ج). مع 8. 3. 5. 2، من الفرق، اتبع هذه الخطوات:

كوِّن أكبر عدد: 8532

كوِّن أصغر عدد: 2358-

اطرح: 6174

بعد إجراء الطرح لثلاثة مرات سنحصل على عدد بأربعة أرقام سحرية هي 1. 4، 6. 7.

2. كرر التمرين 1 بالأرقام 1، 5. 6، و 8. سوف تجد الأرقام الأربعة السحرية بترتيب ما 1، 4، 6، 7 بعد إجراء عملية الطرح لثلاثة مرات. اكتب حلك كما هو في تمرين 1.

3. باستخدام أربعة أعداد مختلفة، غالبا ما سنحصل على عدد بأربعة أرقام تضم 1. 4، 6، و 7 بترتيب محدد. ابدأ بالأرقام 9. 8. 7. و 6 وانظر هل ستحصل على العدد 6174 بعد إجراء ثلاثة عمليات طرح متتالية؟

4. ادرس حلك للتمرين 2، مبتدئا بأربعة أرقام وستحصل على عدد بالأرقام 1. 4. 6، و 7 بعد أن تصل إلى أرقام الطروحات 1. 2. 4، 5، و 6.

المربعات السحرية Magic Squares

1. إن هذا المربع السحري يحتوي على أربعة صفوف، وأربعة أعمدة، وقطرين. جد مجموع لكل منها. وإذا لم تكن الجموع الثمانية متساوية تأكد من عملك.

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

2. جد مجاميع بأربعة أعداد في نمط مجموعه 34. هنا ثلاثة أمثلة عليها. جد 12 نموذجا إضافيا. ارسم مربعات 4–في–4 لعرض الحلول. (انظر وحدتي إثراء 2،1).

	2		
5			
			12
		15	

16			13
4			1

		10	8
9	7		

حواصل الضرب الغريبة Strange Products

1. جد كل من حواصل الضرب الآتية:

(أ). 68×34 86×34 (ب). 63×24 36×42

(ج). 93×13 39×31

2. (أ). هل أن حاصلي الضرب في تمرين (1) متساوية في (أ، ب، و ج)؟

(ب). هل إن الأرقام في العوامل مقلوبة في تمرين (1–أ)، (1–ب)، و (1–ج).

3. جد حواصل ضرب كل مما يأتي:

(أ). 84×12 48×21 (ب). 64×23 46×32

(ج). 82×14 28×41 (د). 56×21 65×12

(هـ). 49×63 94×36 (و). 75×68 57×86

4. (أ). هل إن الأرقام في تمرين 3 قد قلبت في كل عامل؟

(ب). في أي زوج من تمرين 3 تتساوى فيها حواصل الضرب؟

(ج). حاول كتابة أمثلة تشابه مثال 3(أ) إلى 3(ج) حيث تتساوى حواصل الضرب.

5 افحص للتأكد من أن حواصل الضرب متساوية في كل مما يأتي:

(أ). 96 69 (ب). 84 48
×23 ×32 ×36 ×63

(ج). 93 39
×26 ×62

6 قم بإعداد بعض الأمثلة تشابه الأمثلة 1 و 5.

7 اكتب القاعدة التي استخدمتها في إعداد الأمثلة بتمرين 6.

مفاجآت SURPRISES

1 (أ) اختر عددا بثلاثة أرقام، على سبيل المثال، 295.

(ب) اعد عددا بستة أرقام عن طريق تكرار العدد 295. لقد اصبح العدد الجديد 295295.

(ج). قسم العدد 295295 على العدد 13. سيكون خارج القسمة ________.

(د). قسم خارج القسمة على العدد 11. سيكون خارج القسمة ________.

(هـ). قسم خارج القسمة على العدد 7. سيكون خارج القسمة ________.

2 كرر تمرين 1 باستخدام الأعداد 347347، 921921، و 164164.

السلاسل الاجتماعية SOCIAL CHAINS

يعد العددان متحابان Amicable (أو صديقان Friendly) إذا كان كل منهما يساوي مجموع القواسم الحقيقية للعدد الآخر. على سبيل المثال:

- العددان 284 و 220 متحابان.
- العوامل الحقيقية للعدد 220 هي: 1، 2، 4، 5، 10، 11، 20، 22، 44، 55، 110. المجموع يساوي 284.
- العوامل الحقيقية للعدد 284 هي: 1، 2، 4، 71، 142 المجموع يساوي 220.

إن زوج الأعداد المتحابة 220 و 284 قد عرفه فيثاغورث بحدود عام 500 ق.م. ولم يكتشف أي زوج من الأعداد المتحابة حتى عام 1636م، عندما نبه العالم الرياضي الفرنسي فيرمات Fermat إلى إن العددين 17296 و 18416 هما عددان متحابان أيضاً. وفي حوالي عام 1760، وبعد البحث بأسلوب منظم، اكتشف ايلر Euler أكثر من 60 زوجا من هذه الأعداد. إن الزوج الصغير الذي لم ينتبه إليه "ايلر" قد اكتشفه نيقولو باجانيني Nicolo Paganini، وهو شاب بعمر 16 عام، في عام 1886. وفي أيامنا هذه بلغ عدد الأعداد المتحابة حوالي 1000 زوجا. إن آخر زوج تم اكتشافه في عام 1976م كان احد أعداد الزوج هو:

5 070 746 263 958 274 212 545 800 175 616

وتجد هنا بعض التمارين التي تستكشف هذا المفهوم:

1. برهن إن العددين 17296 و 18416 متحابان.
2. برهن إن العددين 1184 و 1210 متحابان.
3. هل تستطيع البرهنة بأن الأعداد ينبغي أن تكون فردية أو زوجية؟

نماذج وأعمال تشكيلية تثري التدريس Models And Manipulatives That Enrich Instruction

إن الاستكشافات بواسطة النماذج والأعمال التشكيلية هي طريقة تعليمية بديلة والتي تشجع على الاهتمام ببعض الطلبة وبمواضيع مختارة. إن مغادرة الأسلوب التقليدي لمناقشات المعلم وتجاربه الإيضاحية، باتجاه مجاميع صغيرة واستكشافات فردية لنماذج مبدعة أو أعمال تشكيلية سوف توضح وتلقي الضوء على مبادئ كامنة في العمليات الجبرية أو العلاقات الهندسية:

إن برمجيات هذه الأيام تستطيع أن تحل (مفاهيميا) محل الكثير من أعمال الأمس التشكيلية. ويعد برنامج Geometer's Sketchpad (Key Curriculum Press) أحد هذه البرامج، وهو أداة بديعة لاستكشاف مفاهيم الهندسة، وبالخصوص الثابتة منها.

خذ، على سبيل المثال، النظرية التي تنص على إن الشكل الرباعي الذي ينشأ عن وصل نقاط منتصف أضلاع أي شكل رباعي هو متوازي أضلاع. إن رسم الشكل الرباعي بواسطة Geometer's Sketchpad، ووصل نقاط المنتصف المتتالية بواسطة قطع مستقيم، ثم سحب الفأرة لتحريك أي قمة (رأس) من الشكل الرباعي الكبير إلى أي موقع (وبذلك سيحصل تشوه في الشكل الرباعي الأصلي)، يظهر بأن الشكل الذي ينشأ عن وصل نقاط منتصفات الأضلاع هو متوازي أضلاع، على الدوام.

إن إجراء تجارب إضافية على هذا الشكل سوف تظهر بوضوح متى سيكون متوازي الأضلاع، معينا، أو مربعا، أو

مستطيلا. إن مثل هذه الأعمال التشكيلية المعاصرة توفر منظورا مستحدثا للرياضيات، مفيدا بشكل لا يصدق، ولم يكن ممكنا في الأيام الخوالي. من أجل هذا ينبغي أن يتوجه المدرسون نحو الاستفادة من هذه الأدوات على التعلم، والتي لا تقدر بثمن.

أنشطة الأجسام متعددة السطوح-المنتظمة (الأجسام الافلاطونية)

Regular Polyhedra (Platonic Solids) Activities

إن وجهات النظر التاريخية قد تطفو على السطح أثناء عملية استخدام النماذج الرياضية، كما هو الحال مع الجسم بالسطوح المتعددة-المنتظمة والذي سيأتي بعد قليل.

قم بترتيب الصف على شكل مجاميع تتألف كل منها من ستة طلاب يعملون على شكل ثنائي. وستقوم كل مجموعة بإعداد نماذج من ورق المقوى للجسم متعدد السطوح عن طريق إنشاء هذه الأنماط (انظر الصفحة الآتية)، ثم قطعها، وطيها عند الخطوط المنقطة، وباستخدام الورق اللاصق للامساك بالحافات سوية. (ملاحظة: اجعل كل حافة = 2 وحدة طول). ستقوم كل مجموعة بإعداد تقرير إلى جميع الصف يحوي على نتائج استكشافاتهم بعد إكمالهم الجدول، وإجابتهم على الأسئلة الآتية.

أسئلة QUESTIONS

1 اقترح صيغة تربط عدد الرؤوس (القمم) V، وعدد الحافات (E)، وعدد الوجوه (F) لكل من الأجسام متعددة السطوح.

2 اختر وجها من كل جسم متعدد السطوح. كم عدد الوجوه المتبقية (أ) التي توازي الوجه الذي تم اختياره؟ (ب) التي تقطع الوجه الذي تم اختياره؟.

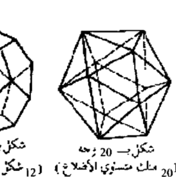
3. اختر حافة من كل جسم متعدد السطوح. كم عدد الحافات المتبقية (أ) التي توازي الحافة التي اخترتها؟. (ب). التي تميل إلى الحافة التي اخترتها؟.

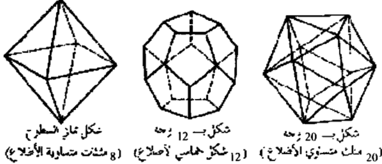
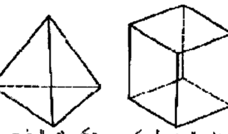
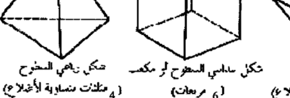
4. جد المساحة الكلية لسطوح الجسم متعدد السطوح. تذكر الصيغ الخاصة بمساحات: المثلث-متساوي الأضلاع، والمربع، والشكل الخماسي.

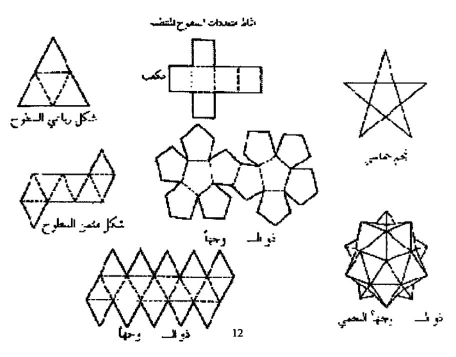
5. جد حجم الجسم سداسي السطوح، والجسم رباعي السطوح، والجسم ثماني السطوح. تذكر بأن الجسم ثماني السطوح يتألف من هرمين، وأن صيغة حجم الهرم هي $\frac{1}{3}$(مساحة القاعدة) × (الارتفاع).

6 تحقق من إن الصيغة التي تعرف بصيغة "ايلر" V-E+F=2 تصلح لغير الأجسام الصلبة، مثل متوازي السطوح، والمنشور، والهرم.

7. برهن صيغة ايلر، كتمرين تحدي.





الأجسام متعددة السطوح المنتظمة

الاستكشاف	رباعي السطوح المنتظم	سداسي السطوح المنتظم	ثماني السطوح المنتظم	جسم باثني عشر سطح منتظم	جسم بعشرين سطح منتظم
عدد الوجوه.					
عدد الرؤوس.					
عدد الحافات					

تعليقات تاريخية Historical Comments

تعرف الأجسام متعددة السطوح-المنتظمة، أيضاً، بالأجسام الأفلاطونية، اجلالاً لافلاطون الذي وحّدهم مع الطبقات الكروية للأرض، والماء، والهواء، والنار. وقد اعتقد بأن هذه العناصر الأربعة هي العناصر الأساسية التي تحيط بالكون. احتفظ اقليدس بدراسة الجسم متعدد السطوح للموضوع الختامي في كتاب الهندسة، "العناصر"، لاعتقاده بصورة جازمة بأن الأخير هو الأفضل.

لقد توسعت المعرفة بخصائص الجسم متعدد السطوح منذ الأزمنة اليونانية القديمة. وقد اكتشف يوهانز كبلر Johannes Kepler (1571-1630) نوعا جديدا من الأجسام متعددة السطوح. فقد لاحظ في البداية بأنه إذا تم تمديد أضلاع الجسم متعدد السطوح المنتظم، فانه سينشأ عنها جسم متعدد السطوح – منتظم جديد.

وعليه فإن شكلا خماسيا Pentagram منتظما قد اصبح شكلا خماسيا نجمي الشكل Stellated Pentagon. وبتعميمه

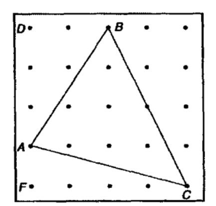
لهذه التقانة، اصبح قادرا على إنشاء أجسام مثل: جسم نجمي باثني عشر وجها Dodecahedron. ولغرض المزيد من التحريات انظر:

Mathematical Recreations and Essays by W.W.R.Ball(New York:Macmillan,1962).

أنشطة اللوح الهندسي (الأوراق النقطية)

Geoboard (Dot Paper) Activities

تنص صيغة بيك Pick's formula بأن مساحة المثلث الذي تقع جميع رؤوسه على أوتاد اللوح الهندسي، أو على نقاط الأوراق النقطية هي، $\frac{b}{2}+i-1$ حيث تمثل b عدد النقاط على حدود المثلث، بينما تمثل i عدد النقاط في داخل المثلث. وعليه فإن مساحة المثلث ABC تكافئ 7 وحدات مربعة.



تمارين EXERCISES

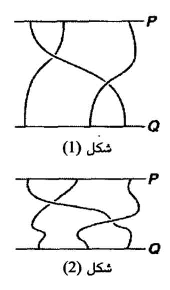
1. استخدم ورقا بحجم 5 نقطة × 5 نقطة لإنشاء مثلث ثان RST، وبمساحة قدرها 7.
2. عين حدود مربع حول المثلث RST. فإذا كانت المسافة بين كل نقطتين تساوي وحدة واحدة، جد عدد وحدات المربع في كل مثلث قائم الزاوية في صورة المثلث RST. أضف مساحات المثلث قائم الزاوية واطرح المجموع من مساحة المربع، 16، للتأكد من صحة الجواب، 7.
3. استخدم نظرية فيثاغورث لإيجاد أطوال $\overline{RS}$، $\overline{ST}$، و $\overline{TR}$.
4. استخدم صيغة المساحة 1/2 (القاعدة) × (الارتفاع) لإيجاد مقدار الارتفاع من R، و S، و T.
5. أنشئ شكلا متوازي الأضلاع على اللوح الهندسي وجد: مساحته، وأضلاعه، وارتفاعاته.

خصائص مجموعة الضفائر

Group Properties of Braids

غالبا ما تكون مجموعة المواد التي تعد منزليا Homemad أكثر النماذج والأعمال التشكيلية نفعا وفائدة. إن أحد هذه النماذج يستخدم الضفائر لتوضيح خصائص الزمر الرياضية.

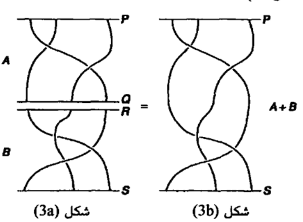
تتألف الضفيرة من المرتبة الثالثة من قضيبين يرتبطان بواسطة ثلاثة جدايل Stands، كما في شكل (1). يمسك القضيبان P، Q بالجدايل الثانوية والسفلى، ويمكن نشرها أو تحريكها سوية دون إحداث تغيير في هيئة الضفيرة. وعليه، فإن الضفيرتين الظاهرتان في الشكلين (1،2) متكافئة.



شكل (1)

شكل (2)

تحصل "عملية الجمع" كما يأتي: ضع الضفيرتين A، B في الموقع المحدد في الشكل 3a، وبعد رفع القضيبين Q و R، اربط الجدايل المتقابلة سوية. إن الضفيرة الناتجة هي A+B (الشكل 3b).



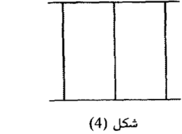
شكل (3a) شكل (3b)

لقد تحقق شرط "الإغلاق"، نظرا لأن مجموع ضفيرتين من المرتبة 3 لازال ضفيرة من نفس المرتبة، وينبغي أن تكون في المجموعة.

وكذلك الحال بالنسبة لقانون "الاتحاد" الذي تحقق أيضاً، نظرا لأن الضفائر A، B، C، والتي نتجت أولا عن رفع القضيبين A، B، ثم بين A+B و C، تشابه ناتج رفع القضبان بين B و C أولاً، ثم القضبان بين A و B+C. وعليه فإن:

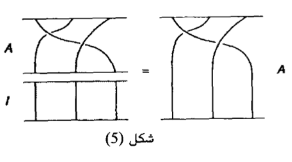
$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

عنصر الهوية I، (انظر شكل 4)



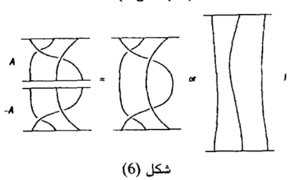
شكل (4)

يبدو واضحا بأن A+I = A (انظر شكل 5).



شكل (5)

إن العنصر المقلوب من الضفيرة، A، هو مقلوب مرآتها A–
لذا، A+(-A) = I (انظر شكل 6).

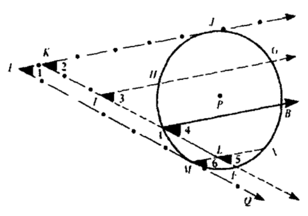


شكل (6)

(ملاحظة: عندما تضاف الضفيرتان، فإن النتيجة الواضحة لذلك ستكون الضفيرة المتماثلة، والتي يمكن تمييزها بسهولة بواسطة نشر القضبان الثانوية والسفلى بمسافة متباعدة).

إن المجموعة ليست ابيليه Abelian (*)، نظرا لأنه ليس من الضروري بالنسبة للضفيرتين A,B، أن تكون A+B متساوية B+A.

تعرض وحدة إثراء 56 استخداما ممتعا لعمل تشكيلي، بالغ البساطة، أنجزه المعلم، والذي سيتيح للطالب فرصة البرهنة على جميع نظريات قياس الزاوية التي تتضمن الدوائر وتقاناتها. ويستطيع المعلم أن يعرض أيضاً نفس الفكرة بأساليب أخرى مثل النموذج المدرج أدناه. يكلف الطالب بملء الفراغات (تم ملؤها ووضعها داخل دوائر في هذا المثال) الموجودة في الشكل الآتي:



في الشكل، أعلاه، تأمل جميع الخطوط التي تبدو متوازية. إن إجابات الأسئلة 2 إلى 8 هي عبارة عن أقواس.

1 لماذا تكون الزوايا 1-6 متطابقة.

2. $m\angle BAF = \frac{1}{2} m\underline{BF}$

3. $m\widehat{BN} = m\underline{AM} = m\underline{MF}$

4. $m\angle NMQ = m\angle BAF = \frac{1}{2}(m\widehat{BN} + m\underline{NF}) =$

$\frac{1}{2}(m\widehat{MF} + m\underline{NF}) = \frac{1}{2} m\underline{NM}$

5. $m\angle NEF = m\angle BAF = \frac{1}{2}(m\widehat{BN} + m\underline{NF}) =$

$\frac{1}{2}(m\widehat{AM} + m\underline{NF})$

6. $m\angle GIF = m\angle BAF = \frac{1}{2} m\underline{BF} =$

$\frac{1}{2}(m\underline{BF} + m\widehat{BG} - m\widehat{BG}) = \frac{1}{2}(m\underline{BF}$

$+ m\widehat{BG} - m\underline{HA}) = \frac{1}{2}(m\widehat{GBF} - m\underline{HA})$

(*) نسبة إلى الرياضي النرويجي Neils Abel

7. $m\angle JKF = m\angle BAF = \frac{1}{2}\, m\underline{\ (RF)\ } =$

$\frac{1}{2}\,(m\underline{\ (BF)\ } + m\widehat{JB} - m\widehat{JB}) = \frac{1}{2}\,(m\underline{\ (BF)\ }$

$+\, m\widehat{JB} - m\underline{\ (JA)\ }) = \frac{1}{2}\,(m\widehat{JBF} - m\underline{\ (JA)\ })$

8. $m\angle JLM = m\angle NMQ = \frac{1}{2}\, m\underline{\ (NM)\ } =$

$\frac{1}{2}\,(m\underline{\ (NM)\ } + m\widehat{JN} - m\widehat{JN}) = \frac{1}{2}\,(m\underline{\ (NM)\ }$

$+\, m\widehat{JN} - m\underline{\ (JM)\ }) = \frac{1}{2}\,(m\widehat{JNM} - m\underline{\ (JM)\ })$

9. صف لفظياً العلاقات المكتوبة بخطوط عريضة في التمارين 4–8.

إن هذه التمارين تنشئ ببراعة وإحكام جميع نظريات قياس الزاوية ذات الصلة بالدائرة، والتي تدرس غالبا في درس الهندسة في المدارس الثانوية. ويعاد الطلبة عبر سلسلة من الأسئلة البسيطة، والتي بسبب هيكليتها، تبرهن بالضرورة على العلاقات التي يراد الوصول إليها ويجب أن يكون الاكتشاف كنتيجة طبيعية. ونحن من جهتنا نقترح ترصيع تمارين الكشف بتمارين أخرى، نظرا لأن دوالها تحقق بعض أهداف تحديد الواجبات البيتية.

خلاصة SUMMARY

ينبغي أن يشجع المعلمون على جمع المواد والآراء، بصورة مستمرة، لإثراء تعلمهم في الرياضيات. وبصرف النظر عن مستوى قدرات الطلبة، يمكن إيجاد أنشطة إثرائية جديدة على الدوام. وفي بعض الحالات يصعب تأمين الأنشطة الإثرائية كما هو الحال في أنشطة أخرى، وعلاوة على ذلك فإن عملية البحث عن موضوع مناسب تبرهن بذاتها على كونها ذات فائدة كبيرة للمعلم.

ينبغي أن يبذل كل معلم جهودا استثنائية لإثراء تدريسه، وغالبا ما تؤدي هذه الخبرات الإثرائية–المحفزة باتجاه تطوير اهتمامات جديدة في مادة الرياضيات بين الطلبة الضعفاء والمتوسطين، بينما ستكون مفيدة وذات اثر بالغ في التشجيع على دراسة المزيد من الرياضيات بين الطلبة الذين يرتقون على المستوى المتوسط، وبين الطلبة الموهوبين.

ويجب أن تزودك الوحدات الإثرائية التي قدمت لك بأفكار لإثراء تدريسك الرياضيات. وهناك مرجع آخر رائع للأفكار هو:

A Bibliography of Recreational Mathematics, Vols. 1-4, by W. L. Schaaf (Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1970, 1973, 1978).

وبهذه الأدوات تحت تصرفك، فإنك على أتم الاستعداد لإثراء معلومات طلبتك وتقدير الرياضيات.

تمارين Exercises

1. اختر موضوعا لإثراء تدريسك في كل مما يأتي:
   - أ. صف بالمرحلة الثامنة رياضيات وبقدرات متوسطة.
   - ب. صف بالمرحلة العاشرة لطلبة موهوبين.
   - ج. صف علاجي بالمرحلة التاسعة.
   - د. صف بالمرحلة الحادية عشر وبقدرات متوسطة.
   - هـ. صف بالمرحلة السابقة لطلبة موهوبين.
   - و. صف بالمرحلة الثانية عشر لطلبة موهوبين (يدرسون حاليا حساب التفاضل والتكامل).

   وضح كيف ستعالج كل من الموضوعات التي أدرجتها. وحدد حجم المواد التي تخطط لتغطيتها في الدرس.

2. في كل مما يأتي، اختر مستوى مرحلة، ومستوى قدرة واعد مثالا لموضوع إثرائي يعرض:
   - أ– التوسيع.
   - ب– الاستطراد.

3. افترض بأنك قد فوتحت بواسطة أولياء أمور أحد أكثر طلبتك إنجازا، وقد طلب منك تسريع تعليم مادة الرياضيات لولدهم، لأنهم يرون أن روح التنافس السائدة في الصف لا ترق لأن تكون مناسبة له. وضح كيف ستتعامل مع هذا الطلب. ناقش ردك على الأبوين، وأفعالك قبل، وبعد إعطائك للرد.

4. أتى أولياء أمور أحد طلبتك الضعفاء في المرحلة التاسعة ليطلب منك استغراق بعض الوقت، بين الحين والآخر، مع الصف على "أمور خارجية" (على سبيل المثال، إثرائية) بدلا من صرف معظم وقتك التدريسي على أعمال

علاجية. كيف سترد على هذين الأبوين؟.

5 بالنسبة لصف من الطلبة الموهوبين، قم بإعداد الخطوط العريضة لوحدة إثرائية لكل من الموضوعات المنهجية (مع بيان طبيعة الأنشطة سواء كانت توسعية أم استطرادية).

أ. الأشكال رباعية الأضلاع (فصل هندسة للمدارس الثانوية).

ب. المتواليات (فصل الجبر للسنة الثانية).

ج النسب المئوية (صف رياضيات بالمرحلة السابعة).

د. نظرية ذات الحدين (صف رياضيات بالمرحلة الحادية أو الثانية عشر).

هـ قياس زاوية بواسطة دائرة (مساق دراسي هندسي للمدارس الثانوية).

و. مجموعة معادلات (السنة الأولى لمساق دراسي بمادة الجبر)، وقم بهذا النشاط باستخدام آلة حاسبة-رسومية أيضاً.

ز. معادلات تربيعية (مساق دراسي بالجبر للسنة الأولى).

6 حدد كتابا منهجيا لرياضيات المدرسة الثانوية الذي يقع تاريخ طبعته قبل عام 1950 وادرج الأنواع المختلفة من الأنشطة الإثرائية المتضمنة في هذا الكتاب. كرر هذا النشاط مع كتاب يعود تاريخ طبعته بعد عام 1980. قارن بين الكتابين في ضوء طبيعة أنشطتهما الإثرائية. كيف تستطيع أن توضح الفروقات بين فلسفتي الإثراء في كل من هذين الكتابين.

7 اختر موضوعا مناسبا لطلبة المدارس الثانوية بموضوع الرياضيات والذي لم يدرج ضمن الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب. قم بتطوير نشاط إثرائي يرتكز إلى الموضوع الذي اخترته وفي صيغة تشابه عرض هذا الكتاب. ينبغي أن تستهدف هذه الوحدة مستمعين بمستوى موهوب.

8. اختر موضوعا مناسبا لطلبة المدارس الثانوية بموضوع الرياضيات، والذي لم يدرج ضمن الوحدات الإثرائية لموجودة في هذا الكتاب. قم بتطوير نشاط إثرائي يرتكز إلى الموضوع الذي اخترته، وفي صيغة تشابه عرض هذا الكتاب. ينبغي أن تستهدف هذه الوحدة مستمعين ذوي قدرات متوسطة.

9. اختر موضوعاً مناسباً لطلبة المدارس الثانوية بموضوع الرياضيات، والذي لم يدرج ضمن الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب. تم بتطوير نشاط إثرائي يرتكز إلى الموضوع الذي اخترته. وفي صيغة تشابه عرض هذا الكتاب. ينبغي أن تستهدف هذه الوحدة مستمعين ذوي قدرات متدنية.

Suggested References مراجع مقترحة

Babbage, Charles. On the Principles and Development of the Calculator. P. Morrison and E. Mossison. Eds. New York: Dover 1961.

Berggren, L., J. Borwein, and P. Borwein. Pi: A Source Book. New York: Springer 1997.

Billings, K., and D. Moursand. Problem Solving with Calculators. Salem. OR: Math Learning Center, University of Oregon, 1978.

Bitter, G. G., and J. K. Mikesell. Activities Handbook for Teaching with the Hand-Held Calculator. Boston: Allyn and Bacon, 1980.

Bolt, B. Mathematics Meets Technology. New York: Cambridge University Press, 1991.

Bramble, W. J., and E. Mason. Computers in Schools. McGraw-Hill, 1985.

Chin, W. G., R. A. Dean, and T. N. Tracewell. Arithmetic and Calculators. San Francisco: W. H. Freeman, 1978.

Chrystal, G. Algebra and Elementary Textbook, 2vols. New York: Chelsea, 1964.

Coburn, T. G. How to Teach Mathematics Using a Caculator. Reston, VA: NCTM, 1987.

Coburn, T. C., et al. Practical Guides to Computers in Education. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1982.

Collis, B. Computers. Curriculum, and Whole Class Instruction. Belmont. CA: Wadsworth, 1988.

Court, N. A. College Geometry. New York: Barnes & Noble, 1952.

Coxeter, H. S. M. Introduction to new Geometry. New York: Wiley, 1969.

Day, R. P. "Solution Revolution." Mathematics Teacher 86, no. 1 (January 1993): 15-22.

Devlin, Keith. All the Math That's Fit to Print. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1994.

Dolan, D., Ed. Mathematics Teacher Resource

Handbook: A Practical Guide for K-12 Mathematics Curriculum. Millwood, NY: Kraus International Publications, 1993.

Dudley, Underwood. A Budget of Trisections. New York: Springer, 1987.

Easterday, K. E., L. L. Henry, and F. M. Simpson. Activities for Junior High School and Middle School Mathematics. Reston, VA: NCTM, 1981.

Eastaway, R., and J. Wyndham. Why Do Buses Come in Three's? The Hidden Mathematics of Everyday Life. New York: John Wiley, 1998.

Elgarten, G., and A. S. Posamentier. Using Computer: Programming and Problem Solving. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1984.

Elgarten, G., A. S. Posamentier, and S. Moresh. Using Computers in Mathematics. 2d ed. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1986.

Farrel. M. A. Imaginative Ideas for the Teacher of Mathematics. Grades K-12. Reston, VA: NCTM, 1988.

Farrell, M. A., Ed Imaginative Ideas for the Teacher of Mathematics. Grades K-12. Ranucci's Reservoir, Restor. VA: NCTM, 1988.

Fleron, Julian F. Quotations for Every Mathematics Class Mathematics Teacher 91 (1998): 548-553.

Foletta. Gina M., and David B. Leep. "Isoperimetric Quadrilaterals: Mathematical Reasoning with Technology." Mathematics Teacher 93 (2000): 144-147.

French. Francis G. "The Divisibility of x^n-y^n by x-y: A Constructive Example." Mathematics Teacher 91 (1998): 342-345.

Gleick, James. Chaos, Making a New Science. Viking Press. 1987.

Glidden. Peter L. " Beyond the Golden Ratio: A Calculator-Based Investigation." Mathematics Teacher 94 (2001): 138-144.

Gorini, Catherine A., Ed. Geometry at Work: A Collection of Papers Showing Applications of Geometry. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Hall, H. S., and S. R. Knight. Higher Algebra. London: Macmillan, 1960.

Ippolito, Dennis. "The Mathematics of the Spirograph." Mathematics Teacher 92 (1999): 354-357.

Kastner. B. Space Mathematics: A Resource for Secondary School Teachers. Washington, Washington, DC: NASA, 1985.

Kenelly. J. W. The Use of Calculators in the Standardized Testing of Mathematics. New York: College Entrance Examination Board, 1989.

Kieren, J. E. "Computer Programming for the Mathematics Laboratory." Mathematics Teacher 66 (1973):9.

Klein M. F. "Mathematics as Current Events." Mathematics Teacher 86, no. 2 (February 1993).

Lockwood, E. H. A Book of Curves. London: Cambridge University Press, 1971.

Loomis, E. S. The Pythagorean Proposition. Reston, VA: NCTM, 1968.

Maor, Eh. " The Pocket Calculator as a Teaching Aid." Mathematics Teacher 69 (1976): 471.

Markowsky, George. " Misconceptions About the Golden Ratio "The College Mathematics Journal 23 (January, 1992) 2-19.

Martin, George E. Geometric Constructions. New York: Springer, 1998.

Mathematics Enrichment Program Grades 3-12. Richmond, VA: Department of Mathematics, 1986.

Mathematics Teacher 71 (May 1978). Special Issue: Computers and Calculators.

Mathematics Teacher 14(November 1981) Special Issue: Microcomputers.

Morgan Frank. The Math Chat Book. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Mottershead, L. A Source Book of Mathematical Discovery. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1977.

National Aeronautics and Space Administration. Space Mathematics. A Resource for Teachers. Washington, DC: NASA, 1972.

National Council of Teachers of Mathematics. Calculators: Readings from Arithmetic and Mathematics Teacher. Bruce C. Burt. Reston, VA: NCTM, 1979.

______. Enrichment Mathematics for the Grades. Twenty-seventh Yearbook, 1963.

______. Enrichment Mathematics for High School. Twenty-eighth Yearbook, 1963.

______. Topics in Mathematics for Elementary School Teachers. Twenty-ninth Yearbook, 1964.

______. Historical Topics for the Mathematics Classroom. Thirty-first Yearbook, 1969.

______. Geometry in the Mathematics Curriculum. Thirty-sixth Yearbook, 1973.

______. Applications in School Mathematics. 1979 Yearbook.

______. Problem Solving in School Mathematics.

1980 Yearbook.
______. Teaching Statistics and Probability. 1981 Yearbook.
______. Computers in Mathematics Education. 1984 Yearbook.
______. Secondary School Mathematics Curriculum. 1985 Yearbook.
______. Estimation and Mental Computation. 1986 Yearbook.
______. Learning and Teaching Geometry, K-12. 1989 Yearbook.
______. The Ideas of Algebra, K-12. 1988 Yearbook.
______. Calculators in Mathematics Education. 1992 Yearbook.
______. Connecting Mathematics Across the Curriculum. 1995 Yearbook.
______. Communication in Mathematics. K-12 and Beyond 1996 Yearbook.
______. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12. 1999 Yearbook.

Nord, G., D. Jabon, and John Nord. "The Mathematics of the Global Positioning System." Mathematics Teacher 90(1997): 455-460.

Olson, Alton Mathematics Through Paper Folding. Reston, VA: NCTM, 1975.

Paulos, John Allen. A Mathematician Reads the Newspaper New York Basic Books, 1995.

Peterson, Ivars. The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics. New York: W. H. Freeman 1988.

Posamentier, A. S. Advanced Euclidian Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students. Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

Posamentier A. S. Making Algebra Come Alive. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Posamentier A. S. Making Geometry Come Alive. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Posamentier A. S. Making Pre-Algebra Come Alive. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Posamentier A. S., and H. Hauptman. 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics: A Resource for Secondary School Teachers. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

Posamentier, A.S., and Noam Gordon. "An Astounding Revelation on the History of π." Mathematics Teacher 77(1984): 52.

Posamentier, A. S., and S. Krulik. Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1998.

Posamentier, A. S., and W. Schulz. The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.

Posamentier, A. S., and W. Wernick. Advanced Geometric Constructions. Menlo Park, CA: Dale Seymour Publications, 1988.

Row, T. Sundara. Geometric Exercises in Paper Folding. New York: Dover, 1966.

Runion, G. E. The Golden Section and Related Curiosa. Glenview, IL: Scott Foresman, 1972.

Salem, L., F. Testard, and C. Salem. The Most Beautiful Mathematical Formulas. New York: Wiley, 1992.

Schaaf, W. L. A Bibliography of Recreational Mathematics, Vols. 1-4. Washington, DC: [National Council of Teachers of Mathematics], 1970, 1973, 1978.

Schimmel, Judith. "A New Spin on Volumes of Solid of Revolution" Mathematics Teacher 90 (1997): 715-717.

Sloyer, C. Fan-Tas-Tiks of Mathematics. Providence, RI: Janson Publications, 1986.

Sobel, M. A., and E. M. Malelsky. Teaching Mathematics: A Source Book of Aids, Activities and Strategies, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1988.

Suydam, M. N. Using Calculators in Pre-College Ed : Third State-of-Art Review. Columbus, OH: Calculator Information Center, 1980.

Troputman, A. P., and J. A. White. The Micro Goes to School. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1988.

Turner, S., and M. Land. Tools for Schools. Belmont, CA: Wadsworth, 1988.

Williams, D. E. "One Point of View: Remember the Calculator?" Arithmetic Teacher 30 (March 1983): 4.

Wool, Peter Y "Straightedge Constructions, Given a Parabola," The College Mathematics Journal 31 (2000): 362-372.

Worth, J. "Let's Bring Calculators Out of the Closet." Elements: A Journal for Elementary Educators 17 (1985): 18-21.

بيبلوغرافيا لتاريخ الرياضيات

Bibliography for the History of Mathematics

Aaobe, Asger. Episodes from the Early History of Mathematics. New York: Random House, 1964.

Babbage, Charles, On the Principles and

Development of the Calculator. P. Morrison and E. Morrison, Eds. New York: Dover 1961.

Ball, W. W. Rouse, A short Account of the History of Mathematics. 4th ed. New York: Dover, 1960.

Bekmann, Petr. A History of Pi. New York: St. Martin's Press, 1971.

Bell. Eric Temple. Men of Mathematics, 6th paperback ed. New York: Simon & Schuster, 1937.

Bell. Eric Temple. Mathematics: Queen and Servant of Science. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1987.

Boyer, Carl B. The History of the Calculus and Its Conceptual Development New York: Dover, 1959.

Boyer. Carl B. A History of Mathematics. New York: Wiley, 1968.

Bunt Lucas N. H., Philip S. Jones, and Jack D. Bedient. The Historical Roots of Elementary Mathematics. Englewood Cllifs, NJ: Prentice Hall, 1976.

Burton, David M. The History of Mathematics, An Introduction. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1985.

Cajori. Florian. A History of Mathematical Notations. 2 vols. LaSalle. IL: Open Court, 1928.

Cajori. Florian. A History of Mathematics. New York: Chelsea. 1985.

Campbell. Douglas M., and John C. Higgins, Eds. Mathematics People, Problems, Results. 3 vols. Belmont, CA: Wadsworth, 1984.

Cardano. Girolamo. Ars Magna. Or the Rules of Algebra. Translated by I. R. Witmer. New York: Dover, 1993.

Eves. Howard W. In Mathematical Circles. 2 vols. Boston, MA Prindle, Weber. Schmidt, 1969.

Eves. Howard W. Mathematical Circles Revisited. Boston, MA: Prindle, Weber, Schmidt, 1971.

Eves, Howard W. Great Moments in Mathematics Before 1650. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1980.

Eves, Howard W. Great Moments in Mathematics After 1650. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1981.

Eves, Howard W. An Introduction to the History of Mathematics. 5th ed. New York: W. B Saunders College Publishing, 1983.

Fauvel, J., and J. Gray, Eds. A History of Mathematics: A Reader. Milton Keynes, UK: Open University, 1987.

Gittleman, Arthur. History of Mathematics. Columbus, OH: Charles E. Merrill, 1975.

Gray, Shirley B., and C. Edward Sandifer. "The Sumario Compendioso: The New World's First Mathematics Book." Mathematics Teacher 94 (2001): 98-103.

Heath, Thomas. History of Greek Mathematics. 2 vols. New York: Dover, 1981.

Herz-Fischler, Roger. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover, 1998.

Hoffmann, Joseph E. The History of Mathematics to 1800. Totowa, NJ: Littlefield, Adams & Co., 1967.

Kaplan, Robert. The Nothing That Is: A Natural History of Zero. New York: Oxford University Press, 1999.

Karpinski, Louis C. The History of Arithmetic. New York: Rand McNally, 1925.

Kelley, Loretta "A Mathematical History Tour" Mathematics Teacher 93 (2000): 14-17.

Martzloff, Jean-Claude. A History of Chinese Mathematics. New York: Springer, 1997.

Mathematics Teacher 98 (November 2000) entire issue.

National Council of Teachers of Mathematics, Historical Topics for the Mathematical Classroom. Thirty-first Yearbook, Reston, VA: NCTM, 1969.

Newman, James Roy, Ed. The World of Mathematics. 4 vols. New York: Simon & Schuster, 1956; paperback, 1962.

Posamentier, A. S., and Noam Gordon. "An Astounding Revelation on the History of π." Mathematics Teacher 77 (1984): 52.

Perl. Teri. Math Equals: Biographies of Women Mathematicians and Related Activities. Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1978.

Sanford, Vera. A Short History of Mathematics. Boston: Houghton Mifflin, 1958.

Smith, David E. History of Mathematics. 2 vols. New York: Dover, 1953.

Struik, Dirk J. A Concise History of Mathematics, 3rd ed. New York: Dover, 1967.

Turnbull, Herbert W. The Great Mathematicians. New York: New York University Press, 1961.

Van der Waerden, B. L. Science Awakening. New York: Wiley, 1963.

مكتبة الرياضيات الجديدة

New Mathematics Library

Mathematical Association of America, New Mathematics Library. On topics designed to enrich the mathematics curriculum. These can be ordered from the Mathematical Association of America, 1529 Eighteenth

Street, N W., Washington, DC 20036 A list of the first 40 titles follows:

1. Numbers Rational and Irrational by Ivan Niven.
2. What Is Calculus About? By W. W. Sawyer.
3. An Introduction to Inequalities by E. F. Beckenbach and R Bellman
4. Geometric Inequalities by N. D. Kazarinoff.
5. The Contest Problem Book I. Annual High School Mathematics Examinations 1950-1960. Compiled and with solutions by Charles T Salkind.
6. The Lore of Large Numbers by P. J. Davis.
7. Uses of Infinity by Leo Zippin.
8. Geometric Transformations I by I. M. Yaglom, translated by A. Shields.
9. Continued Fractions by Carl D Olds.
10. Graphics and Their Uses by Oystein Ore.
11. Hungarian Problem Books I and II Based on the Eotvos.
12. Competitions 1894-1905 and 1906-1928, translated by E Rapaport.
13. Episodes from the Early History of Mathematics by A. Aboe.
14. Groups and Their Graphs by I. Grossman and W. Magnus.
15. The Mathematics of Choice by Ivan Niven.
16. From Pythagotas to Elnslein by K. O. Friendnehs.
17. The Contest Problems Book II Annual High School Mathematics Examinations 1961-1965. Compiled and with solutions by Charles T Salkind.
18. First Concepts of Topology by W. G. Chinn and N. E. Steentod.
19. Geometry Revisited by H. S. M. Caxeter and S. L. Greitzer.
20. Invitation to Number Theory by Oystein Ore.
21. Geometric Transformations II by I. M. Yaglom, translated by A. Shields.
22. Elementary. Cryptanalysis: A Mathematical Approach by A Sinkov.
23. Ingenuity in Mathematics by Ross Honsberger.
24. Geometric Transformations III by I. M. Yaglom, translated by A. Schenitzer.
25. The Contest Problem Book III.Annual High School Mathematics Examinations 1966-1972. Compiled and with solution by C T. Salkind and J M. Earl.
26. Mathematical Methods in Science by George Polya
27. International Mathematical Olympiads 1959-1977. Compiled and with solutions by S L Greitzer.
28. The Mathematics of Games and Gambling by Edward W Packel
29. The Contest Problem Book IV Annual High School Mathematics Examinations 1973-1982. Compiled and with solutions by R A Artino, A. M. Gaglione, and N. Shell
30. The Role of Mathematics in Science by M M Schiffer and L. Bowden
31. International Mathematical Olympiads 1979-1985. Compiled and with solutions by Murray S. Klamkin
32. Riddles of the Sphinx by Martin Gardner
33. USA Math Olympiads 1972-1986 by Murray S. Klamkin.
34. Graphs and Their Uses by Oystein Ore
35. Exploring Math with your Computer by Arthur Engel.
36. Game Theory and Strategy by Philip Straffin
37. Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry by Ross Honsberger
38. The Contest Problem Book V. American High School Mathematics Examinations and American Invitational Mathematics Examinations 1983-1988. Compiled and augmented by George Berzsenyi and Stephen B Maurer.
39. Over and Over Again by Gengzhe Chang and Thomas W. Sederberg
40. The Contest Problem Book VI. American High School Mathematics Examinations 1989-1994. Compiled and augmented by Leo J. Schneider.
41. The Geometry of Numbers by C. D Olds Anneli lax. And Giuliana Davidoff
42. Hungarian Problem Book III Based on the Eotvos Competitions 1929 1943 translated by Andy Lin.

Other Titles In Preparation.

There Are Many Additional Ideas In The Enrichment Units In The Second Part Of This Book.



أنشطة لا منهجية في الرياضيات

Extracurricular Activities in Mathematics

إن ازدحام المنهج الدراسي لمادة الرياضيات في كل مرحلة من مراحل المدرسة الثانوية، يجعل مهمة الاستطرادات المكثفة من النمو المتعاقب لمساق الرياضيات الدراسي أمرا بالغ الصعوبة ومع ذلك. هناك فوائد جمة يمكن نوالها عند اعتبار مادة الرياضيات خارج حدود المنهج الدراسي الثابتة من اجل هذا ينبغي على المعلمين التنقيب عن طرق لتزويد الطلبة بمواد إضافية على منهج الرياضيات. إن كثيرا من الأنشطة الإضافية على منهج الرياضيات المعتاد يمكن إجراؤها خلال أنشطة نادي الرياضيات Mathematics Club بالإضافة إلى غرفة التعليم المعتادة

نادي الرياضيات The Mathematics Club

رغم أن بنية نادي الرياضيات تسهم في تسهيل مجموعة من الأنشطة التي ستناقش خلال هذا الفصل، بيد انه ليس من الضروري إقامة ناد لغرض إجراء هذه الأنشطة. إن إنشاء ناد للرياضيات يتطلب تخطيطا جوهريا، يبتدئ من اختيار المشاركين (الذين يتألفون من أعضاء هيئة التدريس، وطلبة أعضاء) وينتهي بتحديد المنظمة وأهدافها. ويمكن أن تغرس النبتة الأولى لنادي الرياضيات على يدي مدير المدرسة أو أحد المعلمين ممن يهتمون بهذا الأمر، إضافة إلى مساهمة مجموعة من الطلبة الذين يميلون إلى المشاركة الفاعلة في النادي.

وأيا كان مصدر اللبنة الأولى لنادي الرياضيات، فإن المعلم الذي سيقع عليه الاختيار بوصفه راعيا لإدارة النادي، يتحتم عليه إدراك طبيعة الحاجة إلى تخصيص فترة زمنية مناسبة، وبذل جهد استثنائي لضمان نجاح هذه المهمة.

تتيح أنشطة النادي لراعي إدارة النادي فرصة مناسبة للنمو والتطور رياضيا وخبراتيا، لأن نادي الرياضيات يسمح باستكشاف غير محدود للموضوعات الرياضية وتطبيقاتها خارج نطاق المنهج الدراسي للمدارس الثانوية. وسيشعر جميع المشاركين في أنشطته المتنوعة بإحساس مفعم بالإنجاز، والذي سينشأ عن تقدير حقيقي لمادة الرياضيات، وتطبيقاتها، ولطبيعة الدور الذي تلعبه في المجتمع.

إنشاء ناد رياضي
Establishing a Mathematics Club

بعد وقوع الاختيار على راعي النادي ومدير أنشطته، ينبغي أن يخطو الخطوة الأولى نحو تعويد نفسه وإقامة جسور الألفة مع المهمة الجديدة عن طريق مناقشة مسألة بداية العمل مع زملائه. والمدراء، واختيار مجموعة من الطلبة الذين يمتلكون ميولا رياضية. وسيكون من المفيد جدا التنقيب عن راعي إدارة نادي في مدرسة أخرى، والذي قد مر بخبرات وتجارب مماثلة. إن الاقتراحات التي تستند إلى الخبرات والمواد المستقاة من المصدر الأول، والتي برهنت على نجاحها، ستكون مفيدة لراعي إدارة نادي الرياضيات-الجديد، وبدونها سيعاني من ازدحام الأفكار والآراء بصدد العمل الذي ينتظره (انظر المراجع المدرجة في نهاية هذا الفصل).

وبعد تلقي النصيحة والاقتراحات من الزملاء داخل المدرسة وخارجها، والحصول على الدعم من الإدارة ومجموعة الطلبة المهتمين بالرياضيات، ينبغي على المعلم أن يمسك بزمام واجب الاستقطاب. كما يجب استخدام جميع مسالك الاتصالات المتاحة مع الطلبة على طريق ضمان تحقيق الأهداف المحددة.

ينبغي أن تتضمن الإعلانات الأولية، الإبلاغ من خلال نظام المخاطبة الشعبية، والبريد السريع-المرسل إلى جميع قطاعات الغرفة المخصصة لأداء الواجبات داخل المدرسة Homeroom، والتغطية الإعلامية التي تخصصها جريدة الطلبة بحيث تغطي جميعا معظم جوانب النادي.

إن الجزء الأكثر أهمية من عملية الاستقطاب يرتكز إلى الاتصال المباشر مع صفوف الرياضيات التي تحوي على أعضاء محتملين بالنادي، ويجري هذا الاتصال بواسطة معلم الصف، أو راعي إدارة النادي مباشرة. كما ينبغي أن يخطط المنهج بعناية بالغة بحيث يكون العرض التصميمي الخاص بالنادي، والذي تم توجيهه إلى هذه الصفوف، مليئا بعنصر الإثارة والتشويق.

تتضمن عملية الحث على الالتحاق بالنادي، دعوة مجموعة من الطلبة المؤهلين للانتخاب والجديرين به إلى اجتماع تنظيمي. وسيكون موضوع تخطيط الاجتماع الأول، وحسن اختيار جدولة أعماله وتوقيتاته أمرا بالغ الأهمية.

في البداية ينبغي أن يرحب بما يقدمه الطلبة، إضافة إلى ذلك يقوم راعي إدارة النادي بعرض الخطط التي أعدت بالتشاور مع إدارة المدرسة، وزملائه من المعلمين، والتي تفاعلت معها مجموعة الطلبة بصورة إيجابية.

ورغم ضرورة كون الخطة المعدة مرنة، ومفتوحة أمام اقتراحات الطلبة، فإن صيغة الأمر فيها ستكون واحدة. إن قدوم استشاري إدارة النادي إلى الاجتماع الأول، ودون التهيؤ مسبقا بإعداد خطة واضحة المعالم، سيرفع إصبع الاتهام باتجاه المشورة التي سيقدمها للنادي وأعضائه. ويمكن استثمار الاجتماع الأول لاختيار موظفي النادي، والذين سيكونون من لجنة التسيير. ستعمد هذه اللجنة، ، وبالتعاون مع راعي إدارة النادي، إلى إقرار توقيتات الاجتماعات والبعد الزمني لفترات انعقادها، ومؤهلات العضوية، وأمور أكثر أهمية والتي تخص الأنشطة التي سينهض بأعبائها النادي.

سوف يعرض ببقية هذا الفصل أنشطة لا منهجية في الرياضيات، والتي يمكن توظيفها داخل دائرة أنشطة النادي. ومع ذلك، تستطيع المدرسة أن تزود الطلبة باي نوع من الأنشطة الإضافية خارج نطاق نادي الرياضيات.

فرق الرياضيات Mathematics Teams

تمتلك كثير من المقاطعات روابط غير رسمية نظمت لأغراض التنافس القائم بين المدارس الثانوية-المحلية. إن هذه المنافسات

تنظم، غالبا، على ثلاثة مستويات: طلبة المدارس المتوسطة/الثانوية الدنيا والعليا ، أي في الصفوف: التاسع، والعاشر، والحادي عشر، والطلبة في المدارس الثانوية العليا. ويتم اختيار أسئلة المنافسة لكل مرحلة بحيث تكون متناسبة مع إطار معرفة الطالب بمادة الرياضيات. وقد تنظم بعض الروابط الرياضية بحيث تتنافس المدارس مع بعضها الآخر وفق أسس دورية، وتخصص مكافأة للفريق الذي يحصد أعلى مجموع علامات (على سبيل المثال، عدد المسائل المحلولة بصورة صحيحة) في نهاية السنة الدراسية (أو الفصل).

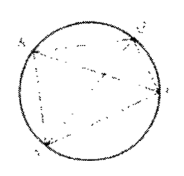
ويمكن الحصول على روابط الرياضيات في منطقتك الجغرافية من خلال المنظمات المبنية المحلية والكليات.

من المرجح أن يتضمن فريق الرياضيات المدرسي طلبة أعضاء من نادي الرياضيات، ولكن ينبغي أن لا يقتصر الاختيار والمساهمة على الطلبة الأعضاء بالنادي فحسب. ومن المحتمل أن يوجد طلبة موهوبين في المدرسة، والذي لم تتوفر لديهم فرصة للالتحاق بنادي الرياضيات بسبب التزاماتهم الأخرى، لكنهم سيكونون قادرين على المشاركين ضمن فريق الرياضيات في وقت آخر. بالإضافة إلى الحصول على توصيات المعلم، ينبغي على مدرب فريق الرياضيات إعداد امتحان الدخول لجميع المناصب المحتملة للمرشحين في فريق الرياضيات. كما يجب أن يغطي مثل هذا الامتحان اكبر مساحة ممكنة من الموضوعات، باستخدام أنواع الأسئلة التي ترد بكثرة في لقاء فريق الرياضيات. يضاف إلى ذلك، ضرورة تضمن الامتحان على فقرات يعرض خلالها موضوع (أو مفهوم) جديد بصورة بليغة ومحكمة، ثم يطرح سؤال يتعلق بهذا الموضوع. إن مثل هذا النوع من الامتحان لطلبة الهندسة، سيتضمن تقديم نظرية بطليموس، ثم طرح سؤال يتطلب الرجوع إليها لضمان حله بصورة صحيحة.

مثال EXAMPLE:

نظرية بطليموس Ptolemy's Theorem

في الشكل رباعي الأضلاع المرسوم داخل دائرة، فإن حاصل ضرب أطوال أقطارها يساوي مجموع حاصل ضرب أضلاعها المتقابلة.



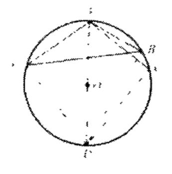
بالنسبة لأضلاع رباعي الأضلاع PQRS المرسومة داخل الدائرة، فإن نظرية بطليموس تنص على ما يلي:

$$(RP)(SQ) = (PQ)(RS) + (PS)(RQ)$$

استخدم نظرية بطليموس لإيجاد طول الضلع $\overline{BC}$ بالمثلث ABC، المرسوم داخل الدائرة طول نصف قطرها 5. إن أطوال $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ هي 5، و 6 على التوالي.

إن طالباً بمستوى يزيد بقليل عن الحد المتوسط سيحل هذه المسألة بصورة صحيحة بإحدى الإجابتين: $3\sqrt{3}-4$ أو $3\sqrt{3}+4$. أما الطالب الموهوب بحق، فسوف يدرك وجود "حلين" لهذه المسألة، سواء كانت $\angle A$ حادة أو منفرجة. ويظهر أدناه أنموذج للحل.

الحل SOLUTION



نلاحظ وجود احتمالين للاعتبار في هذه المسألة. فكل من المثلثين ABC، 'ABC قد مسا الدائرة O من الداخل، وكانت AB=5، AC=AC'=6. ويجب علينا أن نجد قيمة BC و 'BC. ارسم قطر الدائرة $\overline{AOD}$، وقياسه 10، وارسم قطع المستقيمات $\overline{DC}$، $\overline{DB}$، $\overline{DC'}$.

$$m\angle AC'D=m\angle ACD=m\angle ABD=90^\circ$$

تأمل الحالة التي تكون $\angle A$ في ΔABC زاوية حادة. في المثلث قائم الزاوية ACD، DC=8، وفي المثلث قائم الزاوية ABD، $BD=5\sqrt{3}$. بتطبيق نظرية بطليموس على الشكل رباعي الأضلاع ABCD.

$$(AC)(BD) = (AB)(DC) + (AD)(BC)$$

أو

$$(6)(5\sqrt{3}) = (5)(8) + (10)(BC)$$

لذا.

$$BC = 3\sqrt{3} - 4$$

والآن تأمل الحالة التي تكون فيها $\angle A$ منفرجة، كما في المثلث 'ABC. في المثلث قائم الزاوية AC'D، DC'=8. وبتطبيق نظرية بطليموس على الشكل رباعي الأضلاع 'ABDC.

$$(AC')(BD) + (AB)(DC') = (AD)(BC')$$

$$(6)(5\sqrt{3}) + (5)(8) = (10)(BC')$$

$$BC' = 3\sqrt{3} + 4$$

إضافة إلى اختبار قدرة الطالب على استخدام الحقائق التي تعلمها جديدا، فإن طبيعة السؤال السابق ستتيح للطالب (ذو القدرة الجيدة) بأن يكون أكثر تألقا، وسيكتشف الطالب الغموض الموجود في السؤال المطروح فيعمد إلى تقديم حل متكامل له. إن كل سؤال حول اختبار الدخول هذا، سيقدم دالة تم تعريفها بوضوح.

ومتى وقع الاختيار على أعضاء فريق الرياضيات، ينبغي أن يحدد وقت كاف لتدريبهم. غالبا ما يلتقي أعضاء فرق الرياضيات قبل بدء اليوم الدراسي، خلال ساعة وجبة الغذاء (حيث يستطيع الطلبة تناول وجبة الغذاء خلال العمل على أنشطة الرياضيات المختلفة)، وخلال يوم المدرسة النظامي، أو بعد الحصة الأخيرة من النهار. وفي بعض الحالات، قد يلتقي أعضاء فريق الرياضيات بطريقة تشابه اجتماع الطلبة في الصف. لقد وقع اختيار بعض المدارس على فتح الطلبة وحدات تقدير خاصة لمساق دراسي حول موضوع حل المسائل، وموضوعات خاصة بالرياضيات والتي لا تعد جزءا من المنهج الدراسي في المدارس الثانوية . إن مساقاً دراسيا من مثل هذا النوع سيفيد في تدريب أعضاء فريق الرياضيات، بالإضافة إلى إمكانية استخدامهم للمواد المدرجة في نهاية هذا الفصل. وسيكون مدرب الفريق على جانب من الحكمة عند محاولته الحصول على الأسئلة التي وردت في اجتماعات سابقة لفريق الرياضيات . ان معرفة طبيعة الأسئلة السابقة، والموضوعات التي استأثرت بمعالجتها سيمنح للطلبة فكرة واضحة عما يتوقع طرحه من أسئلة في اللقاءات القادمة، وكيفية الإعداد لها بصورة سليمة.

يعد الكتاب الكلاسيكي لجورج بوليا George Polya والذي يحمل عنوان: "البحث عن الحل"

How To Solve It (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945, 1973)

مصدرا أوليا خصبا لمدرب فريق الرياضيات يستطيع استخدامه في التحضير لتدريب فريق الرياضيات بميدان مهارات حل المسائل.

توفر جلسات تدريب فريق الرياضيات فرصة ممتازة لعرض الموضوعات التي لا يتم تعلمها بالمدارس الثانوية في الحالات الاعتيادية، وتمتاز بأهمية بالغة عند حل المسائل النموذجية التي تجابه أعضاء فريق الرياضيات في اللقاءات التي تنعقد بين حين وآخر. وهناك مصدر مفيد آخر في هذا المضمار هو:

A.Posamentier and S. Krulik's ,Problem Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions (Thousand Oaks, CA: Corwin, 1998).

إن القائمة الآتية تقترح بعض الموضوعات التي يمكن أن تكون نافعة لفريق الرياضيات:

- معادلات دايوفانتين Diophantine Equations
- المتوسطات الحسابية، والهندسية، والمتناسقة.
- تطبيقات رياضية- جبرية معدلة.
- اختبارات حول قابليات القسمة.
- نظريات هندسية لكل من: سيفا، ومينلاوس، وبطليموس، وستيوارت، وهيرون، واخرين.
- تقانات في حل المسائل.
- علاقات جبرية متنوعة.
- موضوعات في نظرية العدد.
- المتواليات والتسلسلات.
- الاحتمالات.
- المتباينات Inequalities.
- منظومات من المعادلات.
- موضوعات من نظرية المعادلات.
- مسائل النهايات الصغرى والعظمى في الهندسة والجبر.

وكنتيجة لمناقشة هذه الموضوعات، وموضوعات رياضية أخرى مناسبة، سيقوم كل طالب بتدوين حقائق وعلاقات، بصورة منفصلة، ويبقيها جاهزة بين يديه كمرجع. إن مجموعة الطالب من الحقائق والعلاقات يمكن أن تتضمن تلك التي أدرجت في نهاية هذا الفصل.

يتطلب تدريب الفريق تعهدا تاما من راعي إدارة الفريق، فبالإضافة إلى التحضير الدائم وجمع أسئلة الفريق المطروحة سابقا (وموضوعات أخرى ذات صلة بالأمر)، ينبغي أن يكون راعي إدارة الفريق جاهزا على الدوام لحضور لقاءات فريق الرياضيات التي تقع خارج العمل اليومي بالمدرسة، فقد تظهر

الحاجة، بين حين وآخر، إلى سفره مع الفريق إلى مدارس أخرى. إن عمل مدرب الفريق بحاجة إلى مزيد من التكريس والإتقان والإخلاص، لكن المكافأة التي ستثمر عن بذل هذه الجهود، ستكون مرضية ومتوازنة مع ما بذل من اجل الارتقاء بإنجازات الفريق.

مباريات الرياضيات Mathematics Contests

تترافق إدارة المباريات المختلفة على النطاق الوطني، ونطاق الولاية، والنطاق المحلي مع أنشطة فريق الرياضيات إلى حد بعيد. وتتضمن هذه المباريات امتحان الرياضيات للمدارس الثانوية الأمريكية American High School Mathematics Examination (AHSME)، وامتحان الرياضيات للمدارس العليا الأمريكية American Junior High School Mathematics Examination، والتي ترعى جانبا كبيرا منها الجمعية الرياضية في أمريكا Mathematical Association of America وتكون مفتوحة، غالبا، لجميع الطلبة (ولا تقتصر على الطلبة المنتمين لفريق الرياضيات).

من الضروري وجود دعاية وإعلانات شاملة داخل المدرسة لجذب اكبر مجموعة ممكنة من الطلبة للمشاركة في المباريات. ويستطيع الطلبة (الذين لا يقعون ضمن افضل عشرة تلاميذ وأعمقهم دراية بالرياضيات في المدرسة) المشاركة في المباريات لأسباب استمتاعية بحتة.

وتقع جملة من الأسئلة الخاصة بمباريات الرياضيات هذه، في متناول طلبة الرياضيات المتوسطين (انظر عينة المسائل في الصفحات القادمة). تحتوي هذه المباريات، أيضا، على أسئلة تتميز بروح التحدي والمنافسة، تسهم في انتقاء الطلبة المتفوقين والموهوبين وغالباً، ما تمنح جوائز ومكافآت على مستوى المدارس، إضافة إلى الجوائز المحلية، وأخرى على مستوى الولاية، وفي بعض الأحيان جوائز ومكافآت على المستوى الوطني.

توفر المباريات الرياضية، متعة وإثراءً مناسباً لمجموعة كبيرة من طلبة المدرسة. ويمكن لهذه المنافع والفوائد أن تزداد وتتعمق عندما يراجع مدرب فريق الرياضيات مسائل المباريات ومشكلاتها مع الطلبة الذين لم يشاركوا فيها، بعد انتهاء فترة المباريات. وقد تتجاوز، في بعض الأوقات، مباريات الرياضيات حدود حالة الاختبار. إن مثالا ملموسا على هذا الأمر هو اتحاد رياضيات المقاطعات الأمريكية American Regions Mathematics League (ARML) والذي يتضمن مؤتمرا سنويا تلتقي فيه فرق تعدادها كل منها خمسة عشر طالبا، تمثل الفائزين في منافسات المدن المختلفة، والمقاطعات، والولايات لغرض سماع محاضرات حول علم الرياضيات، والتنافس فيما بينهم ضمن اختبارات ومباريات أخرى، والتعايش سوية في بيئة اجتماعية توثق الصلات فيما بينهم.

يستمر الاتحاد بالنمو، ليمثل الولايات من معظم بقاع الولايات المتحدة. وتستخدم مراكز محلية لإدارة الأمور التي تتعلق بهذه المؤتمرات السنوية.

بصورة عامة، تذهب مباريات رياضيات المدارس العليا إلى مدى ابعد، باتجاه تحفيز وإثارة الاهتمام بالرياضيات على عموم قطاعات المدرسة ومراحلها. ويعد المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات NCTM، بالإضافة إلى منظمات معلمي الرياضيات المحلية مورداً خصبة للمعلومات عن روابط الرياضيات، أو طبيعة مباريات الرياضيات المتاحة لطلبتك.

مشاريع الرياضيات Mathematics Projects

تأمل تحديد ورقة بحث المساق الدراسي أو إنجاز مشروع المساق الدراسي في درس الرياضيات الذي تنهض بأعباء تعليمه. لقد برهن هذا النشاط على نجاحه الملموس مع مجاميع بمستويات مختلفة من القدرات والقابليات. فقد يأخذ مشروع الرياضيات قالب مشروع إنشائي مثل خياطة المنحني Curve Stitching، أوإنشاء معدات وأدوات خاصة، أو إنشاء سلسلة من حلقات أو قضبان. وفي بعض الأحيان تتضمن ورقة بحث المساق الدراسي استكشافا أصيلا في بضعة موضوعات بالرياضيات، أو إعداد تقرير حول تجربة أجراها الطالب، وقد تكون ورقة البحث محاولة لمعالجة لبعض موضوعات الرياضيات – غير المألوفة (وهذه هي الحالة المثلى عندما تكون حدود المعالجة واضحة ومحددة)، أو قد تفرض مناقشة لموضوع من تاريخ الرياضيات (على سبيل المثال، تتضمن النمو التاريخي مفهوم ما أو مسألة رياضية محددة).

ينبغي أن تترك للطالب فرصة اختيار الموضوع مشروع الرياضيات الذي يتناسب مع اهتماماته، على أن يسهم المعلم في إبداء التسهيلات اللازمة لإثارة وتحفيز الاهتمام لدى الطالب بموضوعات متعددة. وبعد اختيار الموضوع، يجب على الطالب أن يجمع كل ما يستطيع قراءته أو التنقيب عنه حول جل ما يتوفر من معلومات عن الموضوع قيد الدراسة. إن الاحتفاظ بملاحظات وتعليقات دقيقة خلال فترة الدراسة والتنقيب ستكون ضرورية لضمان تحقيق مشروع ناجح. وستسهم المؤتمرات الدورية مع المعلم في ضمان استمرار الطالب بالسير

على المسار الصحيح ودون الانحراف عن غاياته. إن الملاحظات الذي اعتني بجمعها خلال الجلسات المنعقدة، مع الملاحظات والتعليقات الشاملة والدقيقة التي استحصلت في مرحلة القراءة ستجعل من عملية كتابة التقرير أمرا سهلا.

وندرج أدناه قائمة ببعض الموضوعات المكنة لاستخدامات الطالب في مضمار مقالة المساق الدراسي (أو المشروع). إن هذه القائمة قد قصد بها توفير دليل يستأنس به لتوليد موضوعات إضافية. فقط.

موضوعات لمشاريع الرياضيات

Topic for Mathematics Projects

هندسة اقليدس المتقدمة	Advanced Euclidean Geometry
مغالطات جبرية	Algebric Fallacies
نماذج جبرية	Algebric Models
استجمامات جبرية	Algebric Recreations
حاسوب تناظري	Analog Computer
نظم وخوارزميات الإعداد القديمة	Ancient Number Systems and Algorithms
مغالطات حسابية	Arithmetic Fallacies
استجمامات حسابية	Arithmetic Recreations
أسس غير عشرية	Bases Other Than Ten
حاسوب ثنائي	Binary Computer
الجبر البولي	Boolean Algebra
نقاط بروكارد	Brocard Points
احتساب المختصرات	Calculating Shortcuts
نظرية كافاليري	Cavalieri's Theorem
ضبط العمليات الرياضية	Checking Arithmetic Operations
المقاطع المخروطية	Conic Sections
الكسور المستمرة	Continued Fractions
التشفير	Cryptography
علم البلورات	Crystallography
منحنيات باتساع محدد	Curves of Constant Breadth
مساقط اسطوانية	Cylindrical Projections
نظرية ديسارجو	Desargue's Theorem
المحددات	Determinants
معادلات دايوفانتين	Diophantine Equations
قابلية قسمة الاعداد	Divisibility of Numbers
الازدواجية	Duality
التماثل الديناميكي	Dynamic Symmetry
تطبيقات نظرية الأعداد البسيطة	Elementary Number Theory Application
خط ايلر	Euler line
توسيع صياغة ايلر للأبعاد النونية.	Extension of Euler's Formula to N Dimension
توسيع نظرية بابوس	Extension of Pappus's Theorem
نظرية فيرمات الأخيرة	Fermat's Last Theorem
أعداد فايبوناشي	Fibonancci Numbers
الحقول	Fields
الفروق المحدودة	Finite Differences
الهندسة المتناهية (المحدودة)	Finite Geometry
متعدد السطوح – المنتظمة الخمسة	The Five Regular Polyhydra
الأشكال المنثنية	Flexagons
مسألة الألوان الأربعة	The Four - color Problem
البعد الرابع	The Fourth Dimension
أشكال هندسية ومنحنيات	Fractals
نظرية اللعبة (المباراة)	Game Theory
أوليات كاوس	Gaussian Primes
جيودوسيات	Geodesics
تحليلات هندسية	Geometric Dissedion-Tangrams
مغالطات هندسية	Geometric Fallacies
نماذج هندسية	Geometric Models
أشكال هندسية مجسمة	Geometric Setereognams
تحويلات هندسية	Geometric Transformations
هندسة الفقاعات وغشاء السائل	Geometry of Bubbles and Liquid Film
هندسة السلسلة	Geometry of Catenary
إنشاءات هندسية (اقليدس)	Geometry Constructions (Euclid)
مسألة جيرجوني	Gergonne's Problem
الوصف الرسومي للجذور العقدية في المعادلات التربيعية والتكعيبية	Complex roots of Quadratic and Cubic Equation
الزمر	Groups
الجبر العالي	Higher Algebra
منحنيات الرتبة العليا	High Order Curves
دوال القطع الزائد	Hyperbolic Functions
مجسم القطع المكافئ	The Hyperbolic Paraboloid
الأعداد فائقة التعقيد	Hypercomplex Numbers
الاستجمامات الهندسية البديهية	Intuitive Geometric Recreation
استكشاف السطح الدويري	Investigation the Cycloid
قانون النمو	The Low of Growth
البرمجة لخطية	Liner Programming
الارتباطات	Linkages
أشكال ليزاوس	Lissajou's Figure
هندسة لوباتشيفسكي	Lobachevskian Geometry
لوغاريتمات الأعداد السالبة والعقدية (المركبة)	Logarithms of Negative and Complex Number

المنطق	Logic
إنشاء المربع السحري	Magic Sequare Construction
مساقط الخريطة	Map Projection
إنشاءات ما شيروني	Mascheroni's Constructions
الرياضيات والفن	Mathematics and Art
الرياضيات والموسيقى	Mathematics and Music
رياضيات التأمين على الحياة	Mathematics of Life Insurance
المصفوفات	Matrices
النهايات الدنيا والقصوى في الهندسة	Maximum-Minimum Geometry
المتوسطات	Means
طرق المربعات الاصغر	Method of Least Squares
النظام المتري	Metric System
السطوح الادنى	Minimal Surface
المعامل الحسابي في الجبر	Modulo Arithmetic in Algebra
طريقة مونت كارلو في تقريب الاعداد	Monte Carlo Method of Number Approximation
نظرية متعدد الحدود	Multinomial Theorem
قضبان نابيير	Napier's Rods
الشبكات	Networks
الدائرة بتسعة نقاط	The Nine-Point Circle
نوموجرامات	Nomographs
العدد π، ϕ أو e	The Number Pi, Phi, or e
براهين نظرية العدد	Number theorem Proof
طي الأوراق	Paper Folding
الكسور الجزئية	Partial Fractions
نظرية باسكال	Pascal Theorem
الأعداد التامة	Perfect Number
الأعداد المضلعة	Polygonal Number
الأعداد الأولية	Prime Number
الاحتمالات	Probability
حل المسائل في الجبر	Problem Solving Algebra
الهندسة الاسقاطية	Projective Geometry
براهين النظريات الجبرية	Proofs of Algebraic Theorems
خصائص مثلث باسكال	Properties of Pascal Triangle
ثلاثيات نظرية فيثاغورس	Pythagorean Theorem-Triples
المضلعات المنتظمة	Regular Polygons
مضلع منتظم بـ 17 وجها	The Regular Seventeen-sided Polygon
هندسة ريمان	Remannian Geometry
حل المكعبات	Solving Cubics and Quartics
التحليل العاملي الخاص	Special Factoring
المثلثات الكروية	Spherical Traingles
اللولب/ الحلزون	The Spiral
الإحصاء	Statistics
إنشاءات "شتينر"	Steiner's Construction
الترصيع بالفسيفاء	Tessellations
نظرية الضفائر	Theory of Braids
نظرية المعادلات	Theory of Equation
نظرية المنظوريات	Theorem of Perspective
منحنيات ثلاثية الابعاد	Three-Dimension Curves
المسائل الثلاثة الشهيرة في العصور القديمة	The Three Famous Problems Of Antiquity
الطوبولوجيا	Topology
مسائل غير قابلة للحل	Unsolved Problem
المتجهات	Vectors

ينبغي على المعلم أن يشير، في بعض الأحيان (وخلال المراحل المبكرة من المشروع بالتحديد) إلى ماهية الفقرات المكتوبة التي سيتضمنها الجزء الكتابي منه. ومن الضروري ان لا يلجأ المعلم إلى تحديد الصيغة والمحتوى بصورة حاسمة بحيث يؤدي إلى إحباط العنصر الإبداعي الذي قد يتضمنه عمل الطلاب عند اعدادهم لتقاريرهم. ويستطيع المعلم أن يقترح اجتماعات فردية مع الطلبة الذين يجدون بأن الشكل المقترح عليهم لا يتلاءم مع الخصائص التي يتسم بها مشروعهم. إن ميزات مثل البيبلوغرافيا ينبغي أن تكون جزءا لا يتجزأ من جميع أوراق البحث التي يقوم الطلبة بإعدادها. كما أن دعم النتائج وحساباتها باستخدام الآلة الحاسبة والحاسوب سيكون ضروريا وبحاجة إلى تشجيع دائم كلما كان هذا الأمر مناسبا.

معرض الرياضيات The Mathematics Fair

يعقد في عدة مناطق من البلاد، معارض (سنوية، نصف سنوية، ... الخ) لمشاريع الرياضيات التي يعدها الطلبة. وتتراوح هذه المعارض بين معارض على مستوى المدارس وترتقي لكي تصبح معارضا على مستوى البلاد في مجال اهتماماتها بالمشاريع الطلابية. ويتم رعاية بعضها وتمويلها محليا، والبعض الآخر تتكفل برعايته منظمات وطنية. بصورة عامة ينبغي أن تتوفر مثل هذه المعلومات من خلال الإدارات أو منظمات معلمي الرياضيات. إن إمكانية العرض النهائي في معرض الرياضيات ستفيد بوصفها تحفيزا إضافيا للطلبة يزيد من عرى ارتباطهم بمادة الرياضيات والأنشطة المصاحبة لها.

عينة أسئلة مسابقة رياضيات Sample Mathematics Contest Questions

1 إذا كان $0 = \frac{4}{x} - \frac{4}{x} - 1$، إذن $\frac{2}{x}$ يساوي:

(أ) 1- (ب) 1 (ج) 2 (د) 1- أو 2 (هـ) 1- أو 2-

2 إذا كانت أربعة أضعاف مقلوب محيط دائرة تساوي قطر تلك الدائرة، إذن ستكون مساحة الدائرة:

(أ) $\frac{1}{\pi^2}$ (ب) $\frac{1}{\pi}$ (ج) 1 (د) π (هـ) π^2

3 بالنسبة لجميع الأعداد التي لا تساوي صفرا للمتغيرين x، y بحيث $x = \frac{1}{y}$ ، $(x-\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})$ تساوي:

(أ) $2x^2$ (ب) $2y^2$ (ج) x^2+y^2 (د) x^2-y^2 (هـ) y^2-x^2

4 إذا كان a=1، b=10، c=100، و d=1000، إذن يساوي
(a+b+c-d)(a+b-c+d)+(a-b+c+d)+(-a+b+c+d)

(أ) 111، (ب) 2222، (ج) 3333، (د) 1212، (هـ) 4242.

5 اشترى أربعة فتيان قارباً بسعر 60 دولارا. دفع الفتى الأول نصف مجموع ما دفعه بقية الفتيان، ودفع الثاني ثلث مجموع ما دفعه بقية الفتيان، ورفع الفتى الثالث ربع مجموع ما دفعه بقية الفتيان: ما هو مقدار المبلغ الذي دفعه الفتى الرابع؟

(أ) 10$ (ب) 12$ (ج) 13$ (د) 14$ (هـ) 15$.

6. إن عدد الأزواج المختلفة (x,y) من الأعداد الحقيقية التي تحقق المعادلتين:

$$y = x^2 + y^2$$
$$y = 2xy$$

هي. (أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3 (هـ) 4

7. يتباعد الضلعان المتقابلان في الشكل السداسي المنتظم بـ 12 بوصة. فإن طول كل ضلع، بالبوصات، سيكون:

(أ) 7.5 (ب) $6\sqrt{2}$ (ج) $5\sqrt{2}$ (د) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ (هـ) $4\sqrt{3}$

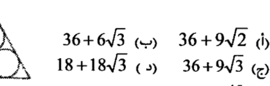
8 عمر آل يزيد بـ 16 عاما على حاصل جمع عمري بوب وكارل، ومربع عمر آل يزيد بـ 1632 على مربع مجموع عمري بوب وكارل. لذا فإن مجموع عمره مع عمر بوب وكارل سيكون:

(أ) 64 (ب) 94 (ج) 96 (د) 102 (هـ) 140.

9. كم عدد أزواج الأعداد الصحيحة (n,m) التي تحقق المعادلة: $m + n = mn$ ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4 (هـ) أكثر من 4.

10 إن كلا من الدوائر الثلاث الموجودة في الشكل الآتي تمس ضلعا من أضلاع المثلث، كما أن كل ضلعين من أضلاعه يمسان دائرة من هذه الدوائر. إذا كان نصف قطر كل دائرة هو 3. سيكون محيط المثلث مساويا لـ:



(أ) $36+9\sqrt{2}$ (ب) $36+6\sqrt{3}$
(ج) $36+9\sqrt{3}$ (د) $18+18\sqrt{3}$
(هـ) 45.

11. تم إلقاء أحجار النرد الثلاثة بصورة عشوائية (بمعنى، ان جميع وجوه الأحجار تمتلك نفس احتمالية الظهور). ما هي احتمالية إن الأرقام الناتجة الثلاثة سوف تترتب لتكوين متوالية رياضية مع فارق مشترك قدره 1 ؟

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{1}{27}$ (د) $\frac{1}{54}$ (هـ) $\frac{7}{36}$.

12. إذا كانت $y = (\log_2 3)(\log_3 4) \ldots\ldots\ldots \log n[n+1])$
$(\log_{31} 32)$, ...، إذن:

(أ) 4<y<5 (ب) y=5 (ج) 5<y<6
(د) y=6 (هـ) 6<y<7

13. افترض أن النقطة E هي نقطة تقاطع قطري الشكل الرباعي المحدب ABCD، ولتكن النقاط P، Q، R، S' مراكز للدوائر التي تحيط بالمثلثات ABE، BCE، CDE، و ADE، على التوالي. إذن:

(أ) PQRS هو شكل متوازي الأضلاع.

(ب) PQRS هو شكل متوازي الأضلاع فقط وإذا فقط عندما يكون ABCD معينا.

(ج) PQRS هو شكل متوازي الأضلاع فقط وإذا فقط عندما يكون ABCD مستطيلا.

(د) PQRS هو شكل متوازي الأضلاع فقط وإذا فقط عندما يكون ABCD متوازي أضلاع.

(هـ) لا يصح أي من القضايا السابقة.

14. بكم مسار يتألف من تعاقبات أفقية أو/ وعمودية لقطع المستقيمات، والتي يرتبط كل منها بزوج من الحروف المتجاورة في الشكل الآتي، يمكن تهجئة كلمة CONTEST عندما يكون المسار مستعرضا من البداية والى النهاية؟.

(أ) 63 (ب) 128
(ج) 129 (د) 25
(هـ) لا يتوفر احتمال لتحقق ذلك.

C
COC
CONOC
CONTNOC
CONTETNOC
CONTESETNOC
CONTESTSETNOC

عندما يتضمن مشروع الطالب بعض النماذج الفيزيائية، مثل الترابطات أو إنشاءات هندسية، فإن العرض المجرد سيكون ذو معنى وهدف محدد، أما عندما يكون مشروع الطالب عبارة عن تطوير رياضي، أو دراسة بعض المفاهيم، آنذاك تصبح عملية العرض أمرا ضروريا. وتنظم جل معارض الرياضيات بحيث توفر فرصة مناسبة للطلبة في عرض أوراق بحثهم مقالاتهم (شفهيا) أمام مجموعة من المحكمين. ويتم اختيار الفائزين، في مراحل متقدمة، من كل مستوى مرحلة ساهمت في المعرض. بصورة عامة ينجذب الكثير من أعضاء الجماعة إلى مثل هذه المناسبات.

إن خبرة التعلم التي تتضمنها عملية إعداد المشروع أو كتابة ورقة بحث ، ثم عرضه على أنظار الغير، أو الدفاع عما ورد فيه من آراء، تعد ذات أهمية بالغة. وسواء ظفر الطالب بالفوز في منافسات المعرض أو فشل في تحقيق ذلك، فإن الأهمية التي تمتاز بها هذه المشاركة تكمن في الاهتمام والعناية الذي يوليه الحاضرون للعمل الذي قام بإنجازه.

التعاون مع الجامعة

Cooperation With A University

إن التقارب مع الجامعة وإقامة صلات متينة معها قد تزود الفتيان الموهوبين بفرصة ذهبية للعمل سوية مع الرياضيين الأكاديميين. وفي هذا المقام ستتوفر للطلبة فرصة الحصول على خبرة مباشرة بماهية الرياضيات التي تقع خارج دائرة غرفة التعليم وقد يصبح الطلبة طرفا في العمل الذي يساهم فيه الباحث، أو قد يسعون وراء استقصاء رياضي مواز لعمل الباحث وبمستوى يتناسب مع قدراتهم، وتحت وصاية وإرشاد الباحث. وفي كل حالة من هذه الحالات سيكون الإثراء مثمرا. إن حصيلة ما سيجنيه الطالب من هذا النشاط العلمي قد يجعله مؤهلا للمشاركة في معرض الرياضيات أو في مجلة متخصصة كي ينشر على صفحاتها. إن الانضمام والانتساب كعضو في جامعة محلية سيوفر للطلبة الموهوبين فرصة للحصول على مساقات دراسية بالرياضيات المتقدمة. وينبغي أن يتم اختيار المعلم المناسب والذي سيرتبط معه الطلبة، بعناية بالغة، بحيث تكون الخبرة التي سيكتسبها الطلبة منه مصدر إثراء لمعارفهم بدلا من أن تكون مصدرا لإحباطهم، الأمر الذي سيكون ذو تأثيرات سلبية تصعب معالجتها.

وفي حالة عدم وجود جامعة في الجوار، فإن الارتباط عن طريق المؤتمرات الفيديوية (التسامر البعدي) Video Conference يمكن أن يستخدم لربط الطلبة وتقديمهم إلى بيئة عمل الرياضيين الأكاديميين.

إن مثل هذا النوع من الاتصال سيتيح للطلبة الموهوبين فرصة المساهمة، وتعاهد الحوار مع الباحثين الرياضيين لمعرفة المزيد عن عملهم وإنجازاتهم العلمية. كذلك يمكن أن يتعمق الاتصال والحوار عبر البريد الإلكتروني، أو تقنية الاتصال التي تتيحها تقنية المعلومات.

مجلة الرياضيات بالمدرسة

The School Mathematics Magazine

إن من المهام التقليدية لنادي الرياضيات هي إصدار مجلة الرياضيات بالمدرسة. تتألف هذه المجلة من بضعة أوراق بحث لأفضل الطلبة (أو مشاريعهم). ان عمل الطالب (مع بعض أنواع الانتقاء في تحرير النص) يمكن أن تتحقق له فرصة النشر في مجلة الرياضيات هذه.

بصورة عامة، يتم توزيع المجلة (أو بيعها) من خلال المدرسة، وترسل نسخ منها إلى المدارس القريبة، أما إلى الطلبة الموجودين في تلك المدارس، أو إلى رئيس قسم الرياضيات.

إن مشروعا من هذا النوع غالباً ما يوفر، نشاطا مثمرا لكل عضو في النادي. وسينهض الطلبة (الأكثر تحفيزا باتجاه مادة الرياضيات، والطلبة الذين يتميزون بمستوى متقدم في هذه المادة) بأعباء كتابة محتويات مجلة الرياضيات المرتقبة، بينما سيساهم الطلبة ممن يتمتعون بمواهب فنية في تصميم النموذج الطباعي، والغلاف، والأعمال الفنية التي ستتضمنها. أما بقية الطلبة فسيلعبون دورا مهما في الجوانب التجارية من المشروع، مثل: الدعاية والإعلان، والتوزيع، ومتابعة المتطلبات المادية. إن دور راعي إدارة المجلة سيكمن، بالضرورة، في تذليل العقبات عبر تعريف حدود المهمة ومتطلباتها، ثم السماح للطلبة بإجراء تعديلات جزئية تتناسب مع حاجاتهم ورغباتهم. وكما هو الحال مع أي مشروع احسن تنظيمه، يجب أن يكون على الأقل هناك شخص محدد ينهض بأعباء إدارة المشروع بكافة تفاصيلاته. وسيكون الاهتمام والعناية البالغة بمثل هذه الأمور مثل: القدرات التنظيمية، وميزة القيادة ضروريا قبل اختيار الطالب الذي سيكون رئيس التحرير. وإن هذا الاختيار سيكون أكبر تأثيرا إذا نشأ (على الأقل بجزء من أجزائه) من مجموعة الطلبة المساهمين في هذا النشاط.

بالإضافة إلى توفير قناة خارجية لعرض المشاريع والمساهمات الفردية في الرياضيات، فإن المجلة الرياضية ستكون مصدر فخر دائم لكل من ساهم في إعدادها. وستذهب هذه الفعالية بعيدا نحو إثارة مزيد من الاهتمام بالرياضيات، بينما توفر موردا جيدا لإثراء مادة الرياضيات.

برنامج الجمعية العمومية للرياضيات
The Mathematics Assembly Program

بالرغم من كون المجلة أكثر شيوعا من برنامج الجمعية العمومية للرياضيات، فانه قد يكون تناظرا شفهيا لها. سيزود الطلبة بفرصة لعرض بعض الأعمال الفردية أو أعمال المجاميع على مجموعة كبيرة من المستمعين، ويلاحظ بأن رد الفعل الأولي لجميع المعلمين إزاء دلائل نجاح برنامج الجمعية العمومية للرياضيات هو الميل نحو الشك بإمكانية تحقيق أهدافه. إن فكرة عرض برنامج لمجموعة غير متجانسة من المستمعين هو أمر شاق ومربك. وهناك جملة من الإمكانيات لبرنامج هذه الجمعية العمومية، فعلى سبيل المثال، يمكن عرض سلسلة من المسرحيات الهزلية القصيرة لغرض إضفاء بعد مسرحي على أهم الإنجازات في تاريخ الرياضيات. ويمكن أن تتضمن. كذلك. مسرحية جذلة Light-heated، مثل قصة الفتى كاوس، والمذكورة في الفصل الثالث من هذا الكتاب. كما يمكن كتابة مسرحية قصيرة تتناول تطبيقا لموضوع في رياضيات المدرسة الثانوية شريطة أن نكون حذرين بحيث يكون الموضوع مناسبا لمعظم المستمعين الذين سيحضرون لمشاهدة هذا النشاط. تم إنتاج برامج ناجحة للجمعية العمومية للرياضيات، والتي تضمنت مشاركة فردية لبعض الطلبة، أو مجاميع صغيرة في عرض موضوعات قصيرة وعلى جانب كبير من الإثارة لمستمعين من قطاعات عامة فعلى سبيل المثال، تمتاز الحيل والخدع الرياضية القصيرة بكونها بسيطة وسهلة لدرجة تجعلها كافية لتوليد اهتمام متزايد لدى جميع فئات الطلبة الموجودين في حلقة المستمعين وبصرف النظر عن قابلياتهم. إن المقدم Presenter سيقوم بعرض طريقة أمام أنظار المشاهدين والمستمعين تتناول كيفية ضرب الرقم 11 ذهنيا. إن ضرب العددين 62×11 سيتضمن ببساطة، إضافة 2+6 وإدراج هذا المجموع بين 6، 2 للحصول على الناتج 682. وبالنسبة لعدد مثل 75، فإن الضرب الذهني 75×11 سيشمل إضافة المراتب العشرة لمجموع 7+5 إلى الرقم 7 بعد إدراج وحدات المراتب بين 7، 5، أي 75×11= 825. أما بالنسبة للأعداد التي تتألف من ثلاثة مراتب عشرية أو أكثر، فإن القاعدة تتضمن إضافة كل زوج من الأرقام مبتدئين من اليمين، وفي كل مرة على التوالي ندرج وحدات مراتب المجموع (ناقلين المرتبة العشرية) بين مراتب النهاية. وعليه

11 × 3542 = 2(2+4) (4+5) (5+3)3 أو 38.962. وهناك "حيلة" العدد المثير والتي يمكن أن يكون مثالاً كما جاء في الفصل الثالث من هذا الكتاب. وفي هذه الحالة سيشارك جميع المشاهدين والمستمعين بصورة فاعلة. وببساطة دع كل طالب يختار عدد 5 المكون من ثلاث مراتب، ويتبع الخطوات المحددة ليحصل على العدد 1089. إن النتيجة المذهلة المتساوية التي يتحصل عليها كل واحد – بغض النظر عن العدد الذي اختاروه، ومن خلال اتباع الإرشادات، ستثير بالتأكيد متعة لهم.

نظرا للطبيعة المرئية التي تمتاز بها الهندسة فإنها تقدم عددا من الموضوعات التي يمكن أن تكون مناسبة لهذا النوع من برنامج الجمعية العمومية للرياضيات. إن قص قطعة كبيرة من النصف الأول لشريحة موبيوس Mobius من جهة الحافة، ثم ثلث العرض من الحافة، سوف ينشئ عنصرا للتشويق بين المشاهدين والمستمعين. ولتجنب الخمول أثناء العرض، ينصح بعمل ثقوب (يعني، بصورة جزئية) في شريحة موبيوس قبل البدء بالبرنامج.

إن كثيرا من المفاهيم والأسس الطوبولوجية تأسر اهتمام عامة المشاهدين. وتتضمن مثل هذه الموضوعات نزع الصدرة دون اللجوء إلى نزع السترة الخارجية، وفك وثائق رجلين ثم إحكام ربطهما بحبل مربوط على رسغيهما دون نزع الحبال، وأمور أخرى مشابهة. إن التمعن بالنظر في الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا الكتاب سيتيح لك فرصة تلمس أفكار جديدة لبرنامج الجمعية العمومية للرياضيات. إن مصدرا مفيدا لمثل هذه الأفكار هو:

Riddles in Mathematics, by E. P. Northrop (Princeton, NJ: Van Nostrand, 1944).

إن مراقبة عرض مسرحي يعالج اختبارا رياضيا قصيرا، يكون ذو أبعاد تعليمية إضافة إلى الجوانب الترفيهية التي ينالها المشاهدون من متابعة فقراته. حيث يمكن اختيار فريقين للتنافس فيما بينهم أمام المشاهدين والمستمعين.

وكلما كانت الأسئلة المعروضة واضحة وبينة لدى المشاهدين والمستمعين، فإن هذه الخبرة ستكون عاملا محفزا لهم على المساهمة سوية مع المتبارين على المسرح. إن الأسئلة التي وقع عليها الاختيار لكي تستخدم في العرض، ينبغي أن تكون في حدود فهم جل الطلبة الموجودين ضمن جماهير المشاهدين والمستمعين. ويمكن استخدام لوحة عرض كبيرة لتقديم الأسئلة وعرضها على أنظار المشاهدين.

إن الاقتراحات المقدمة لبرنامج الجمعية العمومية للرياضيات، يمكن أن توظف في الإنتاج التلفزيوني، المعد على شريط يستعرض على صفوف منفردة، أو يبث حيا على الهواء

عبر منظومة دائرة تلفزيونية مغلقة (إذا توفرت) خلال المدرسة أو المقاطعة. ويؤمل أن تكون الآراء المعروضة في العروض مصدرا لإثارة وتوليد آراء وأفكار أخرى تكون مناسبة للمشاهدين الذين حضروا العرض.

برنامج الضيوف المتحدثين
Guest Speakers Program

تتوفر مكاتب للمتحدثين بالرياضيات للمدارس الثانوية في مواقع كثيرة على امتداد مساحة البلاد. ترعى هذه المكاتب، بصورة عامة، بواسطة المؤسسات الجامعية، أو المنظمات المتخصصة والمهنية. بصورة عامة، تتوفر في المدارس المحلية قائمة بأسماء المتحدثين، وعناوينهم، والمواضيع التي ستكون محور حديثهم. ولا تتحمل المدرسة، غالبا، أية نفقات إزاء الحصول على هذه الخدمة وتوفيرها لطلبتها. إن النشاط المعتاد لنادي الرياضيات، في مثل هذه الحالة، سيتألف من إعداد دعوات لمتحدثين محددين، ثم الإعلان عن كل كلمة بوسائل الدعاية والإعلان المتاحة. ويعتمد حجم الحضور على الموضوع الذي تم اختياره، كذلك قد يكون الحضور متجانسا أو متباينا. ويفضل أن تترك فرصة اختيار المتحدث للطلبة بدلا من المعلمين، لأن الطلبة سيلجأون، بكل حال من الأحوال، إلى المعلم لإبداء المشورة والرأي بهذا الخصوص. بالمقابل ينبغي على المعلم أن يكون حذرا بعدم فرض انحياز شخصي تجاه عملية اختيار المتحدث، ويقتصر على إبداء المشورة فحسب. ويمكن للمدرس أن يتصل بمدارس ثانوية أخرى لتحديد هوية المتحدثين الذين لاقوا إقبالا واسعا لديهم، والآخرين الذين لم يفلحوا بإحراز إقبال مناسب.

وإذا تم التخطيط بصورة محكمة ومناسبة لهذا النشاط، فإن فوائده الخصبة ستكون دليلا قاطعا على جدوى العناء المبذول في سبيل إنجازه.

رحلات الصف ذات الفائدة الرياضية
Class Trips Of Mathematical Significance

توفر المناطق الكبيرة بالعاصمة أمثلة جذابة ومثيرة لتطبيقات الرياضيات. وينبغي على المعلمين المقيمين في هذه المناطق تعميق الاستفادة الشخصية من هذه الموارد، بين الفينة الأخرى. فعلى سبيل المثال، فإن مختبرا للهندسة أو البحوث (مثل مختبرات شركة BELL، أو مختبرات شركة IBM) قد تكون موطن اهتمام بالغ لدى الطلبة. وقد يجد البعض الآخر أن زيارة حلبة سباق باريموتيول Parimutuel أمرا مثيرا للاهتمام. في ذلك المواقع يستطيع الطلبة ملاحظة كيفية احتساب علامات الرهان التي تمنح للمشاركين فيه، وتطبيقات أخرى مباشرة على حساب الاحتمالات. وتوجد بين الفينة والأخرى عروض خاصة تقدم لتحفيز الطلبة نحو التعمق في دراسة الرياضيات، ويمكن استخدام هذه العروض في سفرة صفية-رياضية مشوقة. إن المعلم الذي يمتلك ذهنا ثاقبا سوف يكتشف أفكارا أخرى لرحلات رياضية – صفية ذات فائدة ملموسة لطلابه.

إن القرب من منطقة كبيرة بالعاصمة أو منطقة تمتلك صناعة ترتكز في كثير من جوانبها التطبيقية إلى الرياضيات هو بلا شك أمر ضروري لرحلة صفية-رياضية ناجحة. وعلى سبيل المثال، إذا كانت هناك أعمال تبليط أحد الطرق، يستطيع الصف الاستفادة من مراقبة المهندسين والمساحين الذين يعكفون على إعداد الخرائط والمخططات. وحتى طائرة الهليوكوبتر التي يستخدمها رجال البوليس لمراقبة سرعة السيارات والمركبات فإنها يمكن أن توفر موردا رياضيا يثير انتباه الطلبة واهتمامهم. وفي بعض المواطن تلعب مبادرة المعلم وإبداعاته دورا فاعلا تزيد أهميته عن بقية الجوانب التي يتطلبها هذا النشاط، لذا ليس بمستغرب أن يعد هذا القسم تحديا إزاء كونك معلم للرياضيات بالفعل !.

لاشك إن العنصر الأكثر أهمية في عملية التهيئة لرحلة صفية ناجحة يكمن في التخطيط السليم لجميع مفرداتها، وهو أمر لا يقتصر على الأعداد اللوجستي logistic للرحلة فحسب. وتقع على قائمة الاهتمامات التخطيط للسفر والتحضيرات الأخرى المرتبطة به، يضاف إلى ذلك أهمية التخطيط الدقيق لأسلوب التهيؤ المناسب للصف بشأن متطلبات الرحلة. كما ينبغي على المعلم أن يزود الصف بالخلفية الضرورية للجوانب الرياضية والاختبارية التي تخص الرحلة المخططة قبل موعد المغادرة. وتتضمن الخلفية عرض موضوع ذو صلة بالرحلة لم يباشر الطلبة بدراسته، وعرض موضوع قبل التوقيت الزمني المحدد للحصول إليه، أو اللجوء في بعض الأحيان إلى تزيين موضوع لكي تكون الرحلة مناسبة لحد كبير. ويمكن، في بعض الحالات، دعوة ممثل من الواقع الذي ننوي زيارته إلى المدرسة، لكي يهيؤ الطلبة ويحفزهم على رحلة الصف الوشيكة. إن هذا البعد الإضافي سيساعد الطلبة على الاستفادة القصوى من الرحلة بعد أن ترسخت في أذهانهم مفردات كثيرة عن الموقع عبر المناقشات الدائرة مع الممثل الزائر. إن التخطيط لرحلة ما سيكون أمرا لا غنى عنه إذا تضمن زيارة متحف قريب بهدف التنقيب عن فقرات تمتلك أهمية رياضية. إن هذه

الفقرات سوف تتخذ مدى يبتدئ بفن الرسم والعمارة وينتهي بالأدوات والآلات التي استخدمت في عصور غابرة. ومهما كان نوع وطبيعة النشاط المتضمن، فإن التخطيط (الذي يشمل زيارة تمهيدية للمعلم إلى موقع الرحلة الصيفية) سيبقى على الدوام خطوة ضرورية في تأسيس نجاح رحلة الصف الرياضية.

برنامج تعليم الأقران
Peer Teaching Program

يمكن إجراء تعليم الأقران لجميع مراحل التعليم الثلاثة والتي تشمل: التعليم المتدرج Grade Teaching – On، والعلاج. والإثراء. وربما يعد هذا الأمر نشاطا إذا قرر نادي الرياضيات أن يأخذ على عاتقه مباشرة فعالية تمارسها مجموعة من الطلبة مع مشاور إدارته.

يسهم تعليم الأقران. إلى حد كبير، في تعميم الفائدة على الطالب الذي يمارسه، والطلبة الذين يتلقنون الدرس عنه. فالذي يمارس مهمة تعليم مفهوم أو موضوع محدد، يكتسب فهماً أكثر عمقا وشمولا بالموضوع ذاته وسيكون هذا الفهم، في جزء منه. نتيجة الحاجة إلى تنظيم العرض بأسلوب فطن، والذي سيؤدي – بالمقابل– إلى بلورة أفكار المعلم تجاه ذلك الموضوع. ومع أن تحسن القدرة على الفهم ليست بالضرورة السبب الأساس لإنشاء برنامج تعليم الأقران، فإن هذه الظاهرة هي أحد الخصائص التي تفيد من تطبيقه.

وينبغي أن يتوفر وقت كاف للطلبة الذين سيشاركون في تعليم أقرانهم. قبل البدء بأي عملية من عمليات تعليم الأقران. كما من الضروري أن يكون هؤلاء الطلبة على ألفة تامة مع تقانات التعليم الأساسية والموارد المتوفرة لاستخداماتهم. لذا فإن من الطبيعي تركيز الاهتمام على المضمون عند إعداد معلمين أقران. ومع ذلك، فإن جزءا لا بأس به من الوقت ينبغي أن يكرس لعملية التعليم.

يمكن أن يأخذ تعليم الأقران أكثر من شكل وقالب، فقد يكون عبارة عن دروس خصوصية ذات صفة فردية، وقد تتضمن مجموعات صغيرة من الطلبة، أو قد تكون تكملة للتعليم الصفي النظامي. ومهما كان أسلوب وصيغة المستخدم، فيتوجب أن تسبق أي عملية تعليم أقران بتحضيرات مكثفة وملائمة، حيث تظهر حاجة ملموسة إلى مهارات خاصة لكل نوع من أنواع التعليم. فإذا كان تعليم الأقران مخصصا لأغراض علاجية، ينبغي أن نجعل معلمي الأقران على معرفة كافية ودراية بالطرق الإجرائية التشخيصية مع تدريبهم على أن يكونوا حساسين حيال حاجات الطلبة الذين يعانون من بطء التعلم. كذلك فإن معرفة كيفية شد اهتمام الطلبة الذين يعدون ذوي قابليات متوسطة يحتل نفس المكانة من الأهمية لدى معلم الأقران. ولضمان نجاح هذا النشاط ينبغي أن تعد، بعناية، طرق ومناهج مستحدثة للتعليم.

عندما يباشر الطلبة المتفوقون عملية تعليم الأقران لغرض إثراء معارف بقية الطلبة، ينبغي أن يعد أنموذج لضمان مشاركة جل طلبة المدرسة. فعلى سبيل المثال، يستطيع مستشار الإدارة تقديم موضوعات إثرائية إلى المجموعة المنتخبة من الطلبة المتفوقين لأغراض تعليم الأقران، أو قد يقوم بإعداد برنامج زمني لمتحدثين من خارج المدرسة يساهمون في عرض موضوعات إثرائية متنوعة لهؤلاء الطلبة. ومتى استكملت هذه الإجراءات وأحس المدرسون الأقران براحة معقولة بالموضوعات الجديدة التي تلقنوها، سيتم لم شملهم في اجتماع برعاية عضو إدارة النادي لإنشاء استراتيجية واضحة المعالم لعرض هذا الموضوع لأنواع مختلفة من صفوف المدرسة. وينبغي أن يؤخذ بعين الاعتبار مستوى من سيحضر من المشاهدين والمستمعين، بعناية واهتمام بالغ، عند التحضير لعملية تعليم الأقران. ويمكن تقديم مواد إثرائية متنوعة بمادة الرياضيات لمعظم طلبة المدرسة باستخدام هذا الأنموذج، وعلى نطاق مناسب لمستويات مختلفة من قابليات الطلبة وقدراتهم.

ورغم أن استخدامنا لاصطلاح "تعليم الأقران" يميل إلى الاستخدام الحرفي لهذه الكلمة، فإن الآراء التي عرضت في هذا المقام يمكن أن تعاني المزيد من التوسع في المعالجة بحيث تصبح مادة "المعلمون الأقران" موضوعا يعرض على الطلبة اليافعين، سواء في نفس المدرسة أو المدارس الأدنى القريبة منها.

وتحت جميع الظروف، فإن المحتوى وأسلوب المعالجة ومفاهيمها بحاجة إلى أن تخطط بعناية قبل مباشرة أي نوع من أنواع تعليم الأقران. ومتى أنجز تعليم الأقران بصورة صحيحة ومتكاملة سيكون ذو قيمة وأهمية بالغة لكل من الطلبة الذين يمارسون مهمة التعليم وأقرانهم الذين يتلقون الدروس منهم.

الحاسوب The Computer

بعد أن يظهر الطلبة درجة مقبولة من الثقة بالحاسوب وأدبياته، ينبغي أن يشجعوا بالعمل عليه خلال الأوقات المفتوحة في المدرسة، أو بعد الانتهاء فترة الدروس. وقد يجد الطلبة متعة كبيرة في توسيع الاستكشافات غير المنهجية باتجاه: الأشكال الثنائية أو ثلاثية الأبعاد، ونمذجة وتطبيقات العالم الواقعي، والأعداد العشوائية، وفراكتال ماندليبرو، أو أي موضوع آخر يقع اختيارهم عليه.

لوحة البيانات والبلاغات The Bulletin Board

ينبغي أن تكون هناك لوحة بيانات وبلاغات، واحدة على الأقل في كل مدرسة، مخصصة حصرا لمادة الرياضيات، وتثبت في موقع قريب من قسم الرياضيات أو على مقربة من صف الرياضيات.

ويمكن للوحة البيانات والبلاغات أن تستوعب جميع الأنشطة اللامنهجية التي ذكرت في ثنايا هذا الفصل. ويمكن أن تصبح هذه اللوحة أمرا لا غنى عنه في كل مدرسة ثانوية بوصفها أداة مساعدة في تزويد الطلبة بهذه النشاطات، إضافة إلى كونها مصدر للدعاية وإشاعة المعرفة الرياضية. إن بعض الاستخدامات المقترحة للوحة بيانات وبلاغات الرياضيات هي:

1 يمكن استخدام لوحة البيانات والبلاغات لإثارة الاهتمام في موضوع أو عملية رياضية. كذلك، يمكن استخدامها في تحفيز الطلبة على دراسة المزيد من المفردات الرياضية عبر تزويدهم بمواد كافية حول موضوع، أو مفهوم معين لترسيخ اهتمام الطلبة بصورة كافية بحيث يستطيعوا مباشرة نشاط بحثي فردي. إن الشكل الأفضل لهذا النشاط سيكون بصورة مسألة مفتوحة أو ذات طابع يميل إلى التحدي.

2 يمكن عرض نتائج لقاءات فريق الرياضيات (متضمنة الأسئلة وأجوبتها النموذجية) على لوحة البيانات والبلاغات.

3 تعد لوحة البيانات والبلاغات موطنا مناسبا للإعلان عن مباريات الرياضيات (المفتوحة أمام مساهمات جميع الطلبة).

4. يمكن أن تصبح لوحة البيانات والبلاغات بؤرة للمباريات الأسبوعية المستمرة بالرياضيات داخل المدرسة، مع طرح "مسألة الأسبوع Problem of The Week" التي تلصق أسبوعيا. ويصار في بداية كل أسبوع إلى عرض الحل النموذجي للمسألة مع قائمة بأسماء الطلبة الذين نجحوا في حلها. إن الدعاية المناسبة لهذه اللوحة بواسطة معلم متحمس لهذا النشاط الفريد، سيجعل منها موردا مناسبا لإرساء مناخ رياضي صحي.

5 يمكن أن تعلن جميع أنشطة نادي الرياضيات، والتي تتضمن مناسبات خاصة لغير الأعضاء (على سبيل المثال، الضيف المتحدث) على لوحة البيانات والبلاغات لكي توفر فرصة مفتوحة أمام الطلبة للاطلاع عليها.

6. يمكن عرض مشاريع الرياضيات المختلفة، والإعلان عن مناسبات خاصة مثل معارض الرياضيات على لوحة البيانات والبلاغات.

7. هناك فرصة مناسبة لتوظيف لوحة البيانات والبلاغات في تذليل العقبات أمام برنامج تعليم الأقران عبر توفير مناخ مناسب للإعلان، ومد جسور التعاون مع مؤسسة البرنامج.

8. يبحث الطلبة المتميزون في مادة الرياضيات عن الإرشادات الخاصة بهذا الحقل لكي يسيروا على هديه، وتعد لوحة البيانات والبلاغات موطنا مناسبا يخصص عليها موقعا مناسبا لعرض هذا الموضوع بتفصيل يشفي غليل هؤلاء الطلبة.

9 يمكن أن تستخدم لوحة البيانات والبلاغات في تنسيق أنشطة الحاسوب بالإضافة إلى عرض البرامج الفريدة التي نجح الطلبة المتميزون بإعدادها، مثل فن الفراكتال Fractal Art. إن إعداد العرض بصورة جذابة سيساعد على نشر وتوسيع مدى استخدام الحاسوب وتطبيقاته لدى بقية الطلبة.

10. يمكن إعداد عروض فصلية في ضوء علاقتها بالرياضيات لإغراء الطلبة وجذبهم نحو تحري التطبيقات غير التقليدية للرياضيات (على سبيل المثال، ان عرض فصل الربيع يمكن أن يقيم علاقة بين ترتيب الأغصان Phyllotaxis واعداد فايبوناشي Fibonacci).

11. يمكن استخدام لوحة البيانات والإعلانات لإرسال البلاغات بواسطة الكليات والجامعات، والتي تخص برامجا رياضية محددة يتم تقديمها خلال فصل الصيف والسنة الاكاديمية.

خلاصة Summary

لقد ناقشنا عدة أنواع من الأنشطة اللامنهجية في رياضيات المدارس الثانوية. وتعد بعض هذه الأنشطة خارج نطاق درس الرياضيات (مثل: النوادي، والفرق، والمباريات)، وبعضها الآخر يكمل تعليم النظامي ويضيف إليه بصمة جديدة (مثل: مشاريع الرياضيات، والضيوف المتحدثين، والرحلات المدرسية).

وقلما نجد مدرسة واحدة تقوم بتبني هذه الأنشطة جميعا وتقدمها إلى طلبتها، ومع ذلك فإن الإدراك العميق لبعض خيارات الأنشطة اللامنهجية في مادة الرياضيات يبقى أمرا ضروريا ولابد منه عند تصميم برنامج لنشاط لا منهجي في الرياضيات يناسب مدرسة بعينها. بالمقابل فإن البرنامج الجيد للنشاط اللامنهجي سوف يسير قدما على طريق تعميق برنامج الرياضيات التقليدي في المدرسة.

تمارين Exercises

1 افترض بأنك قد تطوعت للعمل بصفة مستشار إدارة لنادي الرياضيات بمدرستك، والذي يعد نشاطا للقسم في بعض الأوقات. ولم يكن الشخص الذي سبقك بالعمل في هذا المنصب، والذي تقاعد لحينه، نشيطا ومفعما بالحيوية، وقد تراجع بصورة كبيرة جدا خلال توليه منصب عضوية النادي، بحيث أصبحت الأنشطة التي ينهض بأعبائها النادي قليلة ومتباعدة. بيّن الخطوات التي ستتخذها لبث الروح ثانية بالنادي. وزيادة عدد أعضائه، وتطوير برنامج جذاب لأنشطته.

2 افترض بأنك تنهض بأعباء إدارة فريق الرياضيات بمدرستك، والذي داوم على التدريب وفق سياقات تقليدية لغاية هذا التاريخ، وغالبا ما تمارس خلال وقتك الفائض العمل على بعض المسائل التطبيقية قبل عقد الاجتماع أو اللقاء. وقد نصحك مستشارك العلمي بأن المدرسة ستكون في نهاية المساق الدراسي قادرة على توفير مستلزمات إدراج فريق الرياضيات كصف منهجي ضمن برنامجك. اعمد إلى صياغة خطط لتحسين برنامج تدريب لأعضاء الفريق، وما هي الموضوعات التي تخطط بتعليمها خلال الفترة المخصصة للدرس، على أن تورد تبريرات معقولة لقراراتك.

3 في أي صف من صفوف الرياضيات تحس بضرورة تحديد ورقة بحث المساق الدراسي أو المشروع كجزء لا يتجزأ من متطلبات استكماله؟ وكيف ستستجيب لطالب يشعر بأن هذا "العمل النظامي" هو مضيعة للوقت؟

4. ماذا ستفعل لكي تشجع الطلبة على المشاركة بأوراق ومقالات في معرض الرياضيات إذا لم يكونوا رافضين فكرة إعداد البحث وكتابة المقال ولكنهم يخشون تقديم عرض شفهي لاكتشافاتهم أما أنظار مجموعة من أقرانهم وفئة المحكمين؟.

5 افترض بأنك مستشار إدارة مجلة رياضيات المدرسة. حاول معالجة المسائل الآتية مع اقتراح حلول أولية لكل منها،

أ- هناك عدد محدود من الطلبة القادرين على بذل الجهد المطلوب لكتابة مقالات رصينة تستحق أن تدرج ضمن مقالات المجلة.

ب- إن عددا من المقالات قد تقدمت إلى المجلة لكي تدرج في ثناياها، ويخشى الطلبة العاملين في هيئة التحرير من رفض أي مادة مقدمة إلى المجلة خشية جرح مشاعر المؤلف وإغاظته بحيث لا يعاود تقديم مقال في المستقبل للمجلة.

ج- انخفاض مبيعات المجلة بشكل ملموس وعدم قدرتك على توفير النفقات المطلوبة لطباعتها وإخراجها.

د- نشوب خلافات بين أعضاء هيئة التحرير من الطلبة، كما أن رئيس التحرير قد استقال من منصبه قبل أسبوعين من صدورها.

6. اعد خطة للجمعية العمومية للرياضيات تستغرق خمس وأربعين دقيقة والتي يكمن هدفها الأساسي في إمتاع معظم المشاهدين والمستمعين من الطلبة وجذب اكبر عدد ممكن من حضورهم لاختيار مساقات الرياضيات في المساق الدراسي القادم.

7. بوصفك مستشارا لنادي الرياضيات، قمت بتهيئة متطلبات دعوة متحدث لإلقاء كلمة في لقاء النادي. كيف ستتعامل مع كل من الحالات الآتية:

أ- كانت محاضرة المتحدث خارج نطاق استيعاب الطلبة الحاضرين بحيث بدأ الطلبة بمغادرة القاعدة قبل انتهاء كلمة المحاضر.

ب- كان المتحدث ثقيل الظل، مثيرا للضجر، ويتكلم بصوت عال للطلبة، ويناقش أمور تافهة لحد كبير، بحيث بدأ يخسر مستمعيه.

ج- هبط عرض المتحدث إلى مستوى تقديم عروض للطلبة من اجل التقديم إلى الكلية التي يعمل المتحدث عضوا في إدارتها.

د- لم يبدو المتحدث بالمستوى المحدد له.

8. ناقش الفصل أساليب التخطيط للرحلة المدرسية، وتهيئة الطلبة لتلقي الخبرات التي سيصادفونها خلال الرحلة. ما هي طبيعة أنشطة-المتابعة المناسبة والتي يجب على الطلبة مباشرتها بعد عودتهم من الرحلة لكي تكون موردا تعليميا متكاملا.

9. افترض وقوع الاختيار عليك لتوجيه وإرشاد برنامج تعليم خصوصي للأقران الذي يديره قسم الرياضيات. وان جل المعلمين الخصوصين هم أعضاء الجمعية الفخرية للمدرسة، وفي صفوف متقدمة من القسم. إن الطلبة الذين يساهمون في إعطاء الدروس الخصوصية غالبا ما يشكون من الطلبة

الذين يتتلمذون على أيديهم، نظرا لكونهم: متغطرسين، ونافدي الصبر، ويعانون من بطء ملحوظ في التعلم، إضافة إلى كونهم يثيرون الإرباك في بعض الأحيان. إن تعليم الأقران الخصوصي هو نشاط إلزامي لأعضاء جمعية الشرف لكي يديموا بقاءهم فيها. كيف ستعالج هذا الموقف؟.

10 طلب منك المشرف عليك المحافظة على لوحة الإعلانات والبلاغات بمظهر جذاب وأنيق بوصفها مهمة محددة ومهنية تناط بك. وقد وجدت بأنها تعاني من احتوائها على أكوام غير مرتبة وتفتقر إلى التنظيم من: وثائق الصف الرسمية، وإشعارات حول الأنشطة القادمة، ومجموع نقاط الفريق، وتوقيتات الحاسوب، و "مسألة الأسبوع"، وفقرات أخرى متنوعة.

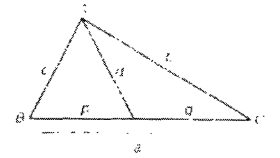
ما هي الخطوات التي ستتخذها لإعادة النظام والترتيب لهذه الفوضى، وكيف ستعمل على تطوير لوحة البيانات والبلاغات التي سيفخر بها قسم الرياضيات؟.

ملاحظات لفريق الرياضيات
Notes For Mathematics Team

خصائص المثلث Triangle Properties

نظرية ستيوارت Stewarts Theorem

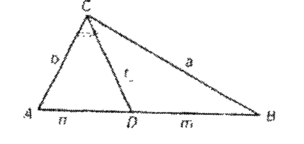
$Pb^2 + qc^2 = a(d^2+pq)$



علاقات منصف الزاوية:

1 $a : b = m : n$

2 $t^2cab - mn = t_c^2$



3 $t_c = \frac{2\sqrt{abs(s-c)}}{a+b}$

4 إن نقطة تقاطع منصفات الزوايا هي مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث.

علاقات المستقيم المتوسط بالمثلث:

1 $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

2 $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

3. $(a+b+c) > (m_a + m_b + m_c) > \frac{3}{4}(a+b+c)$

4. إن المستقيمات المتوسطة في المثلث تتلاقى في نقطة واحدة تقسم المستقيم المتوسط إلى ثلاثة أقسام متساوية.

5 يقسم المستقيم المتوسط المثلث إلى مثلثين متساويين بالمساحة.

6 في مثلث قائم الزاوية، فإن المستقيم المتوسط للوتر (أ) يقسم المثلث إلى مثلثين متساويي الساقين، (ب) يساوي نصف طول الوتر.

علاقات ارتفاع المثلث:

1. $ah_a = bh_b = ch_c = 2\,\mathcal{A}$ (حيث تمثل $\mathcal{A}$ المساحة).

2. $a : \frac{1}{h_a} = b : \frac{1}{h_b} = c : \frac{1}{h_c} = 2\mathcal{A}$

أو $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = bc : ac : ab$

3. $h_c = \frac{ab}{2R}$ (حيث تمثل R محيط نصف القطر Circumradius)

مساحة مثلث:

1. $\mathcal{A} = 1/2\ ah_a$

2. $\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin C$

3. $\mathcal{A} = \frac{abc}{4R}$ (حيث تمثل R محيط نصف القطر)

4. $\mathcal{A} = rs$ (حيث تمثل r نصف القطر الداخلي)

5. $\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (حيث تمثل s شبه محيط الشكل Semi perimeter) (صيغة هيرون Heron)

6. $\mathcal{A} = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2\sin(A+C)}$

7. بالنسبة للمثلث متساوي الأضلاع $\mathcal{A} = \frac{S^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}$

(حيث تمثل S الضلع، h الارتفاع).

8. إن نسبة مساحتي المثلثين اللذين يمتلكان زاوية بنفس القياس تساوي نسبة حاصل ضرب أطوال زوج الأضلاع التي تحد الزاويتين المتطابقتين.

الدوائر الماسة والمحيطة بمثلث:

1. $r=\frac{a}{s}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ ، حيث تمثل r نصف القطر الداخلي).
2. R = abc / 4ᗡ (حيث تمثل R محيط نصف القطر)
3. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$
4. نصف قطر الدائرة الماسة $r_a=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

لإيجاد قياس زاوية في مثلث:

$$\text{Cos}\,A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$ (قانون جيوب التمام)

ثلاثيات فيثاغورث:

$a^2+b^2=c^2$

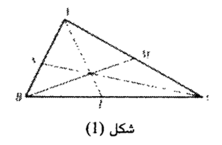
حيث.

$a=u^2-v^2$; $b=2uv$; $c=u^2+v^2$ and $u>v$

للأعداد الصحيحة u، v

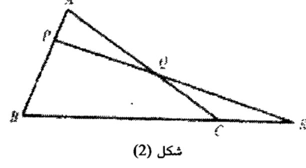
نظرية الخط المستعرض Transversal Theorem

1. في الشكل (1)، $\overline{AL}$ ، $\overline{BM}$ ، $\overline{CN}$ مستقيمات تتلاقى في نقطة واحدة. وعليه AN.BL.CM = AM.BN.CL (نظرية شيفا).



شكل (1)

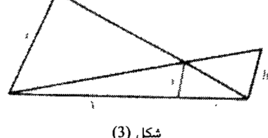
2. في الشكل (2)، تقع النقاط P،Q،R على خط مستقيم، وعليه فإن: AP.BR.CQ=AQ.BP.CR (نظرية مينيلاوس).



شكل (2)

3. في الشكل(3)، المستقيمات a، b، c متوازية، وعليه:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c};\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$$



شكل (3)

خصائص المضلع Properties of Polygons

1. مجموع قياسات الزوايا الداخلية = 180° (n-2)، حيث n = عدد الأضلاع.
2. مجموع قياسات الزوايا الخارجية = 360°.
3. في المضلع متساوي الزوايا:

أ. قياس كل زاوية من زواياه الداخلية = 180 – (قياس الزاوية الخارجية)

ب. قياس كل زاوية من زواياه الداخلية= $\frac{(n-2)180°}{n}$.

ج. قياس كل زاوية من زواياه الخارجية = $\frac{360°}{n}$.

المضلعات المنتظمة Regular Polygons

1. المثلث: $\mathcal{A}=\frac{S^2\sqrt{3}}{4}=\frac{h^2\sqrt{3}}{3}=\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}$
2. الشكل الخماسي Pentagon:

$$S=\sqrt{2r\sqrt{5}-2\sqrt{5}}=\frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

3. الشكل السداسي Hexagon:

$$S=R,\ \mathcal{A}=\frac{3}{2}R^2\sqrt{3}=2r^2\sqrt{3}$$

4. الشكل الثماني Octagon:

$$S=2r(\sqrt{2}-1)=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

5. الشكل عشري الزوايا Decagon:

$$S=\frac{2}{5}r\sqrt{25-10\sqrt{5}}=\frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1)$$

6. الشكل ذي الاثنى عشر زاوية Dodecagon: $\mathcal{A}=3R^2$
7. العام General: $\mathcal{A}=\frac{1}{2}ap=\frac{1}{2}rp$

(حيث a = apothem ، p = المحيط).

مساحات الأشكال الرباعية Quadrilaterals

1. المستطيل Rectangle $\text{Ɑ} = bh$
2. المربع Square $\text{Ɑ} = S^2 = \frac{1}{2}d^2 = 2R^2 = 4r^2$
3. متوازي الأضلاع Parallelogram $\text{Ɑ} = bh = ab\sin c$
4. المعين Rhombus $\text{Ɑ} = bh = \frac{1}{2}d_1, d_2 = ab\sin c$
5. المعين المنحرف Trapezoid $\text{Ɑ} = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$

نظريات متنوعة حول المثلث والشكل الرباعي

1 مجموع أطوال الأعمدة المقامة على ساقي المثلث متساوي الساقين، من أي نقطة على قاعدته تساوي ارتفاع أحد الساقين.

2 في المثلث متساوي الأضلاع، يكون مجموع أطوال الأعمدة المقامة من أية نقطة على الأضلاع الثلاثة مساويا لطول ارتفاع.

3. في الشكل الرباعي المرسوم داخل لدائرة، فإن مجموع الأضلاع المتقابلة متساويا.

4 في الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة، فإن مجموع حاصل ضرب أطوال الأضلاع المتقابلة مساويا لحاصل ضرب أطوال قطرية (نظرية بطليموس).

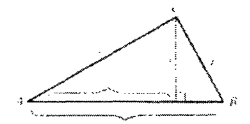
5 إن مساحة الشكل رباعي الأضلاع – الدائري (يعني، الشكل الرباعي المرسوم داخل للدائرة) مساويا $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ (صيغة براهماجوبتا Brahmagupta's formula).

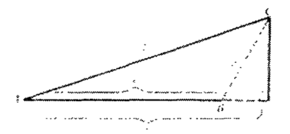
6 في أي متوازي أضلاع، فإن مجموع مربعات أطوال قطريه يكون مساويا لمجموع مربعات جميع أطوال أضلاعه.

7 في أي مثلث الذي طول أضلاعه 13، 14، 15، يقسم h_{14} الضلع 14 إلى قطعتين 5، 9 و h_{14} يساوي 12.

8. في أي مثلث، فإن مربع طول الضلع المقابل للزاوية الحادة يساوي مجموع مربعات أطوال الضلعين الآخرين مطروحا منه ضعف حاصل ضرب طول أحد هذين الضلعين، وطول المسقط الناشئ عن الضلع الآخر عليه.

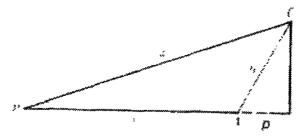
(بالنسبة للمثلث ABC: $a^2 = b^2 + c^2 - 2pc$)





9 في أي مثلث منفرج الزاوية، فإن مربع طول الضلع المقابل للزاوية المنفرجة يساوي مجموع مربعات أطوال الضلعين الآخرين مضافا إليه ضعف حاصل ضرب طول أحد هذين الضلعين وطول مسقط الضلع الآخر عليه.

(بالنسبة للمثلث منفرج الزاوية ABC: $a^2 = b^2 + c^2 + 2cp$)



نظريات متنوعة عن المحيط والمساحة
Miscellaneous Theorems on Perimeter and Area

1. في جميع المثلثات التي تمتلك نفس القاعدة ومساحات متساوية، فإن المثلث متساوي الساقين يمتلك المحيط الأقل.
2. في جميع المثلثات التي تمتلك نفس القاعدة وتتساوى محيطاتها، فإن المثلث الذي يتطابق ضلعاه الآخران يمتلك المساحة الأكبر.
3. في كل متعددة الأضلاع المنشأة بنس الأضلاع المعطاة وبنفس الترتيب المعطى والتي يمكن رسمها داخل دائرة تمتلك المساحة الأكبر.
4. في متعددي الأضلاع اللذان يتساوى محيطيهما، فإن الشكل الذي يمتلك العدد الأكبر من الأضلاع يمتلك المساحة الأكبر.
5. إذا أنشئت متعددات أضلاع على الأضلاع الثلاثة لمثلث

قائم الزاوية، فإن مجموع مساحات الأشكال متعددة الأضلاع المقامة على الساقين تساوي مساحة متعدد الأضلاع المقام على الوتر (هذا توسيع في نظرية فيثاغورث).

نظرية بابوس Pappus's Theorem

إن الحجم الناتج عن حركة مقطع مستو خلال الفراغ يساوي حاصل ضرب مساحة مقطع المستوي وطول مسار مركز ثقل مقطع المستوي.

بعض حقائق نظرية العدد

Some Number Theory Facts

1 قابلية القسمة على 2: آخر رقم من العدد يكون زوجيا.
2 قابلية القسمة على 3: مجموع الأرقام يقبل القسمة على 3.
3 قابلية القسمة على 4: عندما يعمل آخر رقمين كعدد مستقل يقبلان القسمة على 4 (مثال: 7812).
4 قابلية القسمة على 5: آخر رقم يكون 0 أو 5.
5 قابلية القسمة على 6: القواعد الخاصة بقابلية القسمة على 2 و 3.
6 قابلية القسمة على 8: عندما تعمل الأرقام الثلاثة الأخيرة كعدد مستقل يقبلون القسمة على 8 (مثال: 57256).
7 قابلية القسمة على 9: مجموع الأرقام يقبل القسمة على 9.
8 قابلية القسمة على 10: آخر رقم يساوي صفرا.
9. قابلية القسمة على 11: الفرق بين مجاميع الأرقام المتناوبة يقبل القسمة على 11.
10. قابلية القسمة على 12: قواعد قابلية على 3 و 4.
11. نظرية فيرمات: مضاعف p= N^{p-1}، حيث أن p هو عدد أولي، N عدد أولي بالنسبة إلى p (مثال: $3^{7-1} - 1$ هو مضاعف 7).

التحليل العاملي Factoring

1. بالنسبة لقيم e الفردية:

$$x^e + y^e = (x+y)\,(x^{e-1} - x^{e-2}y + x^{e-3}y^2 \,.......\, + y^{e-1})$$

2. لجميع قيم e:

$$x^e - y^e = (x-y)\,(x^{e-1} - x^{e-2}y + x^{e-3}y^2 \,.......\, + y^{e-1})$$

3. بالنسبة لقيم e الزوجية:

$$x^e + y^e = (x^{e/2}+y^{e/2})\,(x^{e/2}-y^{e/2})$$

نظرية ذات الحدين Binomial Theorem

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + ...+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + ... + b^n$$

اللوغاريتمات Logarithms

1 $\log_a b = x$ تعني $a^x = b$

2. $(\log_a b)\,(\log_a c) = \log_e c$

المتباينات Inequalities

1. $a + \frac{1}{a} \geq 2$

2. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

3. $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$

المتوسطات Means

1. $AM \geq GM \geq HM$ المتوسط الحسابي (AM) = $\frac{a+b}{2}$

2. $(AM)(HM) = (GM)^2$ المتوسط الهندسي (GM) = $\sqrt{ab}$

المتوسط التوافقي (HM) = $\frac{2bc}{a+b}$

Suggested References مراجع مقترحة

Altshiller-Court, Nathan A. College Geometry. New York: Barnes & Noble, 1952.

Barnett, I.A. Elements of Number Theory. Boston: Prindle, Weber & Schmidt, 1972.

Berggren, L.,J. Borwien, and P. Borwien. Pi: A Source Book New York: Springer, 1997.

Bruckheimer, Maxim, and Rina Hirshkowiz. "Mathematics Projects in Junior High School." Mathematics Teacher 70 (1977): 573.

Chrystyal, G. Textbook of Algebra. 2 Vols. New York: Chelsea, 1964.

Courant, Richard, and Herbert Roddins. What Is Mathematics? New York: Oxford University Press, 1941.

Coxeter, H.S.M., and S.L. Greitzer. Geometry Revisited. New York: Random House, 1967.

Davis, David R. Modern College Geometry. Reading, MA: Addison-Wesley, 1949.

Dudley, Underwood, A Budget of Trisections. New York: Springer, 1987.

Elgarten, Gerald H. "A Mathematics Intramurals Contest." Mathematics Teacher 69 (1976): 477.

Farmer, David W., and Theodore B. Sanford. Knots and Surface: A Guide to Discovering Mathematics. Providence, RI: American Mathematics Society, 1996.

Gorini, Catherine A., Ed. Geometry at Work: A Collection of Papers Showing Application of Geometry. Washington. DC: Mathematical Association of America, 2000.

Hall, H.S., and S.R. Kinght. Higher Algebra. London: Macmillan, 1960.

Holmes, Joseph E. "Enrichment or Acceleration?" Mathematics Teacher 63 (1970): 471.

House, Peggy A. Interaction of Science and Mathematics. Columbus, OH: ERIC Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1980.

Ippolito, Dennis. "The mathematics of The Spirograph." Mathematics Teacher 92 (1999): 354-357.

James, Robert C., and Glenn James, Eds. Mathematics Dictionary, 4th ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1976.

Johnson, Roger A. Modern Geometry. Boston: Houghton Miffin, 1929.

Jones, Mary H. "Mathematics: A New Junior High School Mathematics Composition." Mathematics Teacher 76 (1982): 482.

Karush, William. The Crescent Dictionary of Mathematics. New York: Macmillan, 1962.

Leonard, William A. No Upper Limit; The Challenge of the Teacher of Secondary Mathematics. Fresno, CA: Creative Teaching Assoc., 1977.

Lichtenberg, Betty K. "Some Excellent Sources of Material for Mathematics Clubs." Mathematics Teacher 74 (1981): 284.

Martin, George E. Geometric Construction. New York: Springer, 1998.

Morgan, F., E.R. Melnick, and R.Nicholson. "The Soap-Bubble-Geometry Contest." Mathematics Teaher 90 (1997): 746-750.

Morgan, Frank. The Math Chat Book. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Newman, James R. The World of Mathematics. 4 vols. New York: Simon & Schuster, 1956.

Olds,C.D. Continued Fractions. New York: Random House, 1963.

Posamentier, Alfred S. Advanced Euclidean Geometry: Excursion For Secondary Students and Teachers. Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

Posamentier, Alfred S. Making Algebra Come Alive. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Posamentier, Alfred S. Making Geometry Come Alive. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Posamentier, Alfred S. Making Pre-algebra Come Alive. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Sadovskii, L.E. and A.L. Sadovskii. Translated by S.Makar-Limanov. Mathematics and Sports. Providence RI: American Mathematical Society, 1996.

Schaaf, William L., Ed. A Bibliography of Recreational Mathematics. 4vols. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1978.

Smith, David E., Ed. Source Book in Mathematics. New York: Mc Graw-Hill, 1929.

Wright, Frank. "Motivating Students with Projective and Teaching Aids." Mathematics Teacher 58 (1965): 47.

مصادر لأنشطة لامنهجية

Resources For Extracurricular Activities

History of Mathematics تاريخ الرياضيات

Ball, W.W. Rouse. A Short Account of the History of Mathematics. New York: Dover, 1960.

Bell, E.T. Men of Mathematics. New York: Simon & Schuster, 1937.

Bell, E.T. Mathematics, Queen and Servant of Science Washington, DC: Mathematics Association of American 1979.

Boyer, Carl B.A History of Mathematics. New York: Wiley, 1968.

Bunt, Lucas N.H., Philip S. Jones, and Jak D. Bedient. The History Roots of Elementary Mathematics. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1976.

Cajori, Florian. A History of Mathematics Notations. 2 vols LaSalle, IL: Open Curt, 1928.

Campbell, Douglas M., and John C. Higgins, Eds. Mathematics: People, problem, Results. Belmont, CA: Wadsworth, 1984.

Eves, Howard. An Introduction to the History of Mathematics, 4th ed. New York: Holt, Rinehart & Winston, 1976.

Gray, Shirley B., and C. Edward Sandifer. "The Sumario Compendioso: The New World's First Mathematics Book." Mathematics Teacher 94 (2001): 98-103.

Hamburger, Peter, and Raymond E. Pippert. "Venn Said It Couldn't Be Done." Mathematics Magazine 73 (2000) 105-110.

Heath, Thomas L. Greek Mathematics. New York: Dover, 1963.

Kaplan, Robert. The Nothing That Is: A Natural History of Zero. New York: Oxford University Press, 1999.

Kelly, Loretta, "A Mathematical History Tour." Mathematics Teacher 93 (2000/) 14-17.

Mathematics Teacher 98 (November 2000) entire issue. Norwood, Rick. "A Star Guide Us." Mathematics Teacher 92 (1999): 100-101.

Posamentier, Alfred S., and Noam Gordon. "An Astounding Revelation on the History of π." Mathematics Teacher77 (1984): 52.

Resnikoff, H. L., and R. O. Wells, Jr. Mathematics in Civilization. New York: Dover, 1984.

Smith, David E. A Source Book in Mathematics. New York: McGraw-Hill, 1929.

Smith, David E. History of Mathematics. 2 vols. New York: Dover, 1953.

Van der Waerden, B. L. Science Awakening. New York: Wiley, 1963.

Mathematical Recreation استجمامات رياضية

Ball, W. W. Rouse, and H. S. M. Coxeter. Mathematical Recreations and Essays. New York: Macmillan, 1960.

Barbeau, Edward J. Mathematical Fallacies, Flaws, and Flimflam. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Bay, J. M., R. E. Reys, K. Simms, and P. M. Taylor. "Bingo Games: Turning Student Intuitions into Investigations in Probability and Number Sense." Mathematics Teacher 93 (2000): 200-206.

Beasley, John D. The Mathematics of Games. New York: Oxford University Press, 1989.

Benson, William, and Oswald Jacoby. New Recreations with Magic Squares. New York: Dover, 1976.

Caldwell, J. H. Topics in Recreational Mathematics. London: Cambridge University Press, 1966.

Cipra, Barry. Misteaks … and How to Find Them Before the Teacher Does. San Diego, CA: Academic Press, 1989.

Cundy, H. Martyn, and A. P. Rollett. Mathematical Models. New York: Oxford University Press, 1961.

Gardner, Martin. New Mathematical Diversions. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995.

Honsberger, Ross. Mathematical Morsels. Washington, DC: Mathematics Association of America, 1978.

Kahan, Steven. Take a Look at a Good Book: The Third Collection of Additive Alphametics for the Connoisseur. Amityville, NY: Baywood Publ. Co., 1996.

Kraitchik, Maurice. Mathematical Recreations. New York: Dover, 1942.

Madachy, Joseph. Mathematics on Vacation. New York: Charles Scribner's Sons, 1966.

Nelsen, Roger B. Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Northrop, Eugene. Riddles in Mathematics. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1944.

Ogilvy, C. Stanley. Through the Mathescope. New York: Oxford University Press, 1956.

Posamentier, Alfred S. Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students. Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

Posamentier, Alfred S. Advanced Geometric Constructions. White Plains, NY: Dale Seymour Publications, 1988.

Posamentier, Alfred S. Making Algebra Come Alive. Tousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Posamentier, Alfred S. Making Geometry Come Alive. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Posamentier, Alfred S. Making Pre-Algebra Come Alive. Thousand Oaks, CA: Corwin, 2000.

Schuh, Fred. The Master Book of Mathematical. Recreations. New York: Dover, 1968.

Stevenson, Frederick W. Exploratory Problems in Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1992.

Mathematics Clubs أندية الرياضيات

Carnahan, Walter H., Ed. Mathematics Clubs in High Schools. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1958.

Gtuver, Howell L. School Mathematics Contests: A Report. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

Hess, Adrien L. Mathematics Projects Handbook, Eashington, DC: National Council of Theachers of Mathematics, 1977.

Morgan, F., E. R. Melnick, and R. Nicholson. "The Soap-Bubble-Geometry Contest." Mathematics Teacher 90 (1997): 746-750.

Mu Alpha Theta. Handbook for Sponsors. Norman, OK: University of Oklahoma, 1970.

Ransom, William R. Thirty Projects for Mathematical Clubs and Exhibitions. Protland, ME: J. Weston Walch, Publisher, 1961.

Teppo, Anne R., and Ted Hodgson. "Dinosaurs, Dinosaur Eggs, and Probability." Mathematics Teacher 94 (2001): 86-92.

Problem Solving حل المسائل

Andreescu, Titu, and Zuming Feng. Mathematical Olympiads 1998-1999. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Artino, R. A., A. M. Gaglione, and Shell. The Contest Problem Book IV. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1982.

Berzenyi, G., and S. B. Maurer. The Contest Problem Book V. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1997.

Conference Board of Mathematical Sciences. The Role of Axiomatics and Problem Solving in Mathematics. Boston: Ginn, 1966.

Gardiner, Tony. Mathematical Challenge. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1996.

Gardiner, Tony. More Mathematical Challenges. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1997.

Hayes, John R. The Complete Problem Solver, 2d ed. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1989.

Holton, Derek. Let's Solve Some Math Problems. Waterloo, ON: Waterloo Mathematics Foundation, University of Waterloo, 1993.

Honsberger, Ross. From Erdos to Kiev, Problems of Olympiad Caliber. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1996.

Hudgins, Bryce B. Problem Solving in the Classroom. New York: Macmillan, 1966.

Krantz, Steven G. Techniques of Problem Solving. Providence, RI: American Mathematical Society, 1997.

Krulik, Stephen, and Jesse A. Rudnick. Problem Solving, A Handbook for Teachers. Boston: Allyn and Bacon, 1980.

Polya, George. How to Solve It. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1945.

Polya, George. Mathematics and Plausible Reasoning. 2 vols. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954.

Polya, George. Mathematical Discovery. 2 vols. New York: John Wiley, 1962.

Posamentier, Alfred S. Students! Get Ready for the Mathematics for SAT I: Problem-Solving Strategies and Practical Tests. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.

Posamentier, Alfred S., and Stephen Krulik. Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the

Mathematics Teacher. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1998.

Posamentier, Alfred S., and Stephen Krulik. Teachers! Prepare Your Students for the Mathematics for SAT I: Methods and Problem-Solving Strategies. Thousand Oaks, CA: Corwin Press, 1996.

Posamentier, Alfred S., and Wolfgang Schulz. The Art of Problem Solving: A Resource for the Mathematics Teacher. Thousand Oasks, CA: Corwin Press, 1996.

Schneider, Leo J. The Contest Problem Book VI. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

Whimbey, Arthur, and Jack Lochhead. Problem Solving and Comprehension, A Short Course in Analytical Reasoning. 2d ed. Philadelphia: Franklin Institute Press, 1980.

Wickelgren, Wayne A. How to Solve Problems. San Francisco: W. H. Freeman, 1974.

مصادر لمشاكل فريق الرياضيات

Sources for Mathematics Team Problems

Aref, M. N., and William Wernick. Problems and Solutions in Euclidean Geometry. New York: Dover, 1968.

Barbeau, E., M. Klamkin, and W. Moser. 1001 Problems in High School Mathematics. Montreal, PQ: Canadian Mathematics Congress, 1978.

Barbeau, E., M. Klamkin, and W. Moser. Five Hundred Mathematical Challenges. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1995.

Barry, Donald T., and J. Richard Lux. The Philips Academy Prize Examinations in Mathematics. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.

Brousseau, Brother Alfred, Ed. Mathematics Contest Problems. Palo Alto, CA: Creative Publications, 1972.

Bryant, Steven J., George E. Graham, and Kenneth G. Wiley. Nonroutine Problems in Algebra, Geometry, and Trigonometry. New York: McGraw-Hill, 1965.

Butts, Thomas. Problem Solving in Mathematics. Glenview, IL: Scott, Foresman, 1973.

Charosh, Mannis, Ed. Mathematical Challenges. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1965.

Comprehensive School Mathematics Program. E. M. Problem Book. 2 vols. St. Louis: CEMREL, 1975.

Dowlen, Mary, Sandra Powers, and Hope Florence. College of Charleston Mathematics Contest Book. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1987.

Dunn, Angela, Ed. Mathematical Bafflers. New York: McGraw-Hill, 1964.

Dunn, Angela, Ed. Second Book of Mathematical Bafflers. New York: Dover, 1983.

Edwards, Josephine D., Declan J. King, and Peter J. O'Halloran. All the Best From the Australian Mathematics Competition. Canberra, Australia: The Australian Mathematics Competition, 1986.

Engel, Arthur. Problem-Solving Strategies. New York: Springer, 1998.

Fisher, Lyle, and Bill Kennedy. Bother Alfred Brousseau Problem-Solving and Mathematics Competition. Introductory Division. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.

Fisher, Lyle, and William Medigovich. Brother Alfred Brousseau Problem-Solving and Mathematics.

Competition. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1984.

Gardiner, A. The Mathematical Olympiad Handbook: An Introduction to Problem Solving. New York: Oxford University Press, 1997.

Greitzer, Samuel L. International Mathematical Olympiads. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1978.

Hill, Thomas J., Ed. Mathematical Challenges II-Plus Six. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics, 1974.

Honsberger, Ross. In Polya's Footsteps; Miscellaneous Problems and Essays. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1997.

Polya, George, and Jeremy Kilpatrick. The Stanford Mathematics Book. New York:

Teachers College Press, 1974.

Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind. Challenging Problems in Algebra. New York: Dover, 1970, 1988, 1996.

Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind. Challenging Problems in Geometry. New York: Dover, 1970, 1988, 1996.

Rapaport, Elvira, trans. Hungarian Problem Book. 2 vols. New York: Random House, 1963.

Salkind, Charles T., Ed. The Contest Problem Book. New York: Random House, 1961.

Salkind, Charles T., Ed. The MAA Problem Book II. New York: Random House, 1966.

Salking, Charles T., and James M. Earl, Eds. The MAA Problem Book III. New York: Random House, 1973.

Saul, Mark E., G. W. Kessler, Sheila Krilov, and Lawrence Zimmerman. The New York City Contest Problem Book. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1986.

Shklarsky, D. O., N. N. Chentzov, and I. M. Yaglom. The U. S. S. R. Olympiad Problem Book. San Francisco: W. H. Freeman, 1962.

Sitomer, Harry. The New Mathlete Problem Book. Nassau County, NY: Interscholastic Mathematics League, 1974.

Steinhaus, Hugo. One Hundred Problems in Elementary Mathematics. New York: Pergamon Press, 1963.

Straszewicz, S. Mathematical Problems and Puzzles from the Polish Mathematical Olympiads. New York: Pergamon Press, 1965.

Trigg, Charles W. Mathematical Quickies. New York: McGraw-Hill, 1967.



وحدات إثرائية لصفوف المدرسة الثانوية
Enrichment Units for The Secondary School Classroom

هناك الكثير من الموضوعات الرياضية التي تصلح لأن تكون مادة إثرائية للمساقات الدراسية بمادة الرياضيات في المدرسة الثانوية. ونستطيع بدورنا أن نلتقط هذه الموضوعات ونقتنصها من جميع حقول الرياضيات وفروعها، وسيسهم هذا الأمر كثيرا وبوضوح في تقوية دعائم معايير NCTM.

إن حب الاستطلاع العددي Numerical Curiosities، والتحريات الجبرية للعلاقات العددية والظواهر الهندسية لا تتوفر غالبا لهذا الحضور، يضاف إلى ذلك غياب الكثير من الموضوعات الأخرى في مناهج المدارس الثانوية والكليات، ولكنك ستجد جميعها متوزعة بين الوحدات المدرجة في هذا القسم من الكتاب.

إن معاينة موضوع شائع وتقليدي من خلال منظور غير تقليدي سوف يوفر، بالتأكيد، مناخا إثرائيا خصبا لدى المستمع المناسب. وان محاولة تزويد الطلبة بأنشطة إثرائية، بصورة خفية ومبطنة، تكمن في اللجوء إلى عرض المادة بأسلوب متقدم يوظف بذكاء، وبأسلوب محفز جذاب. ولسوف يرشدنا هذا التحدي الهادف وينير الدرب أمامنا من خلال الوحدات التي عرضت في هذا القسم من الكتاب. ولكن ينبغي أن لا يغيب عن أذهاننا – من البداية – بأن الأنشطة الإثرائية ليست مقصورة على الطلبة النابهين والمتفوقين فقط. وكما ستلاحظ خلال هذا القسم من الكتاب، فهناك الكثير من الأنشطة الإثرائية التي يمكن استخدامها بنجاح مع الطلبة من ذوي الإمكانيات المتوسطة، بالإضافة إلى استخدامها في الصفوف العلاجية، شريطة اعتماد تعديلات مناسبة لكل منها. بصورة طبيعية: فإن هذه التعديلات في العرض (في كل من المحتوى، وأسلوب العرض) سوف تكون على يدي معلم المادة الذي يستخدم المادة، حصرا. مع دوام هذا الأمر عالقا في أذهاننا، دعنا نتأمل الصيغة التي ستعرض من خلالها هذه الوحدات الإثرائية.

تعالج كل وحدة إثرائية موضوعا قائما بذاته، ومع بعض الاستثناءات، يمكن أن تعالج الموضوعات بأي ترتيب تقريبا دون وجود محددات على تسلسل ورودها.

بعد طرح مقدمة مبسطة عن الوحدة، شرعنا ببيان "أهداف الأداء" التي تمتاز بها الوحدة. ولن تؤدي الأهداف بمفردها على إحكام محتويات الوحدة فحسب، ولكنها ستوفر، أيضاً، مؤشرا واضحا ومفيدا عن مجال المادة التي عنيت بمعالجتها. لذا ستستطيع أن تحدد، وبصورة افضل، مدى ملائمة الوحدة للصف، بعد تقديم تقييم أولي لها. وبالإضافة إلى مساعدتك على التحقق من جاهزية طلبتك ومدى استجابتهم لمادة الوحدة، فإن هذا القسم سيسهم بدوره كمورد خصب للتحفيز الذي تأمل باستخدامه في عرض الموضوع أمام طلبتك. وسيعرض في القسم القادم، استراتيجيات التعليم Teaching Strategies، الموضوع الإثرائي بطريقة تمكنك من استخدامها في عرض المادة على الصف الذي تقوم بتعليمه. وقد تم تطوير الموضوع، في هذا المقام، بعناية بالغة، وبعين تشخص نحو استباق حصول الإخفاقات المحتملة، مع ضمان قدرة الطلبة على التغلب على الصعوبات التي ستشخص أمامهم. كذلك تم تبني أسلوب المحادثة، في كل مواطن الوحدات الإثرائية، وذلك لجعل عملية القراءة والمتابعة أكثر استرخاء. وقد قدمت اقتراحات، بين الفينة والأخرى، للتوسع في معالجة الموضوع، بحيث لا تبدو الوحدة أمام الطالب مبتورة وعديمة الصلة بالموضوعات القريبة منها. ولا شك بأن الهدف الذي يكمن طوال الطرح الموضوعي لهذه الوحدات هو إتاحة فرصة مناسبة للطلبة كي يكونوا نقطة وثوب نحو مزيد من التحري والبحث. وقد راعينا عرض مصادر إضافية، كلما كان الأمر مناسبا، لفتح الأبواب على مصاريعها أمام دراسات وتنقيبات إضافية.

إن إحدى الطرق الأكثر كفاءة لتحديد مدى الوصول إلى الأهداف المتوخاة لوحدة معينة هي تلك التي ستعتمد مبدأ مساءلة الطلبة حول الموضوع الذي طرح عليهم. وقد تم توفير عينة من المسائل في قسم التقييم اللاحق في نهاية الوحدة. وأنت مدعو لأن تضيف إلى هذه الأسئلة جملة مما تراه مناسبا في ضوء حاجة الصف لها.

ونظرا لأن هذه الوحدات الإثرائية يمكن أن تستخدم على شريحة واسعة من صفوف الرياضيات، ولطلبة بمستويات متباينة من القابليات والقدرات الرياضية، فقد تم توفير جدول بقائمة تفصيلية يسهل استخدامه. وسيساعدك الجدول على

اختيار الوحدات الإثرائية وفقا: للموضوع، ومستوى الصف، ومستوى قابلية الطالب.

بصورة طبيعية، ستحتاج إلى إجراء بعض التعديلات في الشكل لجعل الوحدة تتلاءم مع متطلبات الحاضرين. تدعم كثير من هذه الوحدات ، وبصورة واضحة جدا، معايير NCTM الخاصة بإعداد الارتباطات، نظرا لأنها توضح كيف إن الموضوعات والمفاهيم التي تعلم بطريقة تقليدية يمكن أن تستخدم بأسلوب مثمر وخصب بمحتوى غير متوقع بصورة كلية!.

بصورة عامة، وجدنا لزاما علينا أن نبذل كل ما في وسعنا من طاقة في إدخال الأنشطة الإثرائية بجميع مفردات الرياضيات التي تنهض بأعباء تعليمها، وبصرف النظر عن قابليات الطالب الرياضية. إن مثل هذه الأنشطة ستكون مجرد مكافأة في الصف العلاجي كما هو الحال في صف يحوي طلبة متفوقين. وان الفائدة، رغم ظهورها وجلاءها بصورة مختلفة، ستكون مقاربة وملموسة في جميع الصفوف على حد سواء.

قائمة تفصيلية-متقاطعة للوحدات الإثرائية
Cross-Catalogue of Enrichment Units

لتيسير استخدام الوحدات الإثرائية الموجودة في هذا القسم، وتسهيل الوصول إليها، تم توفير قائمة تفصيلية-متقاطعة. وقد أدرجت الوحدات بنفس الترتيب الذي تم عرضها فيه خلال هذا القسم. يضاف إلى ذلك، فقد تم تزويدها بأرقام صفحات كل وحدة، ومستوى الصف، ومستوى القابلية، وفرع الرياضيات الذي ترتبط به وتنتمي إليه كل وحدة من هذه الوحدات. إن هذه التقييمات هي ببساطة ما يعتقده المؤلفون، وبعض معلمي الرياضيات بالمدارس الثانوية، وقد تمارس هذه الوحدات مع طلبة يختلفون عن الذين ذكروا في القائمة.

ستلاحظ بأن كل مستوى قابلية : العلاجي، والمتوسط، أو المتفوق قد تم تقسيمها إلى أربعة أقسام لمستوى الصف: 8 - 7 ، 9. 10. 11-12.

وبالنسبة للطالب المعالج، بصورة عامة، تمثل الصفين 8-7 لمساقات الرياضيات الدراسية في المدارس الثانوية الدنيا، وفي الصفين 9 و 10 رياضيات عامة أو متقدمة لعلوم الجبر. وتوجد في الصفين 12-11 تتمة للمساقات الدراسية السابقة ولكن مع درجة أكبر من التعقيد والمعالجة الأكثر عمقا.

إن قاطع الطالب المتوسط يشير إلى برنامج المدارس الثانوية الدنيا لمادة مقدمات الجبر للصفين 8-7، والجبر الأولي للصف 9. ومساق الهندسة الدراسي للمدارس الثانوية للصف 10، والمساق الدراسي للسنة الثانية بمادة الجبر (مع حساب المثلثات) وما يتجاوزها للصفين 12-11.

ورغم إن الطلبة المتفوقين والمتميزين، غالبا ما يبدؤون بدراسة الجبر الأولي في الصف الثامن (أو بمرحلة مبكرة)، وطلبا للبساطة سوف نستخدم نفس مفردات المنهج للطلبة المتميزين كما هو الحال عليه لدى الطلبة المتوسطين (المشار إليهم أعلاه). وقد افترض عند هذه النقطة توفر قابليات متميزة في مادة الرياضيات وتقانات تطبيقاتها.

يشير الرقمان 1 و 2 إلى المستمعين بفئتيهم الأولية والثانوية لكل وحدة من الوحدات. وهذا الأمر يدل ضمنا على ضرورة إحداث تغييرات في الوحدات (والتي تعد ضرورية) بحيث تتناسب مع كل مرحلة من المراحل في ضوء ما تراه مناسبا. بصورة طبيعية، هناك بعض التعديلات التي ينبغي إجراؤها على الوحدات، وهناك وحدات أخرى بحاجة إلى أن تخفف وتبسط "Watered down" للطلبة الضعفاء بالرياضيات، بينما ستكون بعض الوحدات للطلبة المتفوقين-اليافعين نقطة وثوب نحو المزيد من التحريات والتنقيبات في أعماق مادة الرياضيات.

التقديرات Ratings

1. استخدام أولي (مخصص للمستمع المحدد حصرا).
2. استخدام ثانوي (يمكن استخدامه لذاك المستمع مع إجراء بعض التعديلات).

هناك عامل مهم آخر ينبغي أن يؤخذ بنظر الاعتبار عند اختيار الوحدة الإثرائية هو فرع الرياضيات الذي يرتبط بها. ويعد هذا الأمر بالغ الصعوبة بالنسبة لكثير من الوحدات التي لا يمكن الفصل بينها، نظرا للعلاقات المتعددة التي تربطها مع عدة فروع بمادة الرياضيات. إن استخدام نظام التصنيف الآتي، والذي تم إدراجه في "الموضوع" Subject سيؤشر بوضوح نحو فروع الرياضيات المختلفة التي ترتبط بهذه الوحدة. وبالرغم من أن ممارسة عملية تغيير ترتيب الفروع يمكن أن يتم إجراؤها بسهولة ودون إحداث تغيير ملموس في دقتها الموضوعية، إلا أننا قد حاولنا إدراج فروع الرياضيات بترتيب تنازلي Desending وبحسب ارتباطها بكل وحدة، وفي ضوء القرار الذي اتفقت عليه مجموعة من معلمي الرياضيات.

تصنيف الموضوع Subject Code

1. علم الحساب. Arithmetic.
2. نظرية العدد Number Theory.
3. الاحتمالات Probability.
4. المنطق Logic.
5. الجبر Algebra.
6. الهندسة Geometry.
7. الهندسة التحليلية Analytic Geometry.
8. الطوبولوجيا Topology.
9. الإحصاء Statistics.
10. حل المسائل Problem Solving.
11. تطبيقات Applications.
12. الفضول الرياضي Mathematical Curiosities.

رقم الصفحة	صفوف متميزة ومتفوقة Gifted Classes				صفوف متوسطة Average Classes				صفوف علاجية Remedial Classes				الموضوع	موضوع الإثراء	
	12–11	10	9	8–7	12–11	10	9	8–7	12–11	10	9	8–7			
320							2	1	2	1	1	1	1،4،12	إنشاء مربعات سحرية بنسق فردي	1
322							2	1	2	1	1	1	1،12	إنشاء مربعات سحرية بنسق زوجي	2
325			2	1			1	1	1	1	2	2	1،4	مقدمة إلى العد الحرفي Alphametic	3
327			2	2			2	1	2	1	1	1	1،12	حاسبة لعبة الداما	4
330			2	2			2	1	1	1	1	2	4،1،12	لعبة Nim	5
332			2	2			1	1	1	1	2	2	4،1،12	برج هانوي	6
334	2		2	1			1	1	1	1	2	2	4،1،12	أي يوم كان من الأسبوع ؟	7
340	2		1	1	2		1	1	2	2	1	1	2،1،12	الأعداد المشقلبة Palindromic	8
343			2	1			2	1	1	1	1	2	1،2،12	العدد الآسر تسعة 9	9
345			2	1			2	1	1	1	1	2	1،2،12	خصائص العدد الفريد	10
348			2	1			2	1	1	1	1	1	1،2،12	إثراء بآلة حاسبة–يدوية	11
351			2	1	2		2	1	1	1	1	2	1،2،12	المضاعفة المتناسقة	12
353	2		2	1	2		2	1	1	1	1	2	1،2،12	التغييرات على موضوع الضرب	13
356	2		1	1	2		2	1	1	2	2		1،2	علم الحساب في مصر القديمة	14
359		2				2	2	1	1	1	1	1	1،2،11	قضبان نابير.	15
360							2	1	1	1	1	1	1،11	وحدة تسعير	16
361			2	1	2		1	1	1	1	2	2	1،11،12	الحسومات والزيادات المتعاقبة	17
363							2	2	2	1	1	1	1،2	العوامل الأولية والمركبة للعدد الصحيح	18
365				1	2		1	2	1	1	2		2،1،12	نظام العد الأولي	19
368				2	2		1	2	2				2،1	التوسعات بالمراتب العشرية المتكررة	20
370			2	1	2		1	1					2،1،12	خصوصيات التكرار المثالي للمراتب العشرية	21
372			2	2			1	1	2	2			4،5	الأنماط في الرياضيات	22
374				2			2	1	2	1	1	2	1،12	الأعداد الكبيرة.	23
377	2		1	2	1		2		2	2			3،9،5	رياضيات التأمين على الحياة	24
379		2	1	1		1	1	1	2	2			6،4،10	التجزئة الهندسية	25
382	2	1	1	1		2	1	2					8	قنينة كلاين Klein	26

رقم الصفحة	صفوف متميزة ومتفوقة Gifted Classes				صفوف متوسطة Average Classes				صفوف علاجية Remedial Classes				الموضوع	موضوع الإثراء	
	12–11	10	9	8–7	12–11	10	9	8–7	12–11	10	9	8–7			
384			2	1	2	1	1	1					8،4	مسألة الخارطة ذات الألوان الأربعة	27
386				2		2	2	1	1	1	2		1،4،6	رياضيات حول الدراجة	28
389	2		1	1	2	2	2						1،11	الرياضيات والموسيقى	29
392	2	2	1	1	2	1	1	1	2	2	2		11،12،2	الرياضيات في الطبيعة	30
395	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2			3،12،11	مسألة يوم الميلاد	31
397			1	1	1	2	1	2					1،5	هيكل نظام الأعداد	32
399	2		2	1	2	2	1	1	2	2	2		2،1،5	نزهات في قواعد الأعداد	33
402	2		1	1	1	1	1						5،11	زيادة الفائدة	34
404		2	1	1	1	1	1						4،2	علاقات انعكاسية، وتماثلية وانتقالية	35
407		1	1		1	1	2						6،10	تجاوز منطقة يصعب الوصول إليها	36
409		1	1		1	1	2						6،10	زاوية يصعب الوصول إليها	37
411	1	1	1		1	1	2						6،10	إنشاءات المثلث	38
413	1	1	1		1	1							6،5	معيار قابلية البناء	39
416	2	1	1		1	1	2						6،5	إنشاء أطوال جذرية	40
417	1	1	1		1	1	1						6،5	إنشاء شكل خماسي	41
419	1	1	2		1	1							6،12	تحري مغالطات المثلث متساوي الساقين	42
421	2	1	2		1	1							6	نقطة متساوية الزوايا	43
423	2	1	2		1	1							6	النقطة الأقصر مسافة بمثلث.	44
426	2	1	2			1							6،10	إعادة زيارة المثلث متساوي الساقين	45
429	2	1	1		1	1	2						6،11	الخصائص الانعكاسية للمستوى	46
431		1			1	1	2						6،5	إيجاد طول سيفيان بمثلث.	47
434		1	2		2	1							6،10	تحدي مدهش	48
435		2	1	1	1	1	1	2					6	عمل اكتشافات في الرياضيات	49
437	2	1	1	2	1	1	2	2					6،5	مرصعات الفسيفساء	50
439	2	1	1		2	1	1						6،2،5	تقديم نظرية فيثاغورث	51
442	2	1	1	2	1	1	1	2					6،5،12	عودة إلى التقسيم الثلاثي للزوايا	52
445	2	1	2		2	2							6،10	برهنة تلاقي المستقيمات	53

رقم الصفحة	صفوف متميزة ومتفوقة Gifted Classes				صفوف متوسطة Average Classes				صفوف علاجية Remedial Classes				الموضوع	موضوع الإثراء	
	12–11	10	9	8–7	12–11	10	9	8–7	12–11	10	9	8–7			
447	2	1	1		2	1							6،10	مربعات	54
449	1	1	2		2	2							6،10	برهنة تسامت (استقامة) النقاط	55
451		1	2			1							6	قياس الزاوية بواسطة دائرة	56
453	2	1	1		2	1	1						6،12	تقسيم الدائرة إلى ثلاثة أقسام متساوية	57
456	2	1	1		1	1	2						6،10	مبرهنة بطليموس	58
458	2	1	1		1	1	2						6،1	إنشاء π	59
461	1	1	1		1	1	2						6،5	الأربيلوس.	60
463	2	1	1	2	2	1	2	2					6	دائرة بتسعة نقاط	61
465	2	1	1	2	2	1	2						6	خط ايلر Euler	62
467	2	1	1	2	1	1	2	2					6	خط سمسون Simson	63
469	1	1	1	2	2	1	2	2					6،10	مسألة الفراشة	64
472	1	1	2		2	1							6،5	الدوائر المتساوية	65
474	1	1	2		2	2							6،5	الدائرة المماسة والمثلث قائم الزاوية	66
477	2	1	1		1	1	2						6،5،2	المستطيل الذهبي	67
480	1	1	1		1	1							6،5	المثلث الذهبي	68
482	2	1	1		1	1			2				6،5	مغالطات هندسية	69
485	1	1	1	2	1	2	2							متعدد السطوح المنتظم	70
487	2	1	1	1	2	1	1	1	1	2	2		8،4	مقدمة إلى الطوبولوجيا	71
489	2	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1،5	زوايا على الساعة	72
491	2	2	1	1	1	2	1	1	2	2			5،1	إيجاد المعدل–المتوسط المتناسق	73
494	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1،5	اغلاط بلهاء!	74
496	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5،1	إعادة زيارة المسائل الرقمية	75
498		2	1		2	1	1						5،6	هويات جبرية	76
500	2		1		1	2	1						5	طريقة للتحليل العاملي لثلاثي الحدود بصيغة ax^2+bx+c	77
502	1		1		1	2	1						5،10	حل معادلات تربيعية	78
504	1		1		1		1						2،5	الخوارزمية الاقليدية	79

	موضوع الإثراء	الموضوع	صفوف علاجية Remedial Classes				صفوف متوسطة Average Classes				صفوف متميزة ومتفوقة Gifted Classes				رقم الصفحة
			8–7	9	10	12–11	8–7	9	10	12–11	8–7	9	10	12–11	
80	الأعداد الأولية	2،5						2		2		1		1	506
81	مغالطات جبرية	12،5						1	2	1		1	2	1	509
82	اشتقاقات المجموع بواسطة المصفوفات	5،6،12						1	2	1	1	1		1	511
83	ثلاثيات فيثاغوراس	2،5،6						2	1	1	2	1	1	1	514
84	قابلية القسمة	2،1،5	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	516
85	تعاقب فايبوناشي Fibonacci	5،2،12			3	2	2	1	2	2	1	1	2	1	519
86	معادلات دايوفانتين	5،2						2		1	2	1	2	1	522
87	الكسور المستمرة ومعادلات دايوفانتين	5،2						2		1	2	1	2	1	524
88	تبسيط الصيغ التي تتضمن اللانهاية	5،2						2		1	2	1	2	1	526
89	توسيع الكسور المستمرة للأعداد الصماء	5						2		1		1	2	1	528
90	تعاقب فاري Farey.	1،5		2	2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	531
91	غلاف القطع المكافئ	6،7			2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	533
92	تطبيق التطابق على قابلية القسمة	2،5								2	2	1	2	1	535
93	حل المسائل–استراتيجية معاكسة	10،6،5						1	1	2	2	1	1	2	538
94	المراتب العشرية والكسور في قواعد أخرى	1،5						2	2	1	2	1	2	1	542
95	الأعداد المضلعة Polygonal	2،5				2		1	1	1	2	1	1	1	543
96	شبكات	4،5،11،8			2	1	2	1	1	1	2	1	1	1	547
97	تقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية–ممكن أم مستحيل؟	5،6،2							2	1		2	1	1	549
98	مقارنة المتوسطات	5،2،6						1	1	1		1	1	1	551
99	هرم باسكال	5								1		2	1	1	553
100	نظرية متعدد الحدود	5،1،4						2		1		1	2	1	555
101	الحل الجبري للمعادلات التكعيبية	5								2		1		1	557
102	حل المعادلات التكعيبية	5						2		2		1		1	560
103	حساب مجاميع المتوالية المحدودة	5						2		1		1		1	563
104	صيغة عامة لمجموع متوالي بأسلوب $\sum_{i=1} t^r$	5								2		2		1	565

	موضوع الإثراء	الموضوع	صفوف علاجية Remedial Classes				صفوف متوسطة Average Classes				صفوف متميزة ومتفوقة Gifted Classes				رقم الصفحة
			8–7	9	10	12–11	8–7	9	10	12–11	8–7	9	10	12–11	
105	آلة حساب القطع المكافئ	7،5				2		2	2	1		1	1	1	569
106	إنشاء القطع الناقص	6،5،12،7						2	2	1		1	1	1	571
107	إنشاء القطع المكافئ	6،7،5			2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	574
108	استخدام منحنيات المستويات الأعلى لتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية	7،5،6							2	1		1	1	1	577
109	إنشاء أغلفة مسار دويري فوقي وتحتي ـ دائري.	6،5،7							2	1		1	1	1	580
110	التعاقب المتناغم	5،6						2	1	1		1	1	1	582
111	التحويلات والمصفوفات	5،7								2		2	2	1	484
112	طريقة الفروقات	1،5								1		2	2	1	587
113	تطبيق الاحتمالية على كرة السلة	3،5،4				2		1	1	1	2	1	1	1	589
114	مقدمة إلى التحويلات الهندسية	6،5							1	1		2	1	1	591
115	الدائرة والمنحنى القلبي	6،5،11						2	1	1		1	1	1	594
116	تطبيقات الأعداد المركبة	6،5،11							2	1		2	1	1	597
117	علم الحساب الهندي	2،1		2	2	1	1	2		2	1	1		2	600
118	البرهنة على الأعداد الصماء	5								1		1	2	1	602
119	استخدام الصحائف الممتدة على الحاسوب لإعداد حلول لمسائل رياضية محددة	1،2،10						2	1	1	1	1	2	2	604
120	عوالم الهندسة الثلاثة	6										2	1	1	605
121	خليط π	5												1	609
122	التكرار الرسومي	5											2	1	610
123	رسم فيغنبوم Feigenbaum	5											2	1	613
124	مثلث سيربنيسكي Sierpinski	6									1		2	3	615
125	الفراكتال Fractals	6										1	1	1	617

1 إنشاء مربعات سحرية بنسق فردي
Construction Odd-Order Magic Squares

عدت هذه الواحدة لإثراء معرفة الطلبة الذين قد أتقنوا مبادئ الجبر الأولي، إن الأجزاء التي اختيرت بعناية لهذه الوحدة قد تكون مؤثرة ومفيدة في الصفوف العلاجية، حيث يفضل الطلبة بعض الرياضيات الترفيهية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بإنشاء مربعات سحرية بأي نسق فردي مطلوب.
2. سيكتشف الطلبة خصائص المربعات السحرية ذات النسق الفردي المعطاة.
3. سيقوم الطلبة باحتساب مجموع عناصر لأي صف (أو عمود، أو قطر) بأي مربع سحري، بعد معرفة نسقه فحسب.

التقييم السابق Pre Assessment

تحدى الطلبة بإعداد مصفوفة 3×3، وبالأعداد 1-9 بحيث أن مجموع عناصرها في كل صف، وعمود، وقطر من أقطارها يكون متساويا. وضح للطلبة بأن مثل هذه المصفوفة يطلق عليها "مربع سحري" (بنسق 3).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد أن يتوفر للطلبة وقت كاف لكي ينجحوا في تجاوز عقبة التحدي، أو يعانون من إحباط نتيجة الفشل بالوصول إلى ما طلب منهم (في فترة لا تتجاوز غالبا 15 دقيقة)، تستطيع أن تجابه المسألة بمشاركة الطلبة شريطة أن تدعهم يدركون فائدة معرفة مجموع كل صف (أو عمود، أو قطر) سلفا.

ولغرض إعداد صيغة لحاصل جمع العناصر في أي صف، عمود، أو قطر من أقطار المربع السحري(°)، ينبغي أن يعتاد الطلبة على التعامل مع صيغة مجموع متوالية حسابية، $S=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$.

أما إذا لم يكن الطلبة معتادين على التعامل مع هذه الصيغة، يمكن أن تحال، بسهولة بالغة، إلى قصة اليافع كارل فردريش كاوس (1855-1777) الذي استجاب، وهو في سن العاشرة، للتحدي الرياضي الذي فرضه المعلم عليه.

اعتاد معلم كاوس على إعطاء عمل يومي طويل للطلبة لكي ينهمكوا بإكماله (وهو على علم بطرق مختصرة لإنجاز هذا العمل). وفي يوم من الأيام طلب المعلم من طلبته إضافة سلسلة من الأعداد بصيغة: 1+2+3+4+...+97+98+99+100.

بعد أن انتهى المعلم من بيان مسألته، عمد اليافع كاوس إلى تقديم الجواب دونما تأخير!.

وبدهشة غامرة، طلب المعلم من كاوس بيان سبب إجابته السريعة. وقد وضح كاوس بأنه قد تأمل إضافة المائة عدد بالنسق الذي قدمه المعلم، فانقدحت في ذهنه العلاقة القائمة بين الأزواج الآتية: 1+100=101، 2+99=101، 3+98=101، 4+97=101، ... 50+51=101

ونظرا لوجود خمسين زوجا من الأعداد التي يبلغ مجموع كل منها 101، فإن جوابه هو 101.50 = 5,050. لقد عمد كاوس ،في الواقع، إلى ضرب نصف عدد الأعداد التي سيجد مجموعها $(\frac{n}{2})$ بحاصل جمع العدديين: الأول والأخير من المتوالية (a_1+a_n). ولغرض الحصول على المجموع الكلي للمتوالية نستنبط من هذه الصيغة بأن مجموع الأعداد الطبيعية من 1 إلى n^2 (الأعداد المستخدمة في مربع سحري nxn) هي $S=\frac{n^2}{2}(1+n^2)$. بيد انه إذا ورد شرط بوجوب تساوي مجاميع الصفوف، فإن المجموع سيساوي $(\frac{s}{2})$. (ومن هنا فإن وصف "مجموع الصف" سوف يشير بالواقع إلى "مجموع الأعداد الموجودة في الصف"). وعليه، فإن مجموع أي صف من الصفوف هو $S=\frac{n^2}{2}(1+n^2)$. وقد ترغب في حث الطلبة على معرفة سبب كون القطر مساويا للصف $S=\frac{n^2}{2}(1+n^2)$. وسيكون الطلبة على أهبة الاستعداد للبدء في العمل بطريقة نظامية على المسألة الأصلية. دع طلبتك يتأملون مصفوفة الرموز التي تمثل الأعداد 1-9 الآتية:

(°) ما لم ينص على أمر آخر، فإن هذه الوحدة سوف تعنى بالمربعات السحرية ذات الأعداد الطبيعية المتعاقبة والتي تبدأ بالعدد 1.

D_1	c_1	c_2	c_3	d_2
r_1	a	b	c	
r_2	d	e	f	
r_3	g	h	i	

باستخدام الصيغة التي أعدت سابقا، $S=\frac{n^2}{2}(1+n^2)$ ، سنجد بأن مجموع صف في مربع سحري برتبة (3×3) هو $\frac{3}{2}(3^2+1)=15$. وعليه فإن

$$r_2+c_2+d_1+d_2 = 4.15 = 60$$

ولكن

$$r_2+c_2+d_1+d_2=$$
$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+i)+(c+e+g)=$$
$$3e+(a+b+c+d+e+f+g+h+i) = 3e + 45$$

(نظرا لأن مجموع الأعداد $1+2+3+\dots+9=\frac{9}{2}(1+9)=45$)

وعليه فقد تم التوصل إلى أن موقع المركز من مربع سحري بتنسيق ثلاثي سوف يتبوؤه الرقم 5.

ونظرا لكون مجموع كل: صف، عمود، وقطر في المربع السحري يساوي 15، (ملاحظة: إن $a+i=g+c=b+h=d+f=15-5=10$ أي عددين في مربع سحري برتبة نونية يعدان متتامان Complementary إذا كان مجموعهما هو n^2+1، وعليه فإن a، و i هما عددان متتامان). والآن ،ابدأ بإرشاد الطلبة إلى القضية الآتية:

العدد 1 لا يمكن أن يستقر في زاوية المربع. افترض بأن a=1، إذن i=9. ولكن الأعداد 2, 3, 4 لا يمكن أن تكون في نفس الصف (أو العمود) كما مع العدد 1. ونظرا لعدم وجود عدد طبيعي اقل من 10 ،ستكون قيمته كبيرة بحيث يحتل الموقع الثالث من مثل هذا الصف (أو العمود). ينسجم مع هذا الأمر ترك موقعين فقط (في المربع غير المظلل المبين ادناه) التي يمكن أن تستقبل هذه الأعداد الثلاثة (2, 3, 4). ونظرا لإن هذا الأمر مخالف للحالة المطلوبة، فإن العددين 1، 9 يمكن لهما أن يستقران في موقعين وسيطين في صف (أو عمود) فحسب.

1		
	5	
		9

لا يمكن للعدد 3 أن يكون في نفس الصف (أو عمود) مع الرقم 9، لأن العدد الثالث المطلوب في نفس الصف (أو العمود) سيكون 3 لكي يكون المجموع 15 وهو خلاف المطلوب، ولأنه لا يمكن استخدام العدد مرتين داخل المربع السحري.

والآن دع الطلبة يدركون بأن كل من العددين 3 أو 7 لا يمكن أن يقعا في موقع بإحدى زوايا المربع السحري. لذا فإنهم سيعمدون إلى استخدام المعايير المبينة أعلاه لإنشاء مربع سحري برتبة 3. وسيحصل الطلبة على أحد المربعات السحرية الآتية:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

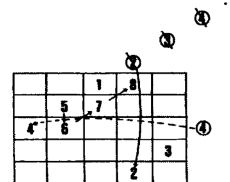
8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

قد يرغب الطلبة، الآن، بتوسيع دائرة تطبيق هذه التقانة لإنشاء مربعات سحرية بأنساق أخرى، ولكن هذه الخطة Scheme ستصبح مثيرة للضجر. ونورد هنا طريقة ميكانيكية لإنشاء مربع سحري بنسق فردي.

ابدأ بوضع العدد 1 في الموقع الأول بالعمود المتوسط. استمر بوضع العدد الذي يليه في الخلايا للقطر (بالميل الموجب). وهذا بالطبع أمر مستحيل لعدم وجود أية خلية "أعلى" المربع.



وعندما يجب علينا أن نضع عددا في موقع "فوق" المربع، ينبغي بدلا من ذلك أن يوضع في آخر خلية من العمود التالي على الجهة اليمنى. بعدها يتم وضع بقية الأعداد على التعاقب في القطر ذي الميل الموجب. وعندما (كما يبين في الشكل السابق) تقع الأعداد خارج حدود المربع، من الجهة اليمنى، ينبغي أن توضع في الخلية الأولى (على الجهة اليسرى) بالصف التالي، فوق الصف الذي تم ملوه (كما موضح في الشكل). وتستمر العملية بملء الخلايا المتعاقبة لحين الوصول إلى خلية قد تم ملوها في البداية (كما هي مع العدد، الموضح في الشكل السابق). وبدلا من وضع عدد آخر في الخلية المشغولة، يتم وضع العدد تحت العدد السابق. وتستمر العملية لحين الوصول

إلى العدد الأخير.

وبعد ممارسة تدريب مناسب سيدرك الطلبة أنماطا محددة، منها على سبيل المثال، إن العدد الأخير يستقر في موقع المنتصف بالصف الأسفل.

ينبغي أن يلاحظ بأن هذه الطريقة هي أحد الأساليب المستخدمة في إنشاء مربعات سحرية برتبة فردية. إن الطلبة الأكثر مهارة ينبغي أن يستحثوا على برهنة أن هذه العملية هي تقانة ميكانيكية.

التقييم اللاحق Postassessment

ادع الطلبة إلى إنجاز التمارين الآتية:

1. جد مجموع صف في مربع سحري برتبة:
   (أ) 4 (ب) 7 (ج) 8.
2. إنشاء مربع سحري برتبة 11.
3. وضح بعض الخصائص العامة للمربع السحري برتبة فردية يقل عن 13.

2 إنشاء مربعات سحرية بنسق زوجي
Construction Even-Order Magic Squares

يمكن استخدام هذا الموضوع مع صف علاجي بمدرسة ثانوية. بالإضافة إلى اعتماده مع صف متقدم في أي مستوى مرحلة بمدرسة ثانوية. في الحالة السابقة، يمكن فقط اعتبار المربعات السحرية برتبة زوجية مزدوجة، بينما في الحالة التالية يمكن تضمين المربعات السحرية برتبة زوجية منفردة. وعندما يستخدم هذا الإثراء مع صف علاجي، فإن أعداد المربعات السحرية ذات الرتبة الزوجية سيعد مصدرا محفزا على تعميق الفهم بمبادئ الحساب.

أهداف الأداء Performance Objectives

1 سيقوم الطلبة بإنشاء مربعات سحرية بأي رتبة أو نسق زوجي مطلوب.

2 سيكتشف الطلبة خصائص مربعات سحرية برتبة أو بنسق زوجي أعطيت لهم.

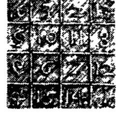
التقييم السابق Pre Assessment

ابدأ مقدمتك بملاحظة تاريخية تذكر خلالها الفنان (والرياضي) الألماني البريخت دورير Albrecht Durer (1471-1528)) الذي أنجز عملا خصباً بميدان الرياضيات المرتبطة بأعماله الفنية. إن إحدى الأمور التي تثير الاهتمام بعمله هو ظهور مربع سحري في نقش أعده عام 1514 بعنوان "ميلانخوليا Melancholia" (شكل (1)).



شكل (1)

يظهر المربع السحري في الزاوية اليمنى-العليا من النقش أعلاه، وكما موضح في شكل (2).



شكل (2)

ويعتقد بأن هذه هي المرة الأولى التي ظهر فيها المربع السحري في الحضارة الغربية. ومن الأمور التي تستدعي الاهتمام بهذا المربع هي مجموعة الخصائص غير المألوفة التي يتميز بها. فعلى سبيل المثال، فإن الخليتين الوسطيتين

من الصف الأول تؤشر إلى سنة إعداد النقش 1514. امنح لطلبتك وقتا مناسبا لإيجاد خصائص أخرى غير مألوفة للمربع السحري (غير تلك التي تخص تساوي مجاميع الصفوف، والأعمدة، والأقطار).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيستمتع الطلبة، بلا شك، في مناقشة جملة من خصائص هذا المربع السحري، وفيها:

1 إن مجموع كل من الزوايا الأربعة هو 34.

2. إن مجموع كل من الزوايا الأربعة 2 × 2 هو 34 أيضاً.

3. إن مركز المربع بالرتبة (النسق) 2×2 هو 34.

4. مجموع أعداد القطر يساوي مجموع الأعداد غير الموجودة فيه.

5. مجموع مربعات أعداد القطر (748) يساوي مجموع مربعات الأعداد غير الموجودة فيه.

6 مجموع مكعبات أعداد القطر (9,248) يساوي مجموع مكعبات الأعداد غير الموجودة فيه.

7 مجموع مربعات الأعداد في كل من القطرين يساوي مجموع مربعات الأعداد في الصفين الأول والثالث (أو العمودين الأول والثالث)، والتي تساوي مجموع مربعات الأعداد في الصفين الثاني والرابع (أو العمودين الثاني والرابع).

8 لاحظ ما يأتي:

$$2+8+9+15 = 3+5+12+14 = 34$$
$$2^2+8^2+9^2+15^2 = 3^2+5^2+12^2+14^2 = 374$$
$$2^3+8^3+9^3+15^3 = 3^3+5^3+12^3+14^3 = 4,624$$

9. إن مجموع كل زوج من الأعداد المتجاورة إلى أعلى أو إلى اسفل، وبالاتجاهين الأفقي أو العمودي تنتج تناظرا يثير الانتباه (انظر ما يأتي).

عموديا:

21 13 13 21
13 21 21 13

أفقيا:

19 15
15 19
15 19
19 15

تأمل الإنشاءات الابتدائية لمربعات سحرية بنسق 4×4 (ويعبر عنه في بعض الأحيان بنسق ثنائي-مزدوج). دع الطلبة ينشئون المربع أدناه وبالأقطار المؤشرة.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

شكل 3

بعدها دعهم يستبدلون كل عدد في القطر بالعدد المتمم له (أي، العدد الذي يعطي مجموعا $17 = 16+1 = n^2+1$). إن هذا العمل سيمنحنا مربعا سحريا برتبة (بنسق) 4×4. (الشكل 4).(ملاحظة: عمل دورير Durer ببساطة على استبدال العمودين 2 و 3 للحصول على مربعه السحري).

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

شكل 4

استخدمت عملية مشابهة لإنشاء مربعات سحرية أكبر برتبة زوجية-مزدوجة. ولغرض إنشاء مربع سحري برتبة (بنسق) 8×8، قم بتقسيم المربع إلى مربعات برتبة 4×4 (شكل 5)

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

شكل 5

ثم استبدل الأعداد الموجودة في كل قطر من أقطار مربعات نسق 4×4 بالأعداد المتممة لها.

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

شكل 6

إن المربع السحري الناتج يظهر في شكل (6). والآن دع الطلبة يباشرون بإنشاء مربع سحري برتبة 12×12.

يمكن اعتماد خطة جديدة لإنشاء مربعات سحرية برتبة زوجية- منفردة، أي تلك التي تكون زوجية ولكنها غير مضروبة بالعدد 4. إن أي مربع سحري زوجي منفرد (افترض برتبة n) يمكن تقسيمه إلى رباعيات quadrants (شكل 7). ولتسهيل التعامل معها، اعمد إلى تسميتها بالرموز D,C,B,A.

A	C
D	B

شكل 7

والآن، ينبغي أن تكلف الطلبة بإنشاء مربعات سحرية "برتبة فردية" بالتنسيق: D,C,B,A (ارجع إلى الأنموذج الملازم "إنشاء مربعات سحرية برتبة فردية"). أي إن المربع A سيكون مربعا سحريا بنسق فردي باستخدام الأعداد الطبيعية التي تبدأ بـ $\frac{n^2}{4}$= المربع B. وسيكون مربعا سحريا بنسق فردي ويبدأ بالعدد $\frac{n^2}{4}+1$ وينتهي بالعدد $\frac{n^2}{4}$وسيكون المربع C مربعا سحريا بنسق فردي يبدأ بالعدد $\frac{n^2}{4}+1$، وينتهي بالعدد $\frac{3n^2}{4}$، وأخيرا المربع D والذي سيكون، أيضاً، مربعا سحريا بنسق فردي، ويبدأ بالعدد $\frac{3n^2}{4}+1$ وينتهي بالعدد n^2. (يظهر شكل (8) الحالة التي تكون فيها قيمة n=6).

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

شكل 8

0+8	0+1	0+6	8+18	1+18	18+6
0+3	0+5	0+7	18+3	18+5	18+7
0+4	0+9	0+2	18+4	18+9	18+2
27+8	27+1	27+6	9+8	9+1	9+6
27+3	27+5	27+7	9+3	9+5	9+7
27+4	27+9	27+2	9+4	9+9	9+2

شكل 9

دع الطلبة يلاحظون العلاقة القائمة بين المربعات السحرية الأربعة في شكل (8) مع المربع السحري الأول الواقع في الأعلى الأيسر. A في شكل (9).

والآن تظهر الحاجة إلى إجراء تعديلات طفيفة لإكمال إنشاء المربعات السحرية. افرض n = 2(2m+1) التقط الأعداد الأولى في مواقع m من كل صف في A (باستثناء الصف الأوسط، حيث ستتجاوز الموقع الأول وتلتقط مواقع m التالية)، ثم استبدلهم بالأعداد المقابلة من المربع D. بعدها تناول الأعداد الموجودة في آخر مواقع m-1 بالمربع C واستبدلهم بالأعداد المقابلة في المربع B. لاحظ بأنه بالنسبة لقيمة n=6 (شكل 10).m-1=0، وعليه فإن كل من المربعين B، C سيظلان دون تغيير.

اترك الطلبة يطبقون هذه التقانة لإنشاء مربع سحري برتبة 10 (n=10، m=2، انظر إلى الشكلين 11 و 12).

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

شكل 10

17	24	1	8	15	67	74	51	58	65
23	5	7	14	16	73	55	57	64	66
4	6	13	20	22	54	56	63	70	72
10	12	19	21	3	60	62	69	71	53
11	18	25	2	9	61	68	75	52	95
92	99	76	83	90	42	49	26	33	40
98	80	82	89	91	48	30	32	39	41
79	81	88	95	97	29	31	38	45	47
85	87	94	96	78	35	37	44	46	28
86	93	100	77	84	36	43	50	27	34

شكل 11

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14`	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	27	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

شكل 12

التقييم اللاحق Podtassessment

كتقييم لاحق بصيغة نظامية، اطلب من الطلبة:

1. إنشاء مربع سحري برتبة: (أ) 12، (ب) 16.
2. إنشاء مربع سحري برتبة: (أ) 14، (ب) 18.
3. جد خصائصاً إضافية لمربعات سحرية بنسق: (أ) 8، (ب) 12

3 مقدمة إلى العد الحرفي
Introduction to Alphabetic

يمكن استخدام هذه الوحدة لتعزيز مفهوم الجمع (الإضافة).

هدف الأداء Performance Objective

عند إعطاء مسائل العد الحرفي، سيعمل الطلبة على حلها بطريقة نظامية Systematic.

التقييم السابق Pre Assessment

دع الطلبة يعملون على حل مسائل الجمع الآتية، أما بطريقة الجمع البسيط في (أ) أو بتعويض الأرقام المفقودة في (ب).

(أ)
562
3943
8807

(ب)
5 6 7 –
– 8 – 9
3 – 3 3

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ينبغي أن تكون المسألتين السابقتين موردا لتحفيز الطلبة بهذا الدرس. إن العد الحرفي هو عبارة عن ألغاز رياضية تظهر في أكثر من مظهر. فترتبط المسألة في بعض الأحيان مع استعادة أرقام في مسألة محسوبة Computational، بينما تكون في أوقات أخرى مرتبطة مع إزالة تشفير مسألة حسابية متكاملة حيث يتم وصف الحروف الهجائية بجميع الأرقام. بصورة أولية، فإن إنشاء هذا النوع من الألغاز ليس أمرا بالغ الصعوبة، لكن الحل يتطلب تحرياً دقيقاً لجميع العناصر. من أجل هذا ينبغي اختيار كل مفتاح من مفاتيح الألغاز بجميع حالات المسألة، شريطة متابعتها بدقة وعناية. فعلى سبيل المثال، افترض بأننا نريد إزالة بعض الأرقام من المسألة السابقة (أ) ونجهز الحل ببعض الأرقام المفقودة. دعنا، كذلك، نفترض بأننا لا نعرف شيئا عن ماهية هذه الأرقام، بعدها سنجد أنفسنا مع المسألة الهيكلية الآتية:

(1) (2) (3) (4) (5)
___ 6 2
3 9 4 ___
___ 8 ___7
– 3 3 12

اطلب من الطلبة تحليل المسألة وأرشدهم إلى إعادة الإنشاء كما يأتي. من العمود 5، 12 = 7+ ___ +1، إذن الرقم المفقود في العمود الخامس ينبغي أن يكون 3. في العمود الرابع، لدينا 1 = ___ +1+6+4، أو 1 = ___ +11، وعليه ينبغي أن يكون الرقم صفرا. في العمود الثالث، ولدينا 23 =8 +9+ ___ +1، وينبغي أن يكون الرقم المفقود 5. والآن، من العمود الثاني، لدينا 13 = ___ +2+3. وهذا يدل ضمنا بأن الرقم ينبغي أن يكون 8، وعليه فإن الرقم على الجهة اليسرى بالعمود الأول، والصف السفلي ينبغي أن يكون 1. وبهذا نكون قد أعدنا إنشاء المسألة. يجب أن يكون الطلبة قد اصبحوا قادرين على إيجاد الأرقام المفقودة في المسألة الثانية من التقييم السابق (إذا لم يكونوا قد نجحوا في حلها). إن الحل المتكامل هو:

5 6 7 (4)
(7) 8 (5) 9
(1)3 (5) 3 3

دع الطلبة يعدون مسائلهم الشخصية، ثم اتركهم يتبادلونها مع بقية زملائهم. لقد أخذنا بنظر الاعتبار المسائل التي تمتلك حلا واحدا على وجه الدقة. إن المثال الآتي سوف يعرض لك مسألة تمتلك أكثر من حل واحد.

(1) (2) (3) (4)
___ 8 7
3 ___ 1
___ 5 6 ___
___ 3 ___ 0

في العمود ___ + 1 + 7 = 10، ينبغي أن يكون الرقم المفقود 2. في العمود الثالث، ___ =6+___+8+1 أو ___=___ + 15 ينبغي إن نجري فحصا على العمود الثاني، بحيث يمكن اعتبار جميع الاحتمالات المكنة. لدينا في العمود الثاني، 3 = 5 + 3 + ___، وعليه إذا قمنا بتحديد الأرقام 5,6,6,7,8,9، بالنسبة لقيمة العدد المفقود في العمود الثالث، الصف الثاني، سنحصل على 20= 5 + 15، 21 = 6 + 15, 22 = 7 + 15, 23 = 8 + 15, 24 = 9 + 15. إن هذا الأمر

سيجعل من الرقم في العمود الثاني مساويا لـ 3، نظرا لأن 2 قد تم نقلها. وعليه سيكون لدينا الحلول المحتملة الآتية:

387		387		387		387		387
351		361		371		381		391
562	أو	526	أو	562	أو	562	أو	562
1300		1310		1320		1330		1340

من جهة أخرى، إذا قمنا بتحديد قيم للرقم المفقود في الصف الثاني. العمود الثالث، وكما يأتي 4، 3، 2، 1، 0، وسيصبح الرقم في الصف الأول، العمود الأول، 4، نظرا لأن 1 قد تم نقله. وعليه، هناك عشرة حلول مختلفة والتي ستنتج عن وجود رقمين مفقودين في نفس العمود. ينبغي أن يعد الطلبة مسألة مشابهة حيث يكون هناك أكثر من رقمين مفقودين بنفس العمود. لترى ما هي طبيعة الاستنتاج الذي سيتوصلون إليه.

في النوع الثاني من المسألة، حيث يعبر عن جميع الأرقام بحروف (وبذلك سيصبح الاسم "العد الحرفي")، ستكون القضية مختلفة تماما عن سابقتها. هنا ستكون مفاتيح اللغز بحاجة إلى تحليل من جميع الجوانب الممكنة للقيم المحددة للحروف. بصورة عامة لا تتوفر قواعد عامة لحل مسائل العد الحرفي. وتظهر الحاجة إلى فهم جيد بمبادئ: الحساب، والاستدلال المنطقي. مع توفر قدر كبير من الصبر والأناة.

إن أحد الأمثلة الأنيقة لهذا النوع من مسائل الجمع هي:

(1) (2) (3) (4) (5)
F O R T Y
T E N
T E N
S I X T Y

نظرا لأن كل من الخطين الأول والرابع يحويان TY مكررة. فإن هذا يدل ضمنا على أن مجموع كل من حروف E وحروف N في العمودين الرابع، والخامس ينبغي أن يكون مساويا للصفر. إذا افترضنا N=0، إذن ستكون E مساوية 5، وينقل 1 إلى العمود الثالث. ويصبح لدينا الآن:

F O R T Y
T 5 O
T 5 O
S I X T Y

ونظرا لوجود فراغين قبل كل TEN، فإن O في FORTY ينبغي أن يكون 9، وينقل 2 من مرتبة المئات (العمود الثالث) ويصبح I مساويا لـ 1. وينقل 1 إلى العمود الأول، فتصبح F+1=S. اطرح سؤالا على الطلبة: لماذا نقلت 2 وليس 1 إلى العمود الثاني؟. إن السبب الذي يكمن وراء نقل 2 من العمود الثالث هو أن 1 قد نقل، وسيكون كل من الحرفين I، N مساويا للصفر. لقد بقينا الآن مع الأعداد الآتية: 8، 7، 6، 5، 4، 3، 2 بدون تحديد.

F 9 R T Y
T 5 O
T 5 O
S 1 X T Y

في عمود المئات، لدينا 2T + R + 1 (تم نقل 1 من العمود الرابع)، والذي ينبغي أن يكون مجموعة مساويا أو أكبر من 22، والذي يدل ضمنا على أن R,T ينبغي أن تكونا أكبر من 5. وعليه، ستكون S, F أما 2، 3، أو 4. والآن يبدو بأن X لا يمكن أن تساوي 3، ومن جهة أخرى لن يكون S,F رقمان متتابعين. إذن X يساوي 2 أو 4، وهو أمر مستحيل إذا كانت T تساوي أو اقل من 7. وعليه ستكون قيمة T تساوي 8، مع R تساوي 7، و X يساوي 4. إذن F = 2، S = 3، وتكون Y = 6. وعليه فإن حل المسألة سيكون:

,29 7 8 6
8 5 0
8 5 0
,31 4 8 6

التقييم اللاحق Postassessment

دع الطلبة يعملون على حل مسائل العد الحرفي، الآتية:

1.
4 _ _ 3
_ _ 1 4 _
_ _ 3 7 4 6

الجواب:
4603
99143
103746

2.
5 _ 4 _
_ 4 5 _ 8
6 _ 2 5 9
9 4 1 9 6

الجواب:
5349
24588
64259
94196

3.
T R I E D
D R I V E
R I V E T

الجواب:
17.465
57,496
74,961

.4

```
 S E N D
 M O R E
M O N E Y
```

الجواب:

$$\begin{array}{r} 9.567 \\ \underline{1.085} \\ 10.652 \end{array}$$

.5

```
  A L L S
  W E L L
  T H A T
  E N D S
S W E L L
```

الجواب:

$$\begin{array}{r} 9,332 \\ 8,433 \\ 6,596 \\ \underline{4,072} \\ 28,433 \end{array}$$

4 حاسبة لعبة الداما
A Checkerboard Calculator

ستوفر هذه الوحدة للطلبة طريقة سهلة وممتعة للتعامل مع الأعداد الثنائية.

هدف الأداء Performance Objective

سيصبح للطلبة قادرين على استخدام حاسبة لعبة الداما لإجراء عمليات: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة مع الأعداد الثنائية.

التقييم السابق Pre Assessment

دع الطلبة يجدون ما يلي:

أ. $110_2 + 1100_2 =$ ______

ب. $6 + 12 =$ ______

ج. $10_2 \times 111_2 =$ ______

د. $2 \times 7 =$ ______

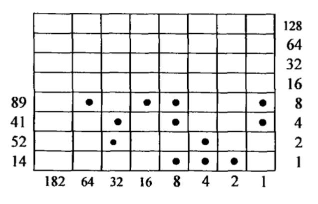
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

قام جون نابير John Napier، رياضي من القرن السادس عشر. بتطوير خوارزميات وعظام نابير Napier Bones (قضبان الحساب)، قد وصف أيضاً في كتابه Rabdologia طريقة للحساب بتحريك عدادات على لوحة شطرنج Chessboard. وإضافة إلى كونها الحاسوب الثنائي الأول بالعالم، فإن عداد لوحة الشطرنج يعد أداة مساعدة على التعليم. وبالرغم من شيوع استخدام حاسبة لعبة الداما في العصور الوسطى وفترة النهضة Renaissance، باعتماد نظام ثنائي وإرساء خوارزميات على الطرق القديمة المستخدمة في الضرب عبر "المضاعفة Doubling"، فإن لوح عد نابير Napier Counting Board اصبح أكثر فاعلية وكفاءة من جميع الآلات والأدوات السابقة له.

ادع الطلبة إلى جلب لوحة شطرنج معياري أو لوحة لعبة الداما معهم إلى المدرسة، وابدأ بجعل الطلبة يعمدون إلى تأشير الصفوف والأعمدة بواسطة سلسلة المضاعفة: 1,2,4,8,16,32,64,128.

والآن حاول عرض كيفية استخدام اللوحة في عمليتي الجمع والطرح.

يتم وصف كل عدد بوضع قرص عد على الصف، ويمتلك كل قرص عد قيمة عموده. على سبيل المثال، ادع الطلبة إلى جمع الأعداد 89 + 41 + 52 + 14. إن الصف الرابع سوف يظهر 1+8+16+64 (شكل 1).

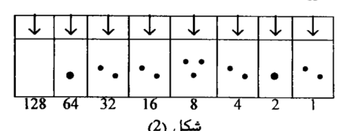


شكل (1)

إذا اعتقد الطلبة بأن كل قرص هو 1 وان كل موقع فارغ هو 0، فيمكن تمثيل العدد 89 برموز ثنائية كما يأتي: 1011001_2.

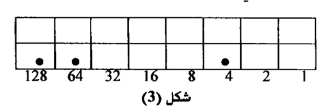
تم تحديد مواقع أقراص العد مبتدئين من اليسار، ووضع قرص عد على العمود بالعدد الأكبر، اقل من أو يساوي العدد الذي يعرضه الطالب. ضع أقراص العد التالية على العدد التالي- الأكبر الذي عند إضافته إلى العمود السابق سوف لن يزيد على مجموع المطلوب، وهكذا.

ولغرض الجمع، ادع الطلبة إلى تحريك جميع أقراص العد بصورة مستقيمة إلى اسفل (الشكل 2).



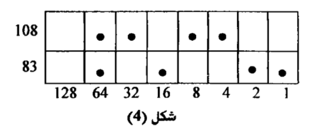
شكل (2)

إن إضافة قيم أقراص العد هذه سوف يعطينا المجموع الصحيح، ولكن لغرض استخدام اللوحة في تدوين الرموز الثنائية. ينبغي أن نبدأ أولاً "بإلغاء" صف أقراص العد المتعددة الموجودة على خلية واحدة. دع الطلبة يبدؤون باليمين، ويأخذون كل خلية تباعا. ارفع كل "زوج" من أقراص العد الموجودة على خلية واستبدلهما بقرص عد واحد على الخلية التي تليها من جهة اليسار. حاول أن تطمئن الطلبة بأن هذا التغيير لن يؤدي إلى تأثير على المجموع لأن كل قرصين يمتلكان القيمة 2n. في مثالنا الحالي، ستكون النتيجة عبارة عن العدد الثنائي 11000100_2 (شكل 3).



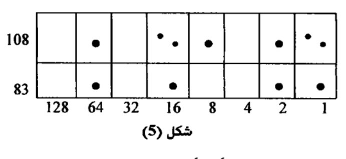
شكل (3)

إن عملية الطرح ستكون بسيطا للغاية. افترض بأن الطلبة يرغبون بطرح 83 من 108. دعهم يعرضون الرقم الأكبر على الصف الثاني، والرقم الأصغر على الصف السفلي (شكل 4).



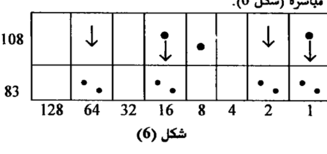
شكل (4)

يستطيع الطلبة، الآن، إجراء عملية الطرح بالأسلوب التقليدي، مبتدئين بالجهة اليمنى، مقترضين من خلية إلى خلية. أو بدلا من ذلك، يستطيع الطلبة تغيير جميع الصف الثاني لحين يكون فوق كل قرص بالصف السفلي قرصين أعلى منه، ولا توجد خلية فارغة بالصف السفلي يوجد أعلاها أكثر من قرص عد واحد. يمكن تنفيذ ذلك عن طريق "المضاعفة التنازلية Doubling Down" على الصف الثاني، بإزالة قرص واستبدله بقرصين في الخلية التالية إلى اليمين (شكل 5).



شكل (5)

بعد هذا، حدد موقعاً ملكاً King، لكل قرص في الصف السفلي عن طريق نقل القرص الموجود أعلاه من الخلية التي تقع فوقه مباشرة (شكل 6).

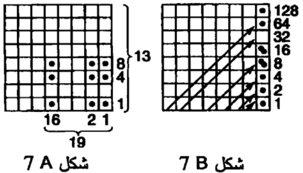


شكل (6)

إن الصف العلوي يظهر الآن الفرق بين هذين العدديين برموز ثنائية ($25_{10}=11001_2$).

لا تخلو عملية الضرب من السهولة واليسر الذي لاحظناه آنفا. وكمثال استخدم $19\times13=247$. دع الطلبة يؤشرون أحد الأعداد، ولنقل 19، عن طريق التأشير اسفل اللوحة وتحت الأعمدة الملائمة، والعدد الثاني، 13، عن طريق تأشير الصفوف المناسبة. ضع قرصا على كل تقاطع بين العمود المؤشر والصف المؤشر (شكل A7).

إن كل قرص لا يقع على العمود الأيمن- البعيد سيتم نقله، لاحقا، بصورة قطرية إلى أعلى والى الجهة اليمنى كما هو الحال مع قطعة الفيل Bishop على لوحة الشطرنج (شكل B7).



شكل 7 A شكل 7 B

إن إلغاء محتويات العمود بواسطة التنصيف إلى أعلى Halving Up، كما هو الحال في عملية الجمع، ويتم وصف نتيجة الضرب برموز ثنائية 11110111_2 أو 247_{10}، والتي يستطيع الطلبة التأكد منها.

قد يرغب الطلبة بمعرفة كيفية عمل هذه الطريقة. إن الأقراص الموجودة على الصف الأول حافظت على قيمتها عندما تم تحريكها إلى جهة اليمين، بينما تضاعفت قيمة الأقراص في الصف الثاني، وقد تربعت Quadruple قيم الأقراص في الصف الثالث، وهكذا الأمر مع بقية الأقراص.

إن الطريقة الإجرائية المستخدمة يمكن أن تكون مكافئة للضرب بقوى للأس2. فيوصف العدد 19 في مثالنا $2^4+2^1+2^0$ ويوصف العدد 13 بأنه $2^3+2^2+2^0$. إن ضرب الحدين ثلاثي الحدود Trinomial يعطينا

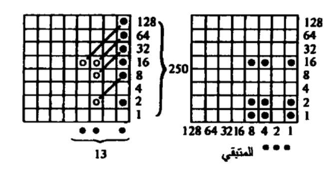
$247 = 2^7 + 2^6 + 2 \bullet 2^4 + 2 \bullet 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$.

فيماثل تحريك أقراص العد بآليته عملية الضرب. ونحن، بالحقيقة، "نضرب" القوى عن طريق إضافة "الأسس".

وكمثال على عملية القسمة، استخدم 250÷13. إن الطريقة الإجرائية، كما قد يتوقع الطلبة، ستكون معكوسا لعملية الضرب. إن المقسوم عليه، في هذه الحالة 13، تم تأشيره عند قاعدة اللوحة، والمقسوم بواسطة الأقراص على العمود في أقصى اليمين (شكل 8A) سيتم الآن نقل أقراص المقسوم إلى الأسفل والى اليسار، ومرة ثانية مثل فيل الشطرنج، ولكن بالاتجاه المعاكس لاتجاه عملية الضرب. إن هذه الطريقة الإجرائية تنتج نمطا يحوي على أقراص (واحدا للخلية فقط) في العمود المؤشر، كما أن كل عمود مؤشر ينبغي أن تكون أقراصه على نفس الصف. ويمكن أن ينشأ نمط واحد فحسب من هذا النوع.

ولعمل ذلك، من الضروري إجراء مضاعفة تنازلية على العمود الأيمن، أي قم بإزالة الأقراص الفردية، واستبدل كلا منها بزوج من أقراص العد على الخلية التالية – الأسفل. دع الطلبة يبدؤون مع القرص العلوي ويحركونه بصورة قطرية إلى العمود الأيسر – البعيد. وإذا لم تتوفر فرصة أمام القرص باستمرار، فاطلب من طلبتك إعادته إلى الخلية الأصلية، ومضاعفته تنازليا، وإعادة المحاولة ثانية.

دعهم يستمرون بالعمل على هذه الطريقة، ويملئون النمط تدريجيا حتى الوصول إلى الحل الوحيد للمسألة (شكل 8B).



شكل 8 B   شكل 8A

بعد أن يستقر القرص الأخير في موضعه، ينبغي أن يشد انتباه الطلبة إلى وجود ثلاثة أقراص متبقية. إن هذا يمثل الباقي (3 أو 11_2). وان قيمة الحافة اليمنى، الآن، هي 1001_2 أو 19_{10} مع بقاء $\frac{3}{13}$.

التقييم اللاحق Postassessment

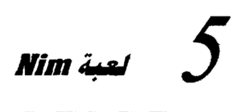
دع الطلبة يعملون على حل المسائل الآتية باستخدام طريقة لوحة لعبة الداما:

(أ). $64 \cdot 27 =$

(ب). $63 - 194 =$

(ج). $43 + 54 =$

(د). $57 \div 361 =$



The Game of Nim

ستسهم هذه الوحدة في عرض تطبيق للنظام الثنائي Binary System من خلال ممارسة لعبة بسيطة تدعى Nim.

هدف الأداء Performance Objective

سيمارس الطلبة لعبة Nim باستخدام استراتيجية نظام ترميز ثنائي من أجل الفوز بها.

التقييم السابق Pre Assessment

ادع الطلبة إلى التعبير عما يأتي برموز ثنائية:

(أ) 14 (ب) 7 (ج) 13

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

رغم أن لعبة Nim قد تمارس للحصول على نقود، يصعب تصنيفها كلعبة قمار، وذلك لأن اللاعب الذي يتقن "سر" اللعبة يستطيع أن يضمن، افتراضيا، فوزه على الدوام.

يمكن أن تمارس لعبة Nim بالعيدان Sticks، أو الحصى. أو قطع العملات النقدية، أو أي شيء صغير الحجم. صف اللعبة للطلبة كما تمارس باستخدام عيدان الأسنان Tooth Picks.

ادع الطلبة إلى ترتيب عيدان الأسنان على شكل ثلاثة ركائز Piles (يمكن استخدام أعداد أخرى من الركائز، أيضاً) وبأي عدد من العيدان في كل ركيزة، واختر طالبين ليمارسا اللعبة، وليبدأ اللاعبان بأخذ دورهما في تحريك العيدان. تتألف الحركة الواحدة من سحب/ إبعاد عيدان الأسنان وفق قواعد محددة. إن هذه القواعد هي:

1 في كل حركة يستطيع الطالب أن يزيل عيدان الأسنان من ركيزة واحدة فقط.
2 يستطيع أن يختار، كل لاعب، أي عدد من عيدان الأسنان. شريطة أن يأخذ عود واحدة كحد أدنى، أو جميع عيدان الركيزة في نفس الوقت.
3 إن اللاعب الذي يزيل آخر عمود من عيدان الأسنان سيكون هو الفائز باللعبة.

إن "سر" الظفر بالفوز هو أمر بسيط للغاية، لكن التمرين والممارسة يلعبان دورا مهما في الأداء الذهني الدقيق لمفردات اللعبة الحسابية. وعليه، ربما يكون من الأسهل المباشرة بعدد قليل من العيدان. أن تقانة الفوز ترتكز إلى اختيار حركة معينة بحيث أن خصمك يضطر إلى السحب من "مجموعة زوجية".

في البداية، سيكون من الضروري تعلم كيفية التمييز بين المجموعة الزوجية والمنفردة. افترض، على سبيل المثال، بأن عيدان الأسنان قد قسمت إلى ثلاثة ركائز تحوي (14)، (7) و (13) من العيدان.

دع الطلبة يعبرون عن هذه الأعداد برموز ثنائية، وأضف الأرقام في كل عمود بنفس الأسلوب عند استخدام النظام العشري إذا كان، على الأقل، واحدا من المجاميع الفردية أو الأرقام عدديا فرديا Odd Number، فإن التوزيع يطلق عليه "مجموعة فردية". إن هذا المثال هو مجموعة فردية لأن أحد المجاميع هو عدد فردي.

أربعة عشر	=	1 1 1 0
سبعة	=	1 1 1
ثلاثة عشر	=	1 1 0 1
(مجموعة فردية)		2 3 2 2

إذا تم تقسيم العيدان إلى ركائز بـ (9)، (13)، و(4) عيدان، فإن كل مجموع على حدة هو عدد زوجي، لذا تعد المجموعة "مجموعة زوجية").

تسعة	=	1 0 0 1
ثلاثة عشر	=	1 1 0 1
أربعة	=	1 0 0
(مجموعة زوجية)		2 2 0 2

إذا قام طالب بالسحب من مجموعة زوجية، فإنه ينبغي عليه أن يغادر مجموعة فردية، لأن اعتماد وصف المجموعة في مقياس ثنائي، سوف يؤدي إلى أن كل سحبة ستزيل واحدا على الأقل من أحد الأعمدة، وان مجموع العمود لن يبقى زوجيا بعد ذلك. من جهة أخرى، إذا سحب لاعب من مجموعة فردية، يستطيع أن يترك مجموعة فردية أو زوجية. ويوجد،

في الواقع، بعض الحركات التي يمكن إجراؤها وستثمر عن أحداث تغيير في المجموعة الفردية باتجاه المجموعة الزوجية. وعليه فإن السحب بطريقة عشوائية من مجموعة فردية سينتج عنه مجموعة فردية إلى حد كبير. حاول أن توضح للطلبة بأن الغاية من اللعبة هي محاولة إجبار الخصم على السحب من مجموعة زوجية، مما يترك لك فرصة نيل مجموعة فردية.

يوجد نوعان من توزيعات الربح النهائية والتي تمتاز بكونها مجاميع زوجية:

(أ) ركيزتان تحوي كل منهما على عودي أسنان، ويرمز لها (2)، (2).

(ب) أربعة ركائز تحوي كل منها على عود واحد، ويرمز لها (1)، (1)، (1)، (1).

إذا استطاع الطالب أن يترك مجموعة زوجية، في كل مرة يمارس دوره باللعبة فسيكون قادرا على إجبار خصمه بالسحب من إحدى المجموعات الزوجية أعلاه، وسيضمن الفوز باللعبة. وإذا كانت بداية قد منحت للطالب مجموعة زوجية سابقة لدوره، فإن الإجراء الأفضل سيكون في سحب عود واحد من الركيزة الأكبر تاركا وراءه مجموعة فردية. وإذا لم يكن الخصم على دراية تامة بسر اللعبة، فإنه سيبدأ بالسحب تاركا وراءه مجموعة فردية وستكون آنذاك قادرا على ضمان الفوز بسهولة.

دع الطلبة يتابعون الحركات في عينة لعبة، وضع عيدان أسنان في ركائز تحوي كل منها (7)، و(6)، و(3) عيدان على التوالي

/// ////// ///////

سبعة = 111

ستة = 110

ثلاثة = 11

232 (مجموعة فردية)

ولتبقى مجموعة زوجية.

ينبغي على الطالب الأول أن يسحب عودين من أية ركيزة.

إن السحب من الركيزة الأولى سينتج عنه:

/// ////// /////

خمسة = 101

ستة = 110

ثلاثة = 11

222 (مجموعة زوجية)

ومهما كانت طبيعة الحركات التي سيقوم بها الطالب الثاني، فإنه سيبقى مجبرا على ترك مجموعة زوجية. فمثلا، دعه يسحب ثلاثة عيدان من الركيزة الثانية.

/// /// /////

خمسة = 101

ثلاثة = 11

ثلاثة = 11

123 (مجموعة فردية)

في هذه النقطة ينبغي على الطالب الأول أن يسحب العيدان الخمسة، باجمعها، من الركيزة الأولى.

/// ///

ثلاثة = 11

ثلاثة = 11

22 (مجموعة زوجية)

والآن، وبغض النظر عما سيختاره الطالب الثاني فإن الطالب الأول سوف يفوز باللعبة!.

يستطيع الطلبة، ممارسة اللعبة فيما بينهم، وسيؤدي هذا الأمر إلى تعميق فهمهم وزيادة قدراتهم على التعامل مع نظام التعداد الثنائي. وبعد أن يتقنوا اللعبة بجميع مهارتها المهنية التي ذكرنا بعضا منها آنفا، دعهم يعكسوا الهدف (أي دع الخاسر يكون اللاعب الذي يجب أن يلتقط عود الأسنان الأخير).

التقييم اللاحق Postassessment

ابدأ لعبة Nim جديدة بين طالب قد احسن تعلم استراتيجياتها ومع طالب لا يحسن سوى قواعدها. استخدم أي من (أو جميع) الخيارات الآتية من ركائز عيدان الأسنان:

(أ) (17)، (15)، (14)

(ب) (18)، (15)، (4)

(ج) (18)، (15)، (3).

إن الطالب الذي قد تلقّن استراتيجية اللعبة سيفوز على الدوام.

6 بـــرج هانوي
The Tower of Hanoi

تزود هذه الوحدة الطلبة بفرصة مناسبة لإنشاء وحل لغز من العصور القديمة باستخدام نظام التعداد الثنائي. يعرف هذا اللغز ببرج هانوي، وقد اخترعه الرياضي الفرنسي ادوارد لوكاس Edward Lucas عام 1883.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم كل طالب ببناء وحل لغز برج هانوي الخاص به، باستخدام النظام الثنائي، وباستخدام المعرفة اللازمة في هذا الدرس.

التقييم السابق Pre Assessment

قبل البدء بهذا الدرس، ينبغي أن يكون الطالب على معرفة تامة بتحويل الأعداد العشرية إلى أعداد ثنائية. قم بإدارة الامتحان السريع Quiz الآتي مرشدا الطلبة إلى مباشرة تحويل الأعداد التالية (أس 10) إلى الأساس الثنائي:

(أ) 4 (ب) 8 (ج) 60 (د) 125.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

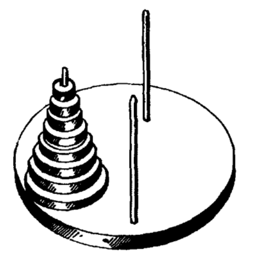
ابدأ الدرس برواية تاريخ اللغز على طلبة الصف:

روى راوس بول WW. Rouse Ball في كتابه *الاستجمامات والاختبارات الرياضية Mathematically Recreations and Essays* اسطورة ممتعة حول مصدر اللغز الذي يطلق عليه اسم "برج هانوي". ففي المعبد الكبير بمدينة بينارس Benares، وتحت القبة التي تمثل مركز العالم، تستقر صفيحة من النحاس الأصفر Brass ثبت عليها ثلاثة أبر ماسية، ارتفاع كل منها حوالي ذراع، وسمكها بحجم جسم النحلة. وعندما بدأ الله بعملية الخلق وضع 64 قرصا ذهبيا بأحجام تصغر تدريجيا على إحدى هذه الإبر الماسية، حيث يستقر أكبر قرص على القاعدة النحاسية. ان هذا البرج هو برج براهما Brahma.

ووفقا لما ترويه الأسطورة، عمل الكهان ليل نهار على نقل الأقراص من إحدى الإبر الماسية إلى الأخرى وفقا للقوانين الثابتة لدى البراهما، والتي تتطلب من الكاهن المكلف بالخدمة أن لا يزيد على نقل قرص واحد فقط، لكل مرة، وان يضع القرص على الإبرة بحيث لا يوجد تحته قرص اصغر منه. عندما يتم نقل الـ 64 قرصا من الإبرة التي وضعها الله فيها عند بدء الخلق إلى الإبر الأخرى، فإن البرج، والمعبد، والبراهمة جميعا سوف يتقوضون إلى تراب، ومع حصول صعق رعدي سوف يتلاشى العالم بأجمعه.

يمكن للطلبة أن يقوموا بتصنيع اللعبة التي تباع في المحلات التجارية، بسهولة بالغة. اصدر أمراً للطلبة بقطع ثمانية قطع دائرية من مادة الورق المقوى، وبأحجام مختلفة ثم دعهم يعملون ثقوبا ثلاثة في قطعة من الورق المقوى السميك بحيث تكون المسافة بين الثقوب أكبر من نصف القطر الخارجي لأكبر قرص من الأقراص الثمانية. ثم دعهم يقوموا بلصق قلم رصاص أو وتد إلى أعلى في كل ثقب من الثقوب الثلاثة. وينبغي أن يعمدوا إلى قص ثقب دائري بمركز كل قرص بحيث يكون كافيا لدخول الوتد فيه.

والآن يستطيع الطلبة وضع الأقراص على أحد الابر، ومرتبين حسب الحجم، بحيث يكون القرص الأكبر عند القاعدة. أن ترتيب الأقراص بهذه الصورة يطلق عليه "البرج Tower".



إذا أردت أن لا تزعج نفسك وتقلقها بمهمة قطع الأقراص، ولصق الإبر على اللوحة، يمكنك أن تصنع مجموعة أكثر بساطة بقطع ثمانية مربعات بأحجام مختلفة، وضعهم على ثلاثة قواعد من الصفيح بدلا من استخدام الأوتاد وبأي حال من الأحوال كن متيقظا إزاء القواعد المرعية في هذا اللغز.

في البداية توضع جميع الأقراص على عمود واحد مرتبة حسب حجمها ويكون القرص الأكبر في الأسفل. يتضمن اللغز نقل الأقراص، بمعدل قرص واحد لكل مرة، من هذا العمود إلى عمود آخر بشرط أن لا يستقر القرص على قرص أصغر منه، بأي حال من الأحوال. ينبغي أن يتم هذا الأمر بأقل عدد ممكن من نقلات الأقراص. حاول تذكير الطلبة بالقواعد الأساسية:

1. انقل قرصا واحدا في كل مرة.
2. لا تضع قرصا فوق قرص اصغر منه بأي حال من الأحوال.

ولكي يعتاد الطلبة على أسلوب ممارسة اللعبة، حاول أن تعرضها أولاً باستخدام ثلاثة أقراص فقط. وسيكونون قادرين على نقل برج يتألف من ثلاثة أقراص بواسطة سبعة نقلات.

والآن دعهم يجربون استخدام أربعة أقراص بدلا من ثلاثة. ولعمل هذا سيحتاج الطلبة إلى سبعة حركات لنقل الأقراص الثلاثة العليا إلى الوتدين الآخرين. إن هذا الأمر سيحرر القرص الرابع والذي يمكن أن ينقل إلى الوتد الشاغر.

سنحتاج الآن إلى سبعة حركات إضافية لنقل الثلاثة–العليا فوق القرص الرابع. وعليه، فإن مجموع الحركات المطلوبة سيكون 15 مرة.

عندما سيحاول الطلبة ممارسة اللعبة بخمسة أقراص، سيضطرون إلى نقل الأقراص الأربعة–العليا مرتين، الأولى لغرض تحرير القرص السفلي، والثانية لإعادة ترتيبهم على القرص السفلي، بعد نقله إلى موضعه الجديد. وعليه، فإن نقل 5 أقراص يتطلب 31 حركة، و 6 أقراص، 63 حركة. اطرح سؤالا على الطلبة حول عدد الحركات المطلوبة لنقل 7 أقراص، أو 8 أقراص؟.

وعندما يبدأ الطلبة بتفهّم جوانب التحدي التي تخص اللغز، ستظهر أمامهم مسألة رياضية ممتعة: ما هو الحد الأدنى من عدد النقلات المطلوبة لتحريك عدد محدد من الأقراص من عمود إلى آخر؟

لحل هذه المسألة، اقترح على الطلبة استخدام n لوصف عدد الأقراص، والحد الأدنى من عدد النقلات بالصيغة $2^n - 1$. من أجل ذلك. إذا كان لدينا ثمانية أقراص، فإن الحد الأدنى من عدد لنقلات سيكون 2^8-1=256-1=225.

ادع الطلبة إلى اعتبار البراهمة مع أقراصهم الـ 64 الذهبية، فكم يتطلب منهم من حركات لإكمال المهمة؟ $2^{64} - 1 =$ 18,446,744,073,709,551,615 إذا استطاع الكهان إنجاز نقلة واحدة خلال الثانية الواحدة، وبساعة عمل قدرها 24 ساعة يوميا، ولمدة 356 يوما بالسنة، فإنهم سيستغرقون أكثر من 580 مليار سنة لإنجاز المهمة الملقاة على عواتقهم الضعيفة! ، مع افتراض عدم اقترافهم لأية هفوة، أو خطأ أثناء عملية التنفيذ. بالمقابل فإن الفترة الزمنية التي يحتاجها الكهان لنقل نصف هذه الأقراص (32 قرصا) ستكون؟ (136 سنة = 4,294,967,296 ثانية) والآن، ادع الطلبة إلى معالجة مسألة نقل ثمانية أقراص، برج هانوي.

اقترح على الطلبة ترقيم الأقراص من 1 إلى 8 في ضوء حجم كل منها، من الصغير إلى الكبير، كذلك دعهم يرقمون الحركات من 1 إلى 255 (2^8–1=255). وسواء كان النشاط مشروعا صفيا أو مستقلا، ينبغي عليهم تدوين رقم كل حركة بمقياس ثنائي. وتحديد القرص الذي ينبغي تحريكه في كل نقلة، وتحديد الموضع الذي سيستقر فيه. يمكنهم الرجوع إلى مقياس العد الثنائي الذي يقابل تلك الحركة.

ثم اطلب منهم حساب الأرقام من اليمين لحين بلوغ الوحدة الرقمية الأولى. إن عدد الأرقام المحسوبة سوف تخبرنا بهوية القرص الذي يجب ن نعمد إلى تحريكه. فعلى سبيل المثال، إذا كان أول 1 من الجهة اليمنى هو الرقم الثالث، ينبغي أن ينقل القرص الثالث، والآن ينبغي تحديد موضعه. فإذا لم يكن هناك أي رقم على يسار أول 1، ينبغي وضع القرص على الوتد الذي لا يوجد قرص عليه. أما إذا كانت هناك أرقام على يسار أول 1، يجب على الطلبة عد الأرقام من اليمين، ثانية، لحين الوصول إلى ثاني 1. إن عدد الأرقام التي تم حصرها في هذه المرة سيميز القرص الكبير الذي تم نقله آنفا. كما ينبغي أن يقرر الطلبة سواء كانوا سيعمدون إلى وضع القرص الذي سينقلونه فوق القرص الأكبر أم إلى وتد "فارغ".

لتحديد الاستراتيجية التي سيعتمدونها، ينبغي أن يبدءوا بعد الأصفار الموجودة بين أول 1 من اليمين، وثاني 1 من اليمين، فإذا لم يكن هناك صفر بينهما، أو إذا كان عدد الأصفار بينهما زوجيا ينبغي أن يضعوا القرص الذي ينقلونه فوق القرص الذي يشير إليه ثاني 1. أما إذا كان عدد الأصفار الموجودة بينها فرديا، فيجب أن يضعوا القرص على الوتد الفارغ. إن الأعداد من 1 إلى 15 قد دونت بالمقياس الثنائي وعرضت هنا سوية مع الإرشادات بأول خمسة عشر نقلة.

1 انقل قرص 1
10 انقل قرص 2
11 ضع قرص 1 على قرص 2
100 انقل قرص 3
101 ضع قرص 1 على قرص 3
110 ضع قرص 2 على قرص 3
111 ضع قرص 1 على قرص 2
1000 انقل قرص 4
1001 ضع قرص 1 على قرص 4
1010 ضع قرص 2 على قرص 4
1011 ضع قرص 1 على قرص 2
1100 ضع قرص 3 على قرص 4
1101 ضع قرص 1 على غير قرص 3
1110 ضع قرص 2 على قرص 3
1111 ضع قرص 1 على قرص 2

التقييم اللاحق Postassessment

لتقييم تقدم الطلبة، اطلب منهم إكمال الجدول أعلاه، ثم دعهم يعملون على تنفيذ الـ 25 نقلة الأولى على الأنموذج الذي قاموا بإعداده لبرج هانوي.

7 أي يوم كان من الأسبوع؟ What Dav of the Week Was It?

يمكن استخدام هذا الموضوع للإثراء بروح استجمامية، إضافة إلى كونه تطبيق مهم ونافع في مادة الرياضيات. وسيستمتع الطلبة، أيضاً، بمعاينة العلاقات بين الفلك والـmod7. يضاف إلى ذلك، سيصاب الطلبة بدهشة بالغة عندما سيعاينون كثرة العوامل التي ينبغي اعتبارها في هذه المسألة والتي تبدو بسيطة جدا للوهلة الأولى!.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. عند إعطاء أي تاريخ، سيقوم الطلبة بتحديد اليوم الذي يوافقه من أيام الأسبوع.
2. عند إعطاء أي سنة، سيقوم الطلبة بتحديد تاريخ عيد الفصح في تلك السنة.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة جيدة بنسق التقويم ومكوناته. قم بإعطاء تاريخ ما في هذه السنة للطلبة، واطلب منهم بيان اليوم الذي يوافقه هذا التاريخ. وبعد أن يحاول الطلبة حل هذه المسألة، اطلب منهم إجراء حساباتهم لتحديد يوم ما في سنين سابقة. وسيكون الطلبة متلهفين لتطوير طريقة سريعة ودقيقة لإنجاز مثل هذه المهام التقويمية.

استراتيجية التعليم Teaching Strategy

ابدأ الدرس بشرح مختصر حول تاريخ التقويم عبر العصور. وستغمر نفوس الطلبة سعادة غامرة عند معرفة تفاصيل التطور التاريخي للتقويم الغريغوري Gregorian Date، وسيفتنون بمعرفة التغييرات التي مر بها من قبل فأمسى بالصيغة التي نراها هذه الأيام.

حاول أن تناقش العلاقة المتينة بين التقاويم وعلم الفلك Astronomy، وكيف إن الزمن يمكن أن يقاس، فقط، بملاحظة حركة الأجسام التي تتحرك بدورات ثابتة لا تتغير. وان الأجسام الوحيدة التي تمتاز بهذا النوع من الحركة هي الأجرام السماوية Celestial Bodies. من أجل هذا فإننا ندين إلى علم الفلك بكونه المورد الذي تؤسس عليه قواعد متينة لحسابات الزمن، بتحديد مدة اليوم، والشهر، والسنة. تعرف السنة بأنها عبارة عن فاصل زمني بين عمليتي مرور الأرض خلال نفس النقطة في مدارها بالنسبة للشمس. وتعرف هذه المدة بالسنة الشمسية Solar Year، والتي تبلغ حوالي 365.242216 يوم شمسي. إن مدة السنة لا تتناسب مع طول اليوم، وسيظل تاريخ التقاويم عبارة عن سجل تاريخي للمحاولات المستمرة لتعديل هذه الوحدات-غير المتكافئة، بطريقة ما، بحيث يمكن الحصول على نظام بسيط وعملي.

يرجع التقويم في أصوله إلى رومولوس Romulus المؤسس

الأسطوري لمدينة روما Roma، والذي اقترح عاما يتألف من 300 يوم تتوزع على 10 اشهر. وقد جاء بعده نوما Numa فأضاف شهرين إضافيين إلى السنة التي ابتدعها رومولوس. وقد استخدم هذا التقويم خلال ستة قرون ونصف تلت بدايات اختراعه، ولحين جاء يوليوس قيصر Julius Caesar فطرح على الملأ التقويم اليولياني Julian Calendar. إذا كانت السنة بالواقع عبارة عن 365.35 يوما، فإن إضافة يوم واحد، مرة واحدة، إلى 365 يوما كل أربع سنوات، سوف يحيل السنة الرابعة إلى سنة كبيسة Leap Year، ويؤدي إلى احتواء الاختلاف.

انتشر التقويم اليولياني مع بقية الخصائص الأخرى للحضارة الرومانية على رقعة واسعة من بلدان المعمورة وبقي سائد الاستخدام لحين عام 1582.

إن الصعوبة التي تعاني منها حسابات هذه الطريقة تكمن في الخلاف القائم بين القيمة المفترضة 365.25 وعدم مساواتها للقيمة الحقيقية 365.242216 ورغم أن هذا الاختلاف قد يعد قيمة غير معنوية، بيد ان مرور مئات السنين سينجم عنه تراكم ملحوظ للفروقات سوف تنعكس بعدد ملحوظ من الأيام. كانت السنة اليوليانية طويلة إلى حد كبير، وبحيث عند حلول عام 1582 بلغت الأخطاء التقويمية لهذه السنة 10 أيام.

حاول البابا جريجوري الثاني عشر Pope Gregory XII إيجاد طريقة لاحتواء الأخطاء الموجودة في التقويم. ونظرا لحصول الاعتدال الربيعي Vernal Equinox في 11 آذار عام 1582 فقد اصدر أمرا بطمس عشرة أيام من التقويم، في تلك السنة، بحيث يقع الاعتدال الربيعي في يوم 21 آذار وكما ينبغي له أن يكون. وعندما أعلن عن الإصلاحات والتعديلات الجديدة على التقويم، هرع إلى صياغة القواعد التي تخص السنوات الكبيسة. يضم التقويم الجيورجياني سنوات (تم احتسابها على أساس أنها تتألف من حوالي 365.245 يوما) قابلة للقسمة على 4 بالنسبة للسنوات الكبيسة، ما لم تكن قابلة للقسمة على 100 ودون 400. وعليه فإن السنوات: 1700، 1800، 1900، 2100، ... ليست سنوات كبيسة، لكن سنة 2000 هي كبيسة في ضوء هذه القاعدة.

لم يعتمد تغيير التقويم من الأسلوب اليولياني إلى الأسلوب الجيورجاني في بريطانيا ومستعمراتها لغاية عام 1752. وفي شهر سبتمبر من تلك السنة تم حذف 11 يوما من السنة، وأضحى يوم 2 سبتمبر يوم 14 سبتمبر. إن من الممتع القيام بإلقاء نظرة على نسخة من تقويم شهر سبتمبر لعام 1752 والتي تم الحصول عليها من روزنامة Almanac ريتشارد ساوندرز Richard Saunders والتي تم طبعها في لندن (شكل A).

1752 September hath XIX Days this Year						
First Quarter the 15th day at 2 afternoon Full Moon, the 23rd day at 1 afternoon Last Quarter, the 30th day at 2 afternoon						
M D	W D	Saints' Days Terms, &c	Moon South	Moon Sets	Full Sea at Lond	Aspects and Weather
1	f	Day br 3 35	3 A 27	8 A 29	5 A 1	♊ ♃ ☿
2	g	London burn.	4 26	9 11	5 38	Lofty winds
According to an act of Parliament passed in the 24th year of his Majesty's reign and in the year of our Lord 1751, the Old Style ceases here and the New takes its place: and consequently the next Day, which in the old account would have been the 3d is now to be called the 14th, so that all the intermediate nominal days from the 2d to the 14th are omitted or rather annihilated this Year and the Month contains no more than 19 days, as the title at the head expresses						
14	e	Clock slo. 5 m.	5 15	9 47	6 27	Holy Rood D
15	f	Day 12 h 30 m	6 3	10 31	7 18	and hasty
16	g		6 57	11 23	8 16	showers
17	A	15 S. Aft. Trin.	7 37	12 19	9 7	
18	b		8 26	Morn.	10 22	More warm
19	c	Nat. V. Mary	9 12	1 22	11 21	and dry
20	d	Ember Week	9 59	2 24	Morn.	weather
21	e	St. Matthew	10 43	3 37	0 17	☌ ♀ ☿
22	f	Burchan	11 28	☾ rise	1 6	♊ ♃ ♀
23	g	Equal D. & N.	Morn.	6 A 13	1 52	☌ ☉ ♂
24	A	16 S. Aft. Trin	0 16	6 37	2 39	☌ ☉ ☿
25	b		1 5	7 39	3 14	
26	c	Day 11 h. 52 m.	1 57	8 39	3 48	Rain or hail
27	d	Ember Week	2 56	8 18	4 23	☌ ♂ ☿
28	e	Lambert bp.	3 47	9 3	5 6	now abouts
29	f	St. Michael	4 44	9 59	5 55	✱ ♄ ☿
30	g		5 43	11 2	6 58	

شكل A

لقد اسهم الرياضيون في إمعان النظر والتفكير بمعضلة التقويم، وحاولت اقتراح وتطوير طرائق لتحديد الأيام الخاصة بأي تاريخ أو عطلة. ولتطوير طريقة لاحتساب اليوم، ينبغي أن يدرك الطلبة بأن السنة التقويمية (باستثناء السنة الكبيسة) تتألف من 52 أسبوع ويوم واحد وإذا حل يوم سنة جديدة، في سنة من السنين، وبعد سنة كبيسة، وكان هذا اليوم هو يوم الأحد، فإن السنة القادمة سوف تبتدئ يوم الاثنين، ثم ستبتدئ السنة التي تليها بيوم الثلاثاء. أما السنة الكبيسة فسوف يكون يومها الأول هو يوم الأربعاء. ونظرا لأن السنة كبيسة تحوي على 366 يوما، فإن اليوم الأول من السنة التي تليها سيكون يوم الجمعة، ولن يوافق يوم الخميس كما يظن البعض، إن التعاقب التقليدي سوف يعاني من إعاقة كل أربعة سنوات (باستثناء السنين التي تقبل القسمة على 100 وغير قابلة للقسمة على 400).

في البداية، حاول أن تخترع طريقة لإيجاد أول يوم من أيام الأسبوع Weekday لتواريخ محددة في سنة بذاتها.

افترض بأن 4 فبراير يوافق يوم الاثنين، ففي أي يوم من الأيام الأسبوع سيوافق يوم 15 سبتمبر؟ بافتراض إن السنة التقويمية، تلك، ليست سنة كبيسة، فإننا سنكون بحاجة، فقط، إلى:

(1) إيجاد عدد الأيام بين 4 شباط و 15 سبتمبر.

في البداية سنكتشف بأن 4 شباط هو اليوم الخامس والثلاثين من السنة وان 15 سبتمبر هو اليوم الثامن والخمسون بعد المائتين من نفس السنة. (إن استخدام الجدول في شكل "B" سوف يجعل من عملية الحساب هذه سهلة للغاية). إن الفرق بين 258 و 35 يمثل عدد الأيام، والبالغة 223 يوما.

(2) نظرا لوجود سبعة أيام في الأسبوع، قم بتقسيم 223 على 7 [31 = 223/7 + المتبقي = 6]. (3) إن العدد 6 يظهر بأن اليوم الذي سيوافق يوم 15 سبتمبر يوم السادس بعد الاثنين أي يوم الأحد. وفي حالة السنة الكبيسة ينبغي أن يضاف يوم واحد بعد يوم 28 شباط لكي يصبح عدد أيام الشهر 29 يوما.

وسنناقش في السطور القادمة طريقة مماثلة لتحديد أول يوم من أيام الأسبوع في سنة بذاتها. إن كون عدد أيام يناير 31 يوما، فإن نفس التاريخ في الشهر التالي سيكون بعد 3 أيام من ذاك اليوم في شهر يناير، كذلك فإن نفس التاريخ في مارس سيكون أيضاً بعد 3 أيام من ذاك اليوم في شهر يناير، وفي إبريل سيكون بعد 6 أيام من أيام شهر يناير. نستطيع بعد هذا أن ننشئ جدولا لمعاملات الأعداد Index Number بالنسبة للأشهر والتي ستعدل جميع التواريخ إلى التاريخ المقابل في شهر يناير.

يناير	0	إبريل	6	يوليو	6	أكتوبر	0
فبراير	3	مايو	1	أغسطس	2	نوفمبر	3
مارس	3	يوليو	4	سبتمبر	5	ديسمبر	5

(إن معاملات الأعداد تزودك، في الحقيقة، بعدد الأيام بين الأشهر مقسومة على العدد 7 للحصول على الأيام المضافة بنفس الطريقة السابقة).

والآن لم تعد بحاجة إلا إلى إضافة اليوم إلى معامل العدد الخاص بالشهر، وستظهر عملية التقسيم على 7 والمتبقي عنها إلى يوم الأسبوع).

مثال: تأمل عام 1925، حيث وافق 1 يناير يوم الخميس. جد يوم 12 مارس.

لإنجاز هذه المهمة، أضف 15=3+12، وقسم 15/7=2 والباقي 1. وهذا يظهر بأن اليوم المذكور سيوافق يوم الخميس. في السنوات الكبيسة سيضاف 1 يوم إضافي للتواريخ بعد 29 فبراير.

سيرغب الطلبة، الآن، بإيجاد اليوم الذي يوافق تاريخا محددا في سنة من السنين. حاول أن تنبه الطلبة بأنهم سيكونون بحاجة إلى معرفة ما هو اليوم الذي وافق يوم 1 يناير من السنة 1 ثم مباشرة إجراء تعديلات بالنسبة للسنوات الكبيسة.

يمكن تحديد اليوم الذي وافق يوم 1 يناير كانون الثاني من السنة 1 وفق ما يأتي.

بما أن يوم 1 يناير، عام 1952 كان يوافق يوم الأربعاء، وعلى أساس قيمة السنة الشمسية، فإن عدد الأيام منذ 1 يناير هي 1951×365.2425=712588.1175. بتقسيم العدد على 7، سنحصل على 101.798 مع المتبقي 2. إن العدد المتبقي يؤشر إلى ضرورة حساب يومين من يوم الأربعاء. ونظرا لكون الحسابات تعود إلى فترة ماضية، يجب أن تمارس عملية العد بأسلوب ارتجاعي Backward، وتشير إلى أن 1 يناير (في التقويم الجيوجياني) يقع يوم الاثنين.

إن إحدى الطرف المستخدمة في تحديد يوم بأي سنة من السنين يقترح معالجة تواريخ كل قرن بمفردها. إن معرفة أي يوم من أيام الأسبوع لأول يوم من تلك الفترة، نستطيع أن نحدد، بنفس الأسلوب المعتمد سابقا، الأيام الإضافية بعد ذلك اليوم من أيام الأسبوع (وعليه فإن اليوم من أيام الأسبوع سيقع في ذلك القرن). بالنسبة للسنوات 1900–1999، فإن المعلومات المطلوبة هي:

1. معاملات الأعداد للأشهر (راجع المناقشة السابقة).
2. يوم 1 يناير لعام 1900 وافق يوم الاثنين.
3. عدد سنوات (بإعطاء عدد الأيام التي تزيد على دورة 52 أسبوعا) التي انقضت منذ أول يوم من أيام عام 1900.
4. عدد السنوات الكبيسة (بمعنى آخر، الأيام الإضافية) التي حصلت منذ بداية القرن. وبمعرفة ذلك نستطيع تحديد عدد الأيام في دورة أسبوع يوم الاثنين التي نريد احتسابها.

أمثلة Examples

1. يوم 9 مايو عام 1914. أضف 9 (أيام إلى الشهر) و1 (معامل العدد للشهر)، و14 (عدد السنين منذ بداية القرن) وأخيرا 3 (عند السنوات الكبيسة في ذلك القرن لغاية تاريخه) 27=3+14+1+9، يقسم الناتج على 7، ويتبقى 6 فسيكون اليوم = السبت.
2. يوم 16 أغسطس عام 1937. أضف 64=9+37+2+16 نجد تقسيم الناتج على 7، سيبقى 1، أي يوم الاثنين.

للفترة 1800–1899، يمكن اتباع نفس الطريقة باستثناء كون يوم 1 يناير الثاني لعام 1800 هو الأربعاء. ويمكن اعتماد نفس الطريقة للفترة الممتدة بين 14 سبتمبر 1752 ولغاية

1799 باستثناء إن اليوم الأول من تلك الفترة سيكون يوم الجمعة. وللفترة التي تليها وبضمنها 2 سبتمبر 1752، يمكن استخدام نفس الطريقة الإجرائية باستثناء إن السنة بكاملها سوف تضاف وأن عدد الأيام سوف يبتدئ بيوم الجمعة.

مثال Example

يوم 13 مايو عام 1240. أضف: 13+1+1240+10=1264 بقسمة الناتج على 7، سيتبقى 4، اليوم هو الاثنين. هناك طريقة أخرى لتحديد اليوم دون الحاجة إلى اعتبار فترات متفرقة. سنبتدئ، ثانية، بمعرفة يوم 1 يناير من السنة 1. وسنقوم بعد الأيام الفعلية التي انقضت منذ 1 يناير، ولكن باحتساب عدد الأيام الزائدة على الأسابيع المنقضية، وأضف إلى هذا العدد عدد الأيام التي انقضت منذ 1 يناير للسنة قيد الدراسة. إن هذا المجموع ينبغي أن يقسم على 7، وسيظهر المتبقي عدد الأيام التي ينبغي إحصاؤها لذلك الأسبوع، لذا فإن الصيغة ستكون، 1 (الاثنين) + المتبقي من القسمة على 7 (عدد السنين التي انقضت سابقا + عدد الأيام التي انقضت منذ 1 يناير للسنة المطلوبة + عدد السنوات الكبيسة التي مرت منذ السنة 1) = عدد أيام الأسبوع. ينبغي أن تأخذ حسابات السنوات التي تنتهي بصفرين، والتي لا تقبل القسمة على 400، وهي سنوات غير كبيسة. وعليه، يمكن طرح عدد محدد من السنوات الكبيسة من العدد الكلي لهذه السنوات.

التاريخ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
يناير	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
فبراير	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
مارس	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75
إبريل	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106
مايو	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136
يونيو	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167
يوليو	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197
أغسطس	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228
سبتمبر	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259
أكتوبر	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289
نوفمبر	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320
ديسمبر	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350

جدول (B)

التاريخ	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
يناير	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
فبراير	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59			
مارس	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
إبريل	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	
مايو	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151
يونيو	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	
يوليو	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212
أغسطس	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243
سبتمبر	260	261	262	362	264	265	266	297	268	269	270	271	272	273	
أكتوبر	290	291	292	392	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304
نوفمبر	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	
ديسمبر	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365

تابع جدول (B)

198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	يوليو
229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	أغسطس
260	261	262	362	264	265	266	297	268	269	270	271	272	273		سبتمبر
290	291	292	392	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	أكتوبر
321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334		نوفمبر
351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	ديسمبر

تابع جدول (B)

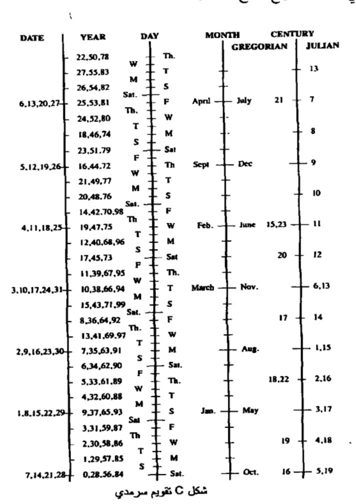
مثال Example

يوم 25 ديسمبر: عام 1954. 1+1953+488 (سنوات الكبيسة) - 15 (سنوات القرن كبيسة 4-19) + 358 (عدد الأيام بين 1 يناير 1954 و 25 ديسمبر 1954)= 2785. بتقسيم الناتج على 7 سيكون الباقي 6. وعليه سيقع يوم 25 ديسمبر عام 1954 في اليوم السادس من الأسبوع، السبت.

لقد اقترحت كثير من الجداول والآليات لحل مسألة تحديد الأيام. ويظهر أدناه شكل رسومي اخترع لهذا الغرض.

يتألف الأول (شكل C) من أربعة مقاييس مدرجة Scales ويمكن استخدامه كما يأتي:

1. باستخدام مسطرة عدلة، قم بوصل النقطة الواقعة على المقياس المدرج الأول والتي تبين التاريخ، مع الشهر المناسب على المقياس المدرج الثالث. قم بتأشير نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المقياس المدرج الثاني.
2. قم بوصل نقطة التقاطع على المقياس المدرج الثاني مع النقطة الواقعة على المقياس المدرج الرابع والتي تبين القرن الصحيح. قم بتأشير تقاطع هذا المستقيم مع المقياس المدرج الثالث.
3. قم بوصل هذه النقطة مع النقطة التي تبين السنة المناسبة على المقياس المدرج الأول. إن نقطة التقاطع مع المقياس المدرج الثاني سوف تظهر اليوم المطلوب من الأسبوع. (ملاحظة: بالنسبة للأشهر يناير وفبراير استخدم السنة مطروحا منها 1).



شكل C تقويم سرمدي

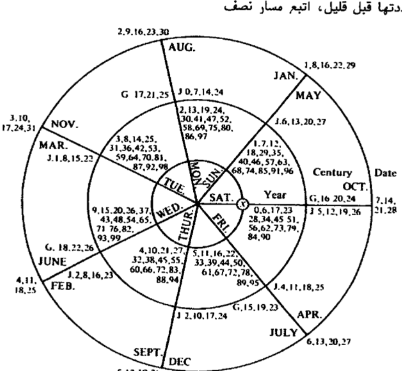
يتألف الترتيب الثاني (انظر شكل D) من ثلاثة حلقات متحدة المركز Concentric يقطعها سبعة أشعة Radii. تتألف طريقة العمل من:

(1) حدد التاريخ والشهر على الحلقة الخارجية، وإذا كانت نقطتان، ارسم خطا مستقيما بينهما، وإذا كانتا متطابقتان ارسم مماسا لهما.

(2) حدد القرن على الحلقة الوسيطة. ارسم من هذه النقطة مستقيما يوازي المستقيم الذي رسم في الخطوة السابقة، لحين يقطع الحلقة الوسيطة في نقطة أخرى. إن النقطة التي سنحصل عليها هي نقطة تقاطع نصف القطر مع الحلقة.

(3) من النقطة التي حددتها قبل قليل، اتبع مسار نصف القطر باتجاه الحلقة الداخلية، ثم حدد السنة. (إذا كان الشهر يناير أو فبراير استخدم السنة السابقة). ارسم مستقيما بين هاتين النقطتين اللتان تقعان على الحلقة الداخلية. (إذا تطابقت على يوم السبت، سيكون يوم الأحد هو يوم الأسبوع المطلوب).

(4) والآن جد النقطة حيث يقطع نصف قطر يوم السبت الحلقة الداخلية، ومن نقطة السبت هذه ارسم خطا موازيا للخط المرسوم آنفا. سيلتقي المستقيم المرسوم مع الحلقة الداخلية في أحد تقاطعات نصف القطر مع الحلقة. أن يوم الأسبوع على نصف القطر الأخير يمثل يوم الأسبوع الخاص بالتاريخ الذي ابتدأنا حساباتنا معه.



شكل (D) : تقويم سرمدي ، من نوع حلقة نصف قطرية

إن مسألة التقويم الأبدي Perpetual Calendar قد استوعبت جل اهتمام مجموعة من علماء الرياضيات، وقد أولى هؤلاء العلماء اهتماما خاصا بحساب تاريخ عيد فصح يوم الأحد. تقع أيام عيد معظم الكنائس في تاريخ محدد، وان القاعدة الكنسية (الاكليريكية) التي تخص عيد الفصح هي بالواقع بالغة التعقيد. فينبغي أن يقع عيد الفصح في يوم أحد بعد اكتمال القمر الذي يحصل بعد الاعتدال الربيعي. وعليه فإن يوم أحد الفصح هو عيد ديني متنقل والذي قد يقع مبكرا في 22 مارس أو يتأخر لغاية 25 إبريل. تستخدم الطريقة الآتية لتحديد أحد الفصح في أي سنة من السنين من 1900–1999

وقد ارتكزت إلى المنهج الذي اعتمده كاوس:

1. جد المتبقي عندما تقسم السنة على 4، وليكن هذا الرقم مساويا لـ a.
2. جد المتبقي عندما تقسم السنة على 7، وليكن هذا الرقم مساويا لـ b.
3. جد المتبقي عندما تقسم السنة على 19، واضرب قيمة المتبقي بـ 19، وأضف 24، وقم بإيجاد المتبقي ثانية عندما يقسم المجموع على 30. وليكن هذا الرقم مساويا لـ c.
4. اجمع الحدود الآتية: $2a+4b+6c+3$ ثم اقسم المجموع على 7 وأطلق على المتبقي الرمز d.

إن حاصل جمع d+c سوف يعطينا عدد الأيام بعد 22 مارس والتي سيقع فيها يوم أحد الفصح.

مثال: عيد الفصح عام 1921

(1). 21/4 المتبقي 1.

(2). 21/7 المتبقي صفر.

(3). 21/9 المتبقي2، 30/[24+(19)2] المتبقي2

(4). 7/[3+12+0+2] المتبقي 3

3+2=5 بعد يوم 22 مارس = 27 مارس.

إن الطريقة أعلاه تحدد التاريخ بدقة باستثناء السنتين 1954 و 1981. لأن هاتين السنتين تعطينا التاريخ متأخرا بمقدار 1 أسبوع بالضبط، ويكون عيد الفصح 18 و 19 إبريل على التوالي).

التقييم اللاحق Postassessment

1. ادع الطلبة إلى تحديد يوم الأسبوع الذي يوافق يوم ميلادهم.
2. ادع الطلبة إلى العمل على مجموعة التواريخ الآتية:

12 أكتوبر 1492 — 30 مايو 1920 — عيد الميلاد 1978

1 إبريل 1945 — 21 أكتوبر 1805 — 14 أغسطس 1898

4 تموز 1776

3. ادع الطلبة إلى إيجاد تواريخ مجموعة من أيام أحد الفصح للسنوات. 1929، 1977، 1930، 1978، 1950، 1969، 1944.

ولد جورج واشنطن في 11 فبراير عام 1732، لماذا نحتفل بيوم مولده في 22 فبراير ؟

8 الأعداد المشقلبة Palindromic Numbers

تهدف هذه الوحدة إلى تعريف الوحدات المشقلبة Palindromic Numbers وبيان جملة من خصائصها. تناسب دراسة هذه الأعداد أي صف من الصفوف الثانوية، كما أنها تزود جميع الطلبة بمنهج لتحليل الإعداد والعلاقات القائمة بينها. ويمكن اختيار مفردات محددة من هذا الموضوع للطلبة الذي يعانون من بطئ في الفهم (على سبيل المثال، خاصية الإضافة المعكوسة)، كما ويمكن تحري خصائصها المتقدمة بواسطة الطلبة النابهين والمتفوقين (على سبيل المثال، الشقلبة المعدلةModular Palindromic).

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيحاول الطلبة بيان وتحليل خصائص الأرقام المشقلبة.
2. سيقوم الطلبة بإنشاء مشقلبة جديدة من أي عدد صحيح.

التقييم السابق Pre Assessment

دع الطلبة يمارسون عملية تحليل العبارة "Madam I'm Adam" والكلمات "Rotator"، و "Reviver" مع بيان خصوصيتها Peculiarity (يمكن قراءتها بالاتجاهين، إلى أمام، وإلى خلف). وضح للطلبة بأن مثل هذه العبارات يطلق عليها شقلبة Palindrome، وتشمل في حقل الرياضيات الأعداد التي تمتاز بنفس الخصائص، مثل، 343، 59695 ويطلق عليها الأعداد المشقلبة Palindromic Numbers. يمكن أن يكلف الطلبة بإعطاء أمثلة مختلفة عن هذه الأرقام مع أعداد قائمة قصيرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد أن يكمل الطلبة إعداد قوائم الأعداد المشقلبة، يمكن مباشرة عملية تحليل لهذه المباشرة. كما ويمكن أن تطرح هذه الأسئلة عليهم لإدارة حلقة النقاش : هل يحتوي العدد المشقلب على عدد فردي أو مركب من الأرقام، أم كلاهما؟. هل سيكون مربع أو مكعب الأعداد المشقلبة مشقلبا أيضاً؟ إذا أعطيت عددا صحيحا موجبا هل يمكن أن تنشئ عددا مشقلبا نتيجة إجراء جملة عمليات على هذا العدد الصحيح؟

سيحاول الطلبة الإجابة على هذه الأسئلة عبر تفحص صلاحية الإجابات على الأعداد الشاخصة في قوائمهم، أو عن طريق محاولة توليد أرقام مشقلبة جديدة. في هذه المرحلة سيصبح الطلبة مهيئين لدراسة الخصائص المشقلبة الآتية:

1- تحتوي الأعداد المشقلبة على أعداد أولية، وأعداد مركبة (على سبيل المثال، 181 هو مشقلب أولي، بينما 575 هو مشقلب مركب). بصورة عامة ينبغي أن يكون العدد المشقلب - الأولي من عدد فردي من الأرقام، باستثناء العدد 11.

البرهنة على الأخير: (بأسلوب التناقض Contradiction): دع P تمثل مشقلبا أوليا يتألف من عدد زوجي من الأرقام. افترض r تساوي مجموع جميع الأرقام في المواقع الزوجية للعدد الأولي P، و s تساوي مجموع جميع الأرقام في المواقع الفردية للعدد P. نظراً لأن P هو مشقلب يتألف من أعداد زوجية فإن المواقع الفردية ستكون ضعف الأرقام في المواقع الزوجية، وعليه $s - r = 0$. لكن اختبار قابلية القسمة على 11 يؤشر بأن العدد يكون قابلا للقسمة على 11 إذا كان الفرق بين جميع الأرقام في المواقع الزوجية وجميع الأرقام في المواقع الفردية يساوي صفرا، أو إحدى مضاعفات 11. وعليه، فإن P تمتلك 11 كمعامل، ولا يمكن أن تكون عددا أوليا وهو تناقض.

2- جميع الأعداد الصحيحة N التي ينتج عنها مربعات مشقلبة ليس من الضرورة أن تكون مشقلبات. بينما يوجد عدد لا نهائي من المشقلبات التي تنتج مربعات مشقلبة (على سبيل المثال، $484 = 22^2$، $44944 = 212^2$)، وتوجد بعض الأعداد الصحيحة غير المشقلبة التي تكون مربعاتها مشقلبة (على سبيل المثال، $676 = 26^2$، $698896 = 836^2$) بالإضافة إلى وجود بعض الأعداد الصحيحة ـ المشقلبة التي تنتج مربعات غير مشقلبة (على سبيل المثال، $131^2 = 17161$، $232^2 = 53824$).

إن الأعداد الواحدية Repunits، والتي تتألف بصورة كلية من العدد 1 (ويرمز له بالرمز R_k، حيث تمثل k عدد الواحدات). تكون أعداد مشقلبة وتنتج مربعات مشقلبة عندما $1 \le k \le 9$: $R_2^2 = 121$: $R_3^2 = 12321$، وبصورة عامة $R_k^2 = 12\ldots k \ldots 21$، حيث $k = 9$.

من ناحية ثانية، عندما $k > 9$ فإن المحمول في الإضافة سوف يفتقد حاصل الضرب المشقلب (مثال، $R_{10}^2 = 12\ldots.6790098\ldots 21$).

لقد وجد أن الأعداد المربعة غنية بشكل كبير في الشقلبة من الأعداد الصحيحة العشوائية.

3- بصورة عامة، فإن الأعداد التي تنتج مكعبات مشقلبة (بصورة أولية والبعض الآخر مركبة) هي أعداد مشقلبة بذاتها. الأعداد N التي تنتج مكعبات مشقلبة هي كما يأتي:

أ- $N = 1, 7, 11$ ($1^3 = 1$, $7^3 = 343$, $11^3 = 1331$)

ب- $N = 10^k + 1$ تمتلك مكعبا مشقلبا يتألف من k-1 من الأصفار، بين كل أزواج متعاقبة من 1، 3، 3، 1: مثال عندما $k = 1$، $N = 11$، $N^3 = 1331$، عندما $k = 2$، $N = 101$ و $N^3 = 1030301$، عندما $k = 3$، $N = 1001$، $N^3 = 1003003001$، .... الخ.

لاحظ بأنه عندما تكون $k = 2m + 1$، $m > 0$، فإن N تقبل القسمة على 11 وبالتالي ستكون مركبة.

ج- تتألف N من مجموعات من 31 وأي عدد آخر(والذي ينبغي أن يكون زوجيا)من الأصفار تقبل القسمة على 3 وتمتلك مكعبا مشقلبا: مثال: $(111)^3 = 1367631$، $(10101)^3 = 1030607060301$.

د- N = أي عدد مشقلب من الأصفار وأربعة واحدات (four 1's) هي ليست عددا أوليا وتمتلك مكعبا مشقلبا، باستثناء عندما يظهر نفس العدد من الأصفار في ثلاثة فراغات بين الواحدات، مثال: $(11011)^3 = 1334996994331$، $(10100101)^3 = 1003033091390931903303001$، في حين أن $(101010)^3$ لا ينتج عددا مشقلبا.

إن العدد الوحيد بصيغة $N < 2.8 \times 10^{14}$ وهو عدد غير مشقلب، ورغم ذلك ينتج مكعبا مشقلبا هو $2201^3 = 10662526601$.

4- إذا أعطيت أي عدد صحيح N تستطيع غالبا الوصول إلى أي عدد مشقلب بإضافته إلى مقلوبه (العدد الذي تحصل عليه بقلب جميع أرقامه) والاستمرار بعملية الإضافة لحين الحصول على المشقلب. على سبيل المثال، إذا كان $N = 798$، إذن $798 + 897 = 1695$، $1695 + 5961 = 7656$، $7656 + 6567 = 14223$، $14223 + 32241 = 46464$ (مشقلب).

في حين أن بعض الأعداد يمكن أن تصل إلى المشقلب بخطوتين فقط (مثال، 75، 48)، فهناك أعداد أخرى يمكن أن تصل إلى المشقلب بعد ستة خطوات مثل 97، وهناك أعداد لا يمكن أن تصل إلى المشقلب مثل (89، 98) إلا بعد 24 خطوة. وقد عثر على بعض الأعداد مثل 196 لا يمكن أن تصل إلى إنتاج عدد مشقلب رغم تطبيق أكثر من 1000 خطوة من خطوات هذه القاعدة، الأمر الذي يؤكد عدم إطلاق صحة هذه

القاعدة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة، ولكن على مجموعة كبيرة منها لأن تكرار مثل الحالات السابقة يكاد يكون قليلا جدا. لقد تمت البرهنة على أن هذه القاعدة لا تصلح في الأساس 2: إن أصغر مثال مقارب Counter Example هو العدد 10110 والذي سيصل إلى المجموع 10110100 بعد أربعة خطوات، وبعد ثمانية خطوات سيكون 1011101000، وبعد 12 خطوة سيكون 101111010000. في كل خطوة رابعة يضاف رقم واحد لكل من التعاقبين (التي تحتها خط) ويلاحظ بأن هذه المجاميع الجديدة ليست أعدادا مشقلبة. لقد عثر على مجموعة عموميات في عملية الجمع المعكوس وهي :

(أ) عندما تنطبق هذه التقانة على أعداد صحيحة متباينة تنتج نفس العدد المشقلب. على سبيل المثال، كل من الأعداد: 554، 752، 653 تنتج العدد المشقلب 11011 بثلاث خطوات.

بصورة عامة، فإن جميع الأعداد الصحيحة التي يكون فيها أزواج الأرقام المتوافقة مشابهة للوسط، وتمتلك نفس المجموع، سوف تنتج نفس العدد المشقلب بنفس العدد من الخطوات التنفيذية (في هذه الحالة، فإن جميع أزواج الأرقام سوف تضاف لغاية 9). وتوجد، في بعض الحالات، أعداد صحيحة تنتج نفس العدد المشقلب وبعدد خطوات مختلف. على سبيل المثال. يصل العدد 99 إلى 79497 في 6 خطوات بينما يصلها العدد 7299 في خطوتين.

(ب) يمكن أن تصنف الأعداد المؤلفة من رقمين على أساس مجموعهما لتحديد عدد الخطوات المطلوبة لإنتاج العدد المشقلب. ويبدو واضحا بأنه إذا بلغ مجموع الرقمين 9، فإننا نحتاج إلى خطوة واحدة، أما إذا كان المجموع 10 (مثل 64 أو 73) فإننا سنكون بحاجة إلى خطوتين. إن تحليلا مشابها سوف يؤدي بالطلبة إلى الاستنتاج الذي ينص على أنه: إذا كان مجموع الأرقام 11، 12، 13، 14، 15، 16، 17، أو 18 فإن العدد المشقلب سوف ينتج بعد: 1، 2، 3، 4، 6، 24، 1 على التوالي. يمكن أن يكلف الطلبة بإجراء تحليل لهذا النوع مع إدراج نتائجهم على شكل جدول.

يمكن لموضوع الأعداد المشقلبة أن ينال مزيدا من الدراسة والاستقصاء بواسطة الطلبة النابهين. وستعالج التحريات الإضافية مساحات أخرى تشمل : الأصناف المتعددة للأعداد المشقلبة مثل العناصر، الأعداد الأولية للمشقليات المتخصصة.

مثل الأعداد الأولية بأرقام أولية كعناصر، الأعداد المشقلبة، الأعداد المثلثية والأعداد المخمسة والتي هي أيضا مشقلبة.

التقييم اللاحق Post Assessment

1- هل تنتج الأعداد التالية مشقلبات مكعبة :

أ- 1001001.

ب- 1001001001.

ج- 10100101.

د- 100101.

2- إذا كان لديك العدد الآتي والذي يتألف من رقمين، بين عدد الخطوات المطلوبة من الإضافة العكسية للوصول إلى عدد مشقلب:

أ- 56.

ب- 26.

ج- 91.

د- 96.

3- باشر تقانة الإضافة العكسية على الأعداد الصحيحة الآتية، وجد أعداد صحيحة أخرى التي تنتج نفس المشقلب الذي ينتج عنها:

أ- 174.

ب- 8699.

9 العدد الآسر تسعة
The Fascinating Number Nine

تهدف هذه الوحدة إلى تقديم عرض استجمامي للخصائص المتعددة – الممتعة التي يمتاز بها العدد 9. ومن ضمن الأهداف التي تكمن وراء عرض الخصائص المسلية لهذا العدد تبرز عملية تحفيز الطلبة على ممارسة تحريات إضافية والتبصر بخصائص الأعداد المختلفة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1- سيقوم الطلبة بعرض ثلاثة خصائص، على الأقل، للعدد تسعة.

2- سيوفر الطلبة مثالا على الحسابات المختصرة التي تتضمن العدد تسعة.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على دراية كافية بمختلف حقول المسلمات Postulates، ويتمتعون بخبرة ومهارة معقولة بالتعامل مع عمليات: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة. إن معرفة كافية بمادة الجبر ستوفر مساعدة إضافية للطلبة بيد أن توفرها ليس شرطا ضروريا.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

يفضل عند عرض أفكار جديدة على الصف، بناء المعطيات الجديدة على معارف سابقة لديهم. فعلى سبيل المثال، أدع الطلبة إلى ضرب العددين 99 × 53 إن الطلبة الذين لا يخامرهم شك في معلوماتهم سيقومون بإنجاز الحسابات بالطريقة المألوفة. وبعد انتهاء الطلبة من تنفيذ هذه المهمة، اقترح ما يأتي: نظرا لأن

$$\begin{aligned} 99 &= 100 - 1 \\ 53 \times 99 &= 53\,(100 - 1) \\ &= 53\,(100) - 53(1) \\ &= 5300 - 53 \\ &= 5247 \end{aligned}$$

والآن اجعلهم يستخدمون هذه التقانة لضرب العددين 42×99.

إن عملية (إبعاد التسعات خارجا Casting out Nines) هي تقانة شائعة تعتمد في تدقيق الحسابات. على سبيل المثال، إذا رغب الطلبة بتدقيق عملية الجمع 29+57+85+35+6=212، فإنهم سيعمدون، ببساطة، إلى تقسيم كل عدد ورد في عملية الجمع على 9 وسيبقى المتبقي. لذا سيكون لديهم: 2. 3. 4. 8و 6 وحاصل جمعها هو 23 (أنظر أدناه):

$$\begin{array}{rcr} 29 & \rightarrow & 2 \\ 57 & \rightarrow & 3 \\ 85 & \rightarrow & 4 \\ 35 & \rightarrow & 8 \\ +\ 6 & \rightarrow & +\ 6 \\ \hline 212 & & 23 \end{array}$$

إن المتبقي من 212 ÷ 9 هو 5. فإذا كان المتبقي من 212 ÷ 9 يساوي المتبقي من 23 ÷ 9، فإن العدد 212 سيكون هو الجواب الصحيح. في هذه الحالة، ولما كان العدد المتبقي هو 5 من عملية القسمة على 9، فإن الناتج 212 هو جواب صحيح.

لن يكون الطلبة واثقين، بصورة قاطعة من صحة الإجابة عند استخدام طريقة التدقيق هذه، نظرا لأن إعادة ترتيب الأرقام، مثلا 221، سوف تؤدي إلى الحصول على نفس العدد المتبقي عند تقسيمه على 9.

ولعل من الممتع ملاحظة عدم ضرورة إيجاد المتبقي عند القسمة على العدد 9. وكل ما عليك أن تفعله هو جمع أرقام العدد (الذي سيقسم على 9)، وإذا لم يكن ناتج القسمة يتألف من عدد أحادي الرقم، تعاود عملية جمع الأرقام لحين الحصول على رقم واحد. في المثال السابق كانت البواقي:

$29 : 2 + 9 = 11\ ,\ 1 + 1 = 2$
$57 : 5 + 7 = 12\ ,\ 1 + 2 = 3$
$85 : 8 + 5 = 13\ ,\ 1 + 3 = 4$
$35 : 3 + 5 = 8$
$6 : 6$

وسيكون المجموع $2 + 3 + 4 + 8 + 6 = 23 = 2 + 3 =$ 5 وبالنسبة للعدد $212 = 2 + 1 + 2 = 5$.

يمكن للطلبة استخدام نفس طريقة العمل بالنسبة لعمليات أخرى. فعلى سبيل المثال، للتأكد من عملية ضرب العددين $239 \times 872 = 208,408$ سيجدون بأن البواقي (عند التقسيم

على 9) لكل من هذين العددين :

بالنسبة لـ 239 : 239: 2 + 3 + 9 =14 .1+ 4 = 5

بالنسبة لـ 872 : 872: 8 + 7 + 2 = 17 .1+ 7 = 8

بالنسبة لحاصل الضرب : 5 × 8 = 40 ،4 + 0 = 4

بالنسبة لناتج عملية الضرب 204، 208 :

2+0+8+4+0+8=22; 2+2= 4

حاول أن تؤكد لطلبة الصفوف بأن هذه الطريقة ليست تدقيقا مضمونا Fool-Proof لصحة الحسابات، لكنها تصلح أن تكون مؤشرا على احتمال صحتها. وحاول أن تعرض هذا الموضوع بطريقة تجعلهم يبدون إعجابهم بالخصائص المتعة للعدد9.

إن الخاصية الفريدة – الأخرى التي يمتاز بها العدد 9 وتظهر عند ضربه بأي عدد يتألف من رقمين أو أكثر. تأمل المثال 9×65.437. إن بديلا للخوارزمية التقليدية سيكون كما يأتي:

1- أطرح وحدات رقم المضروب Multiplicand من 10

10 - 7 = [3]

2- أطرح كلا من الأرقام المتبقية من العدد 9 ثم أضف الباقي إلى الرقم التالي من المضروب (على الجهة اليمنى). بالنسبة لأي رقمين فإن المجاميع تنقل رقم العشرات إلى المجموع كما يلي:

9 - 3 = 6 + 7 = 1 [3]

9 - 4 = 5 + 3 + 1 = [9]

9 - 5 = 4 + 4 = [8]

9 - 6 = 3 + 5 = [8]

3- أطرح 1 من الرقم الموجود في أقصى الجهة اليسرى من المضروب :

6 - 1 = [5]

4- والآن أدرج النتائج بترتيب معكوس للحصول على حاصل الضرب الصحيح!.

[588, 933]

رغم أن هذه الطريقة تمتاز بكونها ثقيلة ومزعجة لحد ما، بيد أنها تصلح لأن تكون أساسا عمليا لجملة من التحريات المتعة في ميدان نظرية العدد. ولكي تزيد من اهتمام طلبتك بالخصائص الآسرة للعدد 9، أدعهم إلى محاولة ضرب العدد 12.345.679 بمضاعفات العدد 9 التسعة الأولى، وتدوين النتائج:

12345679 x 9 = 111 , 111, 111
12345679 x 18 = 222 , 222, 222
12345679 x 27 = 333 , 333 , 333
12345679 x 36 = 444 , 444, 444
12345679 x 45 = 555 , 555, 555
12345679 x 54 = 666 , 666 , 666
12345679 x 63 = 777 , 777, 777
12345679 x 74 = 888 , 888, 888
12345679 x 91 = 999 , 999, 999

دع الطلبة يدركون بأن في تعاقب الأعداد الطبيعية (التي يتألف منها العدد المضروب أعلاه) قد أقصي العدد 8. بعبارة أخرى، العدد الذي يقل عن الأساس 10 بـ 2 كان مفقودا. أدع الطلبة إلى التفكير بتوسيع هذا الأسلوب على أسس غير 10.

والآن أطلب منهم عكس ترتيب الأرقام الطبيعية، مع العدد 8، وأضرب كل منها بمضاعفات العدد 9 التسعة الأولى. ستكون النتائج مذهلة:

987654321 x 9 = 8 888 888 889
987654321 x 18 = 17 777 777 778
987654321 x 27 = 26 666 666 667
987654321 x 36 = 35 555 555 556
987654321 x 45 = 44 444 444 445
987654321 x 54 = 53 333 333 334
987654321 x 63 = 62 222 222 223
987654321 x 72 = 71 111 111 112
987654321 x 81 = 80 000 000 001

سوف نعرض الآن خصائص أخرى ممتعة للعدد 9. دع الطلبة يكتشفون هذه الخصائص عن طريق إرشادهم بعناية إلى النتائج المطلوبة. ينبغي تشجيع الطلبة الأذكياء والمتفوقين على استكشاف هذه العلاقات ومعرفة سبب حدوثها.

-1

9 x 9 = 81
99 x 99 = 9801
999 x 999 = 998001
9999 x 9999 = 99980001
99999 x 99999 = 9999800001
999999 x 999999 = 999998000001
9999999 x 9999999 = 99999980000001

-2

999999 x 2 = 1999998
999999 x 3 = 2999997
999999 x 4 = 3999996
999999 x 5 = 4999995
999999 x 6 = 5999994
999999 x 7 = 6999993
999999 x 8 = 7999992
999999 x 9 = 8999991

3-

$$\begin{aligned} 1 \times 9 + 2 &= 11 \\ 12 \times 9 + 3 &= 111 \\ 123 \times 9 + 4 &= 1111 \\ 1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\ 12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\ 123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\ 1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\ 12345678 \times 9 + 9 &= 111111111 \end{aligned}$$

4-

$$\begin{aligned} 9 \times 9 + 7 &= 88 \\ 98 \times 9 + 6 &= 888 \\ 987 \times 9 + 5 &= 8888 \\ 9876 \times 9 + 4 &= 88888 \\ 98765 \times 9 + 3 &= 888888 \\ 987654 \times 9 + 2 &= 8888888 \\ 9876543 \times 9 + 1 &= 88888888 \\ 98765432 \times 9 + 0 &= 888888888 \end{aligned}$$

إن إحدى الطرق المتعة لاستنتاج هذا الأنموذج Model تكمن في تقديم تحد لطلبتك وذلك بتكليفهم إيجاد عدد يتألف من ثمانية أرقام بحيث لا يظهر أي رقم من الأرقام أكثر من مرة واحدة، والذي عندما يضرب بالعدد 9، ينتج عنهما عدد بتسعة أرقام لا يظهر بينهما رقم أكثر من مرة واحدة. إن جل محاولات الطلبة ستمنى بالفشل. على سبيل المثال، 76541258 x 9 = 688, 871, 142 والذي يتكرر فيه كل من 8، 1. وندرج أدناه أعداد تتطابق خصائصها مع متطلبات التحدي:

$$\begin{aligned} 81274365 \times 9 &= 731469285 \\ 72645831 \times 9 &= 653812479 \\ 58132764 \times 9 &= 523194876 \\ 76125483 \times 9 &= 685129347 \end{aligned}$$

التقييم اللاحق Postassessment

ادع الطلبة إلى:

1- عرض ثلاثة خصائص غير عادية للعدد 9.

2- اعرض اختصارا لعملية ضرب العددين 547 × 99.

3- وضح الآن دلالة (تدقيق) حسابات الضرب بأسلوب (إبعاد التسعات خارجا).

10 الخصائص الفريدة للعدد Unusual Number Properties

(ملاحظة المؤلف: ينبغي استخدام هذه الوحدة بعيد الوحدة التي عنوانها (إثراء بآلة حاسبة يدوية)).

تهدف هذه الوحدة إلى تقديم مورد جيد عن خصائص العدد المتعة والتي من الأفضل عرضها على آلة حاسبة.

أهداف الأداء Performance Objectives

سيعمل الطلبة على استكشاف المسائل الرياضية بمساعدة آلة حاسبة يدوية ثم يستنتجوا الاستنتاجات المناسبة لكل منها.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالدوال الأساسية الموجودة في الآلة الحاسبة. يمكن أن تقتصر الآلة الحاسبة المطلوبة لهذه الوحدة على العمليات الحسابية الأربعة فقط.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لاشك بأن أفضل الطرق لتحفيز إثارة حقيقية بمادة الرياضيات تكمن في عرض بعض الخصائص الرياضية المختصرة والبسيطة، والظاهرة الرياضية والتمثيلية. وفيما يأتي بضعة أمثلة ستزودك بمادة مسهبة يمكنك استثمارها في تحفيز طلبتك باتجاه جملة من التحريات المستقلة.

مثال 1 Example

عندما يضرب العدد 37 مع المضاعفات التسعة الأولى للعدد 3 فسوف تظهر النتائج المتعة الآتية. دع الطلبة يتلمسون هذا

الأمر باستخدام آلاتهم الحاسبة.

37 x 3 = 111
37 x 6 = 222
37 x 9 = 333
37 x 12 = 444
37 x 15 = 555
37 x 18 = 666
37 x 21 = 777
37 x 24 = 888
37 x 27 = 999

مثال 2 Example

عندما يضرب العدد 142.857 بالأعداد 2،3،4،5،6 فإن جميع حواصل الضرب ستستخدم نفس الأرقام، بنفس الترتيب الموجود في الأعداد الأصلية، ولكن يبتدئ كل منها بموقع آخر:

142, 857 x 2 = 285, 714
142, 857 x 3 = 428, 571
142, 857 x 4 = 571, 428
142, 857 x 5 = 714, 285
142, 857 x 6 = 857, 142

وعندما يضرب العدد 142,857 بالعدد 7، فإن حاصل الضرب هو 999,999. أما عندما يضرب 142.857 بالعدد 8، فإن الناتج سيكون 1.142.856. إذا استبعدت مرتبة الملايين وأضيف إلى وحدات الأرقام (142.856+1) سينتج العدد الأصلي !.

دع الطلبة يتحققون حاصل ضرب 142.857x9. ما هي الأنماط الأخرى التي سنعثر عليها والتي تتضمن حاصل ضرب 142.857 ؟

إن نمطا مماثلا سيظهر مع حواصل ضرب الأعداد: 1,10,9,12,3,4 :76923، كذلك 2,5,7,11,6. أدع الطلبة إلى تفحص مجموع الأرقام لكل حاصل ضرب سيحصلون عليه. وسيكتشف الطلبة نتائج ممتعة بحق!. أطلب منهم اكتشاف علاقات أخرى مشابهة.

مثال 3 Example

يمتاز العدد 1089 بمجموعة من الخصائص الممتعة والفريدة. دع للطلبة فرصة تأمل حاصل ضرب 1089 مع الأرقام الطبيعية التسعة الأولى.

1089 x 1 = 1089
1089 x 2 = 2178
1089 x 3 = 3267
1089 x 4 = 4356
1089 x 5 = 5445
1089 x 6 = 6534
1089 x 7 = 7623
1089 x 8 = 8712
1089 x 9 = 9801

أخبر الطلبة بملاحظة التماثل بين أول عمودين، وآخر عمودين من حاصل الضرب. يحوي كل عمود على أعداد صحيحة متعاقبة. حاول أن تشجع الطلبة بعدم الاقتصار على إنشاء وبيان هذه الحالة الفريدة، ولكن بذل الوسع في البناء عليها واستثمارها. ما هو الشيء الذي جعل من العدد 1089 فريدا إلى هذا الحد؟ ما هي عوامل العدد 1089؟ لماذا يكون 1089 ×9 عكس العدد 9=1086؟ هل يمكن لهذا النظام أن يعمل على أعداد أخرى؟ إن هذه الأسئلة وأخرى غيرها ينبغي أن تبتدئ بتحديد الاتجاه العام للاستقصاءات والتنقيبات الإضافية.

ستكون آلات الطلبة – الحاسبة أداة لا غنى عنها في إنجاز المهام الملقاة على عاتقهم، وستتيح لهم فرصة مناسبة لمشاهدة الأنماط بصورة فورية ومباشرة بدلا من الضياع في الخطوات الجانبية التي تنشأ عن الحسابات المرهقة.

مثال 4 Example

لقد أدرجت أدناه مجموعة من أنماط الأعداد الممتعة التي سيباشرون بالعمل عليها. كن واثقا من تشجيع الطلبة على توسيع الأنماط المنتجة، ومحاولة اكتشاف وسبر مبررات وجودها.

1 x 8 + 1 = 9
12 x 8 + 2 = 98
123 x 8 + 3 = 987
1234 x 8 + 4 = 9876
12345 x 8 + 5 = 98765
123456 x 8 + 6 = 9987654
1234567 x 8 + 7 = 9876543
12345678 x 8 + 8 = 98765432
123456789 x 8 + 9 = 987654321

11 x 11 = 121
111 x 111 = 12,321
1,111 x 1,111 = 1, 234,321
11,111 x 11, 111 = 123, 454, 321
111, 111 x 111, 111 = 12, 345, 654, 321
1,111,111x1,111,111=1,234,567,654,321
11,111,111x11,111,111=123,456,787, 654, 321
111,111,111x111,111,111=12,345,678,987,654, 321

مثال 5 Example

ادع الطلبة إلى حسابات عمليات القسمة المبينة في كل من الكسور الآتية، على أن يدونوا النتائج التي سيحصلون عليها:

$$\frac{1}{7} = .\overline{142857} = \frac{142857}{999999}$$

$$\frac{2}{7}=.\overline{285714}=\frac{285714}{999999}$$
$$\frac{3}{7}=.\overline{428571}=\frac{428571}{999999}$$
$$\frac{4}{7}=.\overline{571428}=\frac{571428}{999999}$$
$$\frac{5}{7}=.\overline{714285}=\frac{714285}{999999}$$
$$\frac{6}{7}=.\overline{857142}=\frac{857142}{999999}$$

سيلاحظ الطلبة وجود ترتيب متشابه في الأجزاء المتكررة يرافق نقاط الشروع المختلفة. حاول أن تبين للطلبة بأن حاصل ضرب $.999999 = .142857 \times 7$ (والذي "يقارب" $1=\frac{1}{7}\times 7$). ذكّر الطلبة بأن هذا الأمر لا يشابه 7×142857.

قد يرغب بعض الطلبة في تفحص حاصل الضرب هذا بصيغة غير عشرية :

$$\begin{aligned}7 \times 142,857 &= 999,999\\ &= 999,000 + 999\\ &= 1000(142+857)+(142+857)\\ &= (142+857)(1000+1)\\ &= 1001(142+857)\\ &= 142,142 + 857,857\end{aligned}$$

إن استبصارا أفضل بالتنقيب الذي استهدف هذه الكسور سوف يبزغ بعد أن يستكمل الطلبة حساب خارج قسمة ما يأتي:

$$\frac{1}{13}=.\overline{076923}=\frac{076923}{999999}$$
$$\frac{2}{13}=.\overline{230769}=\frac{230769}{999999}$$
$$\frac{4}{13}=.\overline{307692}=\frac{307692}{999999}$$
$$\frac{9}{13}=.\overline{692307}=\frac{692307}{999999}$$
$$\frac{10}{13}=.\overline{769230}=\frac{769230}{999999}$$
$$\frac{12}{13}=.\overline{923076}=\frac{923076}{999999}$$

بعد إشباع الموضوع بالنقاشات، سيرغب الطلبة في اعتبار الكسور الحقيقية المتبقية مع المقام 13، وسيكتشفون أنماطاً وعلاقات مشابهة.

إن التأثير الإيجابي للأمثلة السابقة سوف يفتقد قيمته إذا لم يتم إرشاد الطلبة فورا إلى تعميق، وتوسيع الاكتشافات التي توصلوا إليها آنفا. وبينما تسهم الآلات الحاسبة – اليدوية كأداة ناجعة للإرشاد وسير العلاقات الجديدة، فإن الحدوس المنطقية للطلبة سوف تنتج عن التنقيبات الرياضية العميقة في خصائص الأعداد.

التقييم اللاحق Postassessment

ليعمل الطلبة على إكمال التمارين الآتية:

1- أضرب واجمع كل أزواج الأعداد الآتية :

9, 9
24, 3
47, 2
497, 2

كيف تقارن مجاميع هذه الأزواج مع حاصل ضربها؟ (معكوساتها).

2- أنجز العمليات المبينة وبرّر الأنماط الناتجة عنها، ثم اعمد إلى توسيع النمط لتحديد مدى صلاحيتها.

$$12321=\frac{333\times 333}{1+2+1+2+1}=\frac{110889}{9}=12321$$

$$1234321=\frac{4444\times 4444}{1+2+3+4+3+2+1}=\frac{19749136}{16}=1234321$$

11 إثراء بواسطة آلة حاسبة يدوية
Enrichment with a hand-held Calculator

ينبغي أن تجهز البداية المناسبة لنشاط المجموعة الصغيرة والتي تناسب جميع المستويات، بحيث يحس الطلبة بالراحة عند التعامل مع: زملائهم، ومع المعلم، ومع المجموعة الجديدة، أو مع جميع طلبة الصف عند إجراء استعراض سريع لذاكرة الآلة الحاسبة Calculator's Memory، ومفاتيح الجذر التربيعي Sequare Root.

يمكن أن يتبع هذا النشاط (بمسابقة) السرعة والدقة والتي تتضمن عمليات حسابية مختلفة.

جهزت معظم الآلات الحاسبة بمفاتيح الذاكرة، والتي تتيح المجال أمام أنشطة تنافسية مختلفة. وتسهم هذه المفاتيح بتوفير طريقة فعالة لخزن النتائج الوسيطة، كما تمتلك القدرة على الاحتفاظ بالعدد الذي تظهر الحاجة إلى استخدامه باستمرار أثناء ممارسة حل التمرين.

إن المفتاح [M+] يقوم بإضافة العدد المعروض إلى محتويات الذاكرة مع خزن حاصل الجمع في الذاكرة. كما أن الرقم المعروض لا يتغير.

ويقوم المفتاح [M−] بطرح العدد المعروض من محتويات الذاكرة مع خزن الفرق في الذاكرة. كما أن الرقم المعروض لا يتغير.

يستدعي المفتاح [MR] محتويات الذاكرة، والتي تحل محل محتويات لوحة العرض.

مثال EXAMPLE: جد قيمة

$$5 \times 12 + 3 \times 16$$

الحل SOLUTION: اضغط

5 x 12 = [M+] 13 x 16 = + [MR] =

ستقرأ لوحة العرض 268.

إن الاستخدام الأكثر فعالية، وبمديات واسعة للآلة الحاسبة يكمن في استخدامها كوسيلة مسهلة لحل المسائل.

بصورة عامة يعاني الطلبة الذين سيجدون صعوبة كبيرة في حل المسائل من معضلة مزدوجة. فهم من جهة غير قادرين على تفسير المسألة المطروحة وتحويلها إلى نسق قابل للحل، كما أنهم لا يحسنون إجراء الحسابات المطلوبة للحصول على الإجابة النهائية من جهة أخرى. بصورة اعتيادية، لا يستطيع هؤلاء الطلبة التركيز على موضوع حل المسألة ما لم يحسنون إجراء الحسابات المطلوبة. ولكن باستخدام الآلة الحاسبة، يستطيعون تجنب، بصورة مؤقتة، مأزق الحسابات وبالتالي التركيز على مفتاح الحل الناجح للمسائل، ألا وهو التفسير الدقيق لمفردات المسألة. وعندما يتم تعلم هذا الجانب، يستطيع الطالب أن يركز جزءا كبيرا في جهوده على إتقان آلية الحسابات بوصفها مقوما أساسيا وضروريا في ميدان حل المسائل.

أهداف الأداء Performance Objectives

سيقوم الطلبة بالعمل على مسائل رياضية بمساعدة آلة حاسبة يدوية ثم يتوصلوا إلى استنتاجات مناسبة.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالدوال الرئيسة للآلة الحاسبة. ينبغي أن تحتوي الآلة المطلوبة لهذه الوحدة على العمليات الأساسية، زائدا مفاتيح الذاكرة والجذر التربيعي.

لاستيعاب كل من محوري الممارسة التطبيقية، والتسلية دع الطلبة يطبقون ما يلي في آلاتهم الحاسبة – اليدوية.

1– أحسب:

2[60 - 243.+ (12) (2400)] لتجد مقدار ما ينبغي على المرء أن يسدده، حاول أن تقرأ إجابتك من أسفل إلى أعلى.

2– احسب:

4590.5864+(568.3)(.007)– 1379.26 ثم أقلب آلتك الحاسبة من أعلى إلى أسفل، وبعد قراءة الجواب، أنظر داخل حذاءك!.

إن هذين التمرينين سوف يوفران لطلبتك إحساسا مريحا حول العمل بالآلات الحاسبة. والآن اعمد إلى تحدي طلبتك باستخدام مفاتيح الذاكرة عند إيجاد الأخطاء في تمارين تشابه ما يأتي:

3- $15 \times 13 + 18 \times 32$

4- $15- \times 13 + 266 - 81$

5- $(-23) + (253/11)$.

6- $(37 + -81) \times (355 - 281)$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بحدث غريب يتسم بالبساطة. دع الطلبة يتأملون تقويم شهر مايو لعام 1977 وأطلب منهم عمل مربع حول أي تسعة أيام يشاؤون اختيارها، إن أحد الطرق المستخدمة لذلك تظهر في الشكل الآتي:

مايو 1977						
S	M	T	W	T	F	S
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

بعدها، ينبغي أن يضيف الطلبة 8 إلى العدد الأصغر في المربع ثم يضرب بالعدد 9. في المثال أعلاه، لدينا 171=9x(8+11). بعد ذلك يمكن للطلبة استخدام آلاتهم الحاسبة لضرب مجموع الأعداد في الصف الأوسط (أو العمود) بالعدد 3 وسيحصلون على نفس النتيجة 171. دع طلبتك يحاولون هذا الأمر ثانية مع خيارات أخرى لتسعة أعداد. ينبغي عليك أن تجعل الطلبة يدركون بأن حاصل جمع الصف أو العمود الأوسط مضروبا بالعدد 3 يساوي مجموع الأعداد التسعة داخل المربع. يستطيع الطلبة التأكد من صحة هذا الأمر، بسهولة، عن طريق استخدام آلاتهم الحاسبة.

من هذه النقطة، ستكون لديك فرصة ممتازة لبحث خصائص المتوسط الحسابي Arithmetic Mean، حيث ستسهم هذه الدراسة بإلقاء مزيد من الضوء على هذا الموضوع الجذاب (خدعة التقويم Calendar Trick).

ينبغي على الطلبة أن يدركوا بأن العدد المتوسط في المربع الذي يضم الأعداد التسعة هو بالحقيقة المتوسط الحسابي للأعداد التي تم اختيارها. إن استخدام الآلة الحاسبة سوف يخلصهم من حسابات ثقيلة ومرهقة، ويتيح لهم فرصة تركيز جل انتباههم على المفاهيم الرياضية التي تم اكتشافها.

بالنسبة للبحث في العدد التالي، ادع طلبتك إلى اختيار أي عدد يتألف من ثلاثة أرقام، لنقل 538. ثم اطلب منهم إدخاله مرتين في آلاتهم الحاسبة دون الضغط على أي مفتاح من مفاتيح العمليات. ستظهر لوحات العرض لديهم العدد 538538. الآن دعهم يقسمون على العدد 7، ثم على العدد 11، وأخيرا على العدد 13.

ومما سيثير دهشتهم واستغرابهم هو ظهور الرقم الأصلي أمامهم، الأمر الذي سيؤدي إلى زيادة الفضول وحب الاستطلاع لديهم. أطرح عليهم سؤالا حول ماهية العملية المنفردة التي يمكن استخدامها لاستبدال عمليات القسمة الثلاث. ينبغي عليهم إدراك بأن القسمة المنفردة على 1001=13×11×7 قد تم إنجازها بالفعل. ونظرا لكون 538 × 1001= 538538، فإن اللغز تم حله بالضرورة، وفي هذا الوقت سيرغب الطلبة بتجربة هذا النظام على آلاتهم الحاسبة باستخدام أرقام أخرى. إن هذا الأمر سيؤدي إلى تعزيز وتعميق معرفتهم بالأرقام، وخصوصا العدد 1001، وهو رقم يمتلك أهمية خاصة.

ينبغي أن يحفز الطلبة الآن على تجربة عمليات الضرب الآتية بحيث يستطيعون البدء بإدراك (التنبؤ) بأنماط العدد إدراكا كافيا وتمييزها:

أ-
$$3 \times 11 = 33$$
$$3 \times 111 = 333$$
$$3 \times 1111 = 3333$$
$$3 \times 11111 = 33333$$

ب-
$$4 \times 101 = 404$$
$$4 \times 10101 = 40404$$
$$4 \times 1010101 = 4040404$$
$$4 \times 1010101010 = 404040404$$

ج-
$$5 \times 1001 = 5005$$
$$5 \times 110011 = 550055$$
$$5 \times 11100111 = 55500555$$

د-
$$65 \times 101 = 6565$$
$$65 \times 10101 = 656565$$
$$65 \times 1010101 = 65656565$$

هـ-
$$65 \times 1001 = 65065$$
$$65 \times 10001 = 650065$$
$$65 \times 1000001 = 6500065$$
$$65 \times 1001001 = 65065065$$

و- $77 = 11 \times 7$

$7777 = 101 \times 11 \times 7$

$777777 = 10101 \times 11 \times 7$

$777777 = 1001 \times 111 \times 7$

والآن دع الطلبة يكتشفون طرقا أخرى لتوليد أعداد بواسطة الضرب مثل: 777777، 7777777، 77777777. عند هذه النقطة سينشأ لدى الطلبة اهتمام كاف بتوليد أنماط عددية أخرى من حاصل ضربها.

سيكون معظم طلبتك، في هذا الوقت، على استعداد كاف لتأمل مسائل أكثر تعقيدا.

يعرف المشقلب بأنه عبارة عن كلمة أو عبارة يمكن قراءتها بالاتجاهين الأمامي أو الخلفي. على سبيل المثال (Madam)، أو (I'm Adam). أما في الرياضيات فإن العدد المشقلب فيمكن قراءته بأي اتجاه دون تغيير في قيمته.

على سبيل المثال، دع طلبتك يختارون أي عدد يتألف من رقمين ثم يضاف إليه العدد الذي تكون أرقامه بترتيب معاكس للعدد الأول. والآن ليأخذوا المجموع ويضيفوا إليه العدد الذي تكون أرقامه بترتيب معاكس للمجموع. سوف يستمر الطلبة بهذه العملية لحين الحصول على عدد مشقلب. على سبيل المثال:

$132 = 75 + 57$

$363 = 132 + 231$ عدد مشقلب

$176 = 79 + 97$

$847 = 176 + 671$

$1595 = 847 + 748$

$7546 = 1595 + 5951$

$14003 = 7546 + 6457$

$44044 = 14003 + 30041$ عدد مشقلب

مهما كانت قيمة العدد – ذي الرقمين – الذي تم اختياره فإننا سنحصل على عدد مشقلب بعد اتباع الطريقة المشار إليها سابقا. وباستخدام الآلة الحاسبة سيشاهد الطالب عن كثب ظهور مجموعة من الأنماط والتي ستؤدي بهم إلى اكتشاف أسباب ومبررات هذه الظاهرة الرياضية.

حاول أن تشجع طلبتك على الاعتناء بإصدار حدس أو تخمين حول العلاقات الأخرى الممكنة للأعداد ثم محاولة التأكد من صحة ذلك باستخدام الآلات الحاسبة التي بين أيديهم.

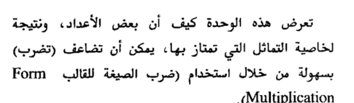
التقييم اللاحق Postassessment

أخبر الطلبة بضرورة البدء في استخدام آلاتهم الحاسبة للتأكد من صحة الظاهرة الآتية ولستة أعداد مختلفة. ثم بعد ذلك ينبغي عليهم محاولة البرهنة عليها:

1- اختر أي عدد بثلاثة أرقام بحيث لا يساوي رقم مرتبة الآحاد مرتبة المئات. ثم اكتب العدد الذي تكون أرقامه بترتيب معاكس للعدد المختار، والآن أطرح العدد الأصغر من العدد الأكبر خذ الفرق، أعكس أرقامه، وأضف العدد "الجديد إلى الفرق الأصلي، ما هو العدد الذي تحصل عليه في النهاية؟ ولماذا ؟

2- أحسب $\frac{17.6\times 23.4}{8\times 50}$ مقربا إلى أقرب مرتبة عشرية أو عدد زوجي.

3- أحسب $\frac{2}{2-1}$ مقربا إلى أقرب مرتبة مئات.



12 الضرب المتماثل Symmetric Multiplication

تعرض هذه الوحدة كيف أن بعض الأعداد، ونتيجة لخاصية التماثل التي تمتاز بها، يمكن أن تضاعف (تضرب) بسهولة من خلال استخدام (ضرب الصيغة للقالب Form Multiplication).

هدف الأداء Performance Objectives

بإعطاء مثال عن ضرب الصيغة (القالب)، سيتمكن الطلبة من إنجاز عملية الضرب باستخدام التقانة التي ستوضح خلال هذه الوحدة.

التقييم السابق Pre Assessment

دع الطلبة يعملون على ضرب كل مما يأتي باستخدام الأسلوب التقليدي:

أ- 66666×66666
ب- 2222×2222
ج- 777×333

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد انتهاء الطلبة من الحسابات السابقة، سوف يرحبون بأسلوب جديد لمعالجة هذه المسائل. دعهم يتأملون أسلوب "صيغة المعين" الآتي :

```
      66666
    × 66666
         36
       3636
     363636
   36363636
 3636363636
   36363636
     363636
       3636
         36
44443555556
```

قد يتساءل الطلبة عن إمكانية سريان هذا النظام على أرقام أخرى من هذا النوع. دعهم يباشروا تربيع العدد 88888 أولا بالطريقة التقليدية، ثم باستخدام أسلوب مضاعفة قالب المعين.

ولتنفيذ التالي ينبغي أن يعمد الطلبة إلى استبدال 36 في المثال السابق بـ 64. بعد فترة قصيرة سوف يتساءل الطلبة عن كيفية توسيع دائرة تطبيق هذه التقانة إلى تربيع عدد برقم مكرر حيث يكون مربع الرقم عبارة عن عدد برقم واحد فقط.

عند تربيع عدد مثل 2222، ينبغي أن يكتب الطلبة كل حاصل جمع - جزئي مثل 04.

```
      2222
    × 2222
        04
      0404
    040404
0404040404
    040404
      0404
        04
   4937284
```

في هذه المرحلة الحاسمة سيقتنع الطلبة بأن هذه الآلية تصلح لجميع الأعداد من هذا النوع. والآن دعهم يتأملون بدقة تربيع عدد يتألف من n من الأرقام uuu...uuu، حيث $u^2=10s+t$ (أو تكتب حسب الأساس 10 مثل st). إن عملية المضاعفة هذه سوف تحتاج إلى صيغة معين من الدرجة النونية n^{th} Order (يعني، معين يزداد فيه عدد st بمقدار واحد في كل من الصفوف النونية الأولى، ثم يتناقص بمقدار st واحد في كل من الصفوف n-1 المتبقية). إن الحالة، حيث n=5 قد عرضت فيما يأتي:

```
     uuuuu
   × uuuuu
        st
      stst
    ststst
  stststst
ststststst
  stststst
    ststst
      stst
        st
```

سيرغب الطلبة بملاحظة أن تقنية المضاعفة هذه يمكن أن توسع دائرة استخدامها في إيجاد حاصل ضرب عددين مختلفين يتألفان من أرقام متكررة. أي، إذا كنا نرغب بالحصول على حاصل ضرب العددين uuu....u، vvvv....v، يمكن أعداد قالب معيني من st، حيث uv=10s+t.

على سبيل المثال فإن حاصل ضرب العددين 8888 × 3333 = 29623704 أو

```
    8888
 ×  3333
      24
     2424
    242424
   24242424
    242424
     2424
      24
 29623704
```

عندما سيتقن الطلبة استخدام القالب المعيني في ضرب الأعداد التي تتألف من أرقام متكررة، قد ترغب في أن تريهم قالبا آخر لضرب الأعداد متكررة الأرقام. يظهر أدناه القالب المثلثي Triangular form المستخدم في عملية الضرب. انتبه إلى ضرورة قيام الطلبة بضرب حاصل جمع المصفوفة المثلثية بالعدد 6.

```
    66666
  × 66666
        6
      666
    66666
  6666666
666666666
740725926
      × 6
4444355556
```

بصورة عامة، لتربيع عدد بأرقام ذات تكرار نوني n digit repeated، اجمع أعمدة المصفوفة المثلثية ذات الأرقام المكررة (حيث تحوي على n من الصفوف التي تبدأ برقم واحد ثم تبدأ بالزيادة بمقدار رقمين في الصف الذي يلي سابقه)، ثم اضرب هذا المجموع بالرقم المكرر.

يمكن أن توسع دائرة استخدام هذا النوع من تقانة الضرب ليشمل إيجاد حاصل ضرب عددين يتألفان من أرقام متكررة. دع الطلبة يصيغون قاعدتهم الخاصة بعملية الضرب بعد اعتبار المثال الآتي:

```
    8888
  × 3333
       8
     888
   88888
 8888888
 9874568
     × 3
29623704
```

```
    3333
  × 8888
       3
     333
   33333
 3333333
 3702963
     × 8
29623704
```

لاحظ بأن عدد الخطوط في القالب المثلثي يساوي عدد الأرقام في كل عدد تم ضربه. أما بقية القاعدة فيمكن أن نحصل عليها بسهولة من الطلبة. إن التعديل الآخر، الوحيد، في عملية ضرب أعداد تتألف من أعداد متكررة سيظهر عندما لا يكون عدد الأرقام متساوياً في كلا العددين. افترض أن عددا يتألف من n من الأرقام قد ضرب بعدد آخر يتألف من m من الأرقام. قم بتنظيم القالب المثلثي كما لو أن العددين يمتلكان n من الأرقام (كما تم إنجازه سابقا). ثم ارسم مستقيما قطريا إلى يمين الصف الميمي m^{th} row ثم بادر بإلغاء جميع الأرقام التي تقع أسفل القطر.

إن مجموع ما تبقى من أرقام يساوي حاصل الضرب المطلوب. إن المثال الآتي يوضح طريقة العمل هذه.

```
      44444
    ×   666
         24
        2424
       242424
      24242424
     2424242424
      24242424
        2424
         24
   29599704
```

والآن ادع الطلبة إلى ضرب العددين 66666 × 444. ينبغي أن يحصلوا على نفس مصفوفة الأعداد التي يجب جمعها بالأسلوب السابق. وهذا يدل على أن 444 × 66666 = 666 × 44444. بعد إجراء عملية التحليل العاملي، ينبغي أن لا يجد الطلبة أي مشكلة في تبرير هذه المساواة. وينبغي أن يشجع الطلبة على التوضيح بعبارة رياضية عن سبب سريان قوالب الضرب المختلفة وصلاحيتها في الحالات المتعددة السابقة.

التقييم اللاحق Postassessment

اعمد إلى تكليف الطلبة باحتساب كل مما يأتي باستخدام قالب الضرب المعيني:

أ- 22222 × 77777

ب- 9999 × 9999

ج- 444 × 333

وعاود تكليف الطلبة باحتساب كل مما يأتي باستخدام الضرب المثلثي:

أ- 555555 × 555555.

ب- 7777 × 4444

13 التغييرات على موضوع الضرب
Variation on a Theme Multiplication

ستعرض هذه الوحدة طرائق غير تقليدية لاحتساب حاصل ضرب عددين صحيحين.

هدف الأداء Performance Objectives

سيعطى عددين صحيحين مع طريقة لضربهما، وسيباشر الطلبة باحتساب حاصل ضربهما.

التقييم السابق Preassessment

دع الطلبة يحتسبون حاصل ضرب 43 و 92 باعتماد أكثر من طريقة واحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ستسهم المسألة الآتية في توفير مناخ تنافسي في هذه الوحدة. ومن المؤكد بأن معظم الطلبة سينجحون في ضرب هذين العددين باستخدام الطريقة التقليدية لعملية الضرب، وكما مبين أدناه :

$$\begin{array}{r} 92 \\ \times\ \underline{43} \\ 276 \\ \underline{368\ } \\ 3956 \end{array}$$

قبل مناقشة استخدام طرق أخرى في عملية الضرب، ينبغي أن يعرض المعلم بوضوح سبب صلاحية خوارزمية الطريقة التقليدية. حيث يمكن ملاحظة ما يأتي بوضوح:

$$\begin{aligned} 43 \times 92 &= (40 + 3) \times 92 \\ &= 40 \times 92 + 3 \times 92 \\ &= 3680 + 276 \\ &= 3956 \end{aligned}$$

الأمر الذي يتطابق تماما مع ما تم تنفيذه قبل قليل، برغم أن الآلية ميكانيكية.

طريقة المضاعفة The Doubling Method

لضرب العدد 43 بالعدد 92 أنشئ أعمدة الأرقام الآتية، مبتدئا بـ 1 و 92، ثم ابدأ بمضاعفة كل منهما.

•	1	92
•	2	184
	4	368
•	8	736
	16	1472
•	32	2944

لقد توقفنا عند العدد 32 لأن ضعف هذا العدد هو 64 والذي يزيد على العدد 43. وبدأنا بالعدد الأخير في العمود الأول وقمنا بإضافة الأعداد المناسبة بحيث يكون المجموع 43. من ثم، سنختار (32، 8، 2، 1). والآن سنضيف الأعداد المقابلة في العمود التالي.

$$\begin{array}{r} 92 \\ 184 \\ 736 \\ 2944 \\ \hline 3956 \end{array}$$

وعليه فإن حاصل ضرب 92 × 43 = 3956. إن سبب عمل هذه الطريقة قد تم توضيحه فيما يأتي:

$43 \times 92 = (32 + 8 + 2 + 1) \times 92$
$= (32\times92)+(8\times92)+(2\times92)+(1\times92)$
$= 2944 + 736 + 184 + 92$
$= 3956$

الطريقة القروية–الروسية

Russian, Peasant Method

افترض، ثانية، بأننا نرغب في ضرب العددين 43 و 92. قم بأعداد أعمدة الأرقام الآتية، مبتدئين بالعددين 43 و 92. في الصفوف المتعاقبة، قم بتنصيف المدخلات في العمود الأول، مستبعدا المتبقي من 1 عندما يظهر نتيجة الحسابات. في العمود الثاني. قم بمضاعفة كل مدخل متعاقب. ستستمر هذه العملية لحين ظهور العدد 1 في العمود الأول.

* 43	92
* 21	184
10	368
* 5	736
2	1472
* 1	2944

اختر الأعداد الموجودة في العمود الثاني والتي تقابل (الأعداد الفردية) بالعمود الثاني (الأعداد التي تم تأشيرها بنجمة). أضف هذه الأعداد المقابلة للعمود الثاني، وستكون النتيجة هي حاصل ضرب 43 × 92. أي أن، 3956 = 2944 + 736 + 184 + 92. إن البرهان الذي يؤكد صحة الطريقة القروية – الروسية على الدوام، هو كما يأتي:

افترض a زوجية: $a^{*}b = c$ حيث c هي النتيجة المطلوبة.

افترض $\frac{1}{2}$a فردية:

$$\frac{1}{2}\ a - 2b = c$$

إن الخطوة التالية في الطريقة هي:

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)-\frac{1}{2}\right]\bullet 4b = y$$

بعدها نستخدم الخاصية التوزيعية Distributive property:

$$\left[\frac{1}{4}a\bullet 4b\right]-\left[\frac{1}{2}\bullet 4b\right]=y$$

وبما أن $\frac{1}{4}a\bullet 4b=c$، إذن c-2b = y

وعليه فإن حاصل الضرب الجديد، y، سيكون أقل من الجواب الصحيح c بمقدار 2b (وهي عبارة عن العدد الأول المطلوب إضافته نظرا لاقترانه بعدد فردي، $\frac{1}{2}a$).

وعندما ستستمر العملية، فإن (حاصل الضرب الجديد) سيبقى كما هو إذا كانت ka (عبارة عن مدخل في العمود الأول) زوجية. وإذا كانت ka فردية، وكان ka.mb=w، فإن حاصل الضرب التالي سوف ينقص بمقدار mb (العدد الذي يتطابق مع العدد الفردي). على سبيل المثال،

$$(\frac{1}{2}ka-\frac{1}{2})\bullet 2mb=(\frac{1}{2}ka\bullet 2mb)-(\frac{1}{2}\bullet 2mb)=w-mb$$

في النهاية، عندما يظهر 1 في العمود الأول.

$1\bullet pb = Z$, $pb = Z$.   Z= C-

جميع المقتطعات (الأعداد التي تشير إلى تلك التي تتطابق مع ka الفردية).

c (النتيجة المطلوبة) = z + جمع المقتطعات.

إن الاعتبار الإضافي للطريقة القروية – الروسية في عملية الضرب يبدو واضحا للعيان من العرض الآتي:

$*43\bullet92 = (21\bullet2+1)(92) = 21\bullet184+92 = 3956$
$*21\bullet184 = (10\bullet2+1)(184) = 10\bullet368+184 = 3864$
$10\bullet368 = (5\bullet2+0)(368) = 5\bullet736+0 = 3680$
$*5\bullet736 = (2\bullet2+1)(736) = 2\bullet1472+736 = 3680$
$2\bullet1472 = (1\bullet2+0)(1472) = 1\bullet2944+0 = 2944$
$*1\bullet2944 = (0\bullet2+1)(2944) = 0+\underline{2944} = 2944$
3956

لاحظ بأن جمع الأعداد في العمود التالي والتي تقابلها مدخلات فردية في العمود الأول، يمكن تفسيرها بواسطة العرض السابق.

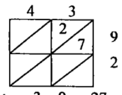
قد يرغب المعلم في إلقاء مزيد من الضوء على هذا الفضول الرياضي عن طريق عرض الطبيعة الثنائية لعملية الضرب هذه.

$(43)(92)$
$= (1\bullet2^5+0\bullet2^4+1\bullet2^3+0\bullet2^2+1\bullet2+1\bullet2^0)(92)$
$= 2^0\bullet92+2^1\bullet92+2^3\bullet92+2^5\bullet92$
$= 92+184+736+2944$
$= 3956$

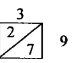
ينبغي أن تشجع التحريات الرياضية الأخرى التي يحاول الطلبة العمل عليها.

الضرب الشبكي Lattice Multiplication

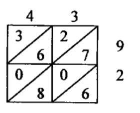
تأمل ثانية عملية ضرب العددين 43•92. لتنفيذ هذه الطريقة ستكون بحاجة إلى إنشاء مصفوفة 2×2 مع رسم الأقطار كما يظهر أدناه.



في البداية، اضرب 27 = 9• 3، يوضع العدد 2 فوق العدد 7 كما يظهر في الشكل الآتي:

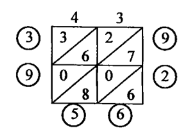


ستشمل الخطوة التالية ضرب 36 = 9• 4. وللمرة الثانية سيوضع العدد 3 فوق العدد 6 في الصندوق المناسب.



تستمر هذه العملية، وتعبأ بقية الصندوق. لاحظ أن 3• 2=6 تسجل على أنها 0/6.

والآن فإن هناك مدخلاً في كل الخلايا. أضف الأعداد في الاتجاهات القطرية الموضحة، مبتدئاً من اليمين الأسفل. وتوضع دارة حول المجموع.



لاحظ أن الجمع الثاني 15 =8+0+7، سجلت الخمسة وحُمل الواحد إلى الجمع القطري اللاحق. إن الجواب الصحيح (حاصل ضرب 92 • 43) يقرأ فقط من الأعداد المحاطة بالدوائر، أي أن الجواب هو 3.956 .

نظام تراكتنبرج Trachenberg System

نظام تراكتنبرج عبارة عن طريقة سريعة لإجراء الضرب والقسمة والجمع والطرح وإيجاد الجذر التربيعي. وهناك العديد من القواعد لهذه العمليات. وسنركز هنا فقط على ضرب عددين من مرتبتين.

مرة أخرى، نفرض أن المطلوب هو حاصل ضرب 43 و 92

الخطوة 1: اضرب وحدتي الآحاد

$$[3 \cdot 2 = 6] \qquad \begin{array}{r} 43 \\ \times\ \underline{92} \\ 6 \end{array}$$

الخطوة 2: اضرب تقاطعياً واجمع ذهنياً

$$[(9\cdot 3) + (2\cdot 4) = 27 + 8 = 35]$$

ضع العدد 5 وفق الطريقة المبينة ثم احمل العدد 3 (كمضاف إلى الخطوة التالية).

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ \underline{92} \\ 56 \end{array}$$

الخطوة 3: اضرب رقمي المرتبة العشرية، ثم أضف أي عدد محمول من الخطوة السابقة.

$$[9\cdot 4 = 36 \rightarrow 36 + 3 = 39]$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ \text{x}\ \underline{92} \\ 3956 \end{array}$$

إن التبرير الجبري لهذه الطريقة قد أدرج أدناه:

تأمل العددين اللذين يتألفان من رقمين ab وmn (مكتوبة بصيغة مكانية حرفية).

$$(10a+b) \cdot (10m+n)$$
$$= 10a \cdot 10m + 10a \cdot n + 10b \cdot m + bn$$
$$= \underbrace{100am}_{\text{خطوة 3}} + \underbrace{10an + 10bm}_{\text{خطوة 2}} + \underbrace{bn}_{\text{خطوة 1}}$$

طريقة أخرى Another Method

إن مضاعفة العشرة (مربعة) هي طريقة سهلة للحساب الذهني. وتتضمن طريقة الحساب هذه توظيف هذه الفكرة. دع الطلبة يتأملون حاصل ضرب M.N ثم ليختاروا X بحيث $X=10p$ و$M<X<N$ مع $X-M=a$ و$N-X=b$. بعدها:

$$M.N = (X-a)(X+b) = X^2 - aX + bX - ab$$

تأمل عملية ضرب العددين 92• 43.

دع $X = 60$، إذن:

$$43\cdot 92 = (60-17)(60+32)$$
$$= 3600 + (-17\cdot 60 + 60\cdot 32) + (-17\cdot 32)$$

$= 3600 + (-1020 + 1920) + (-544)$
$= 3600 + 900 - 544$
$= 3956$

إذا كان العددان بنفس المسافة من حاصل ضرب 10، ستكون الطريقة أكثر سرعة. لأن الحد الوسطي سوف يلغى من الحسابات!.

افترض بأن الطلبة يرغبون في ضرب العددين $57 \bullet 63$:

$57 \bullet 63=(60-3)(60+3)=60^2-3^2=3600-9=3591$

إن جزءا من مهارة العمل على طرائق مختلفة في الضرب تتضمن اختيار الطريقة الأكثر كفاءة وسهولة للمسألة المحددة. ينبغي التأكيد على هذا الأمر مع طلبة الصف.

طرائق أخرى Other Methods

بعد إطلاع الطلبة على طرائق متعددة لعمليات الضرب، ينبغي على المعلم الاقتراح بقيام الطلبة في إجراء بحوث واستكشاف لطرق أخرى لعمليات الضرب ويمكن عرض حصيلة هذه الأنشطة أمام طلبة الصف.

التقييم اللاحق Postassessment

1- اضرب العدد 52 بالعدد 67 باستخدام أربعة طرق تختارها.

14 علم الحساب في مصر القديمة Ancient Egyptian Arithmetic

تمتاز دراسة نظام الأعداد وحسابها بأهمية بالغة بالنسبة للطلبة في عدد كبير من المستويات. إن الطالب في المستوى الثانوي يستطيع أن ينقب في آليات النظام من خلال مقارنة معقدة بين ذلك النظام القديم ونظامنا الحالي، وربما يتوسع في بحثه بعيدا فيخرج عن الموضوع من هذه النقطة، مثل البحث عن أسس جديدة وفي النظم العددية القائمة. وستسهم هذه الدراسة، بالنسبة لطالب آخر. كمورد لتقوية وتعميق المبادئ الحسابية (الضرب، والقسمة) لكل من الأعداد الصحيحة والكسور، نظرا لأن الطلبة ترغب في التأكد من صلاحية عمل النظام ميدانيا.

إن هذه الوحدة تهدف إلى إطلاع الطلبة على الرموز العددية – المصرية القديمة والنظام السائد لديهم في عمليات الضرب والقسمة.

أهداف الأداء Performance Objective

1. إعطاء مسألة ضرب، سيعمل الطلبة على إيجاد الإجابة عليها باستخدام طريقة مصرية.
2. إعطاء مسألة قسمة، سيعمل الطلبة على إيجاد الإجابة عليها باستخدام طريقة مصرية.
3. بإعطاء كسر غير واحدي، سيقوم الطلبة بالحصول تحليل وحدته الكسرية Unit Fraction.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بجمع وضرب الكسور، إضافة إلى الخصائص التوزيعية للأعداد الحقيقية. وقد تكون معرفة الأسس مفيدة أيضا.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

يمكن أن نجد في الهيروغليفيا المصرية مثالا على نظام المجاميع البسيط. وقد أرسي هذا النظام العددي على العدد 10، وكانت الرموز التي يستخدمها المصريون القدماء عندما يعرضون أعدادهم على: الحجارة، والبردي، والخشب، والفخار هي:

1 مقابل |
10 مقابل ∩
10^2 مقابل
10^3 مقابل
10^4 مقابل

عليه فإن العدد 521، 13 سوف يكتب

(دع الطلبة ينتبهون إلى أن المصريين كانوا يكتبون الأرقام من اليمين إلى اليسار). وقد تجنب المصريون عمليات الضرب والقسمة التي تتسم بالصعوبة أو التعقيد عن طريق اعتماد طريقة أكثر سهولة (رغم استنفاذها لكثير من الوقت). ولكي يقوموا بضرب العدد 14 بالعدد 27، سيكون لزاما عليهم تطبيق ما يأتي:

1	27
*2	54
*4	108
*8	216
16	432

للتقدم من سطر إلى آخر، كل ما ينبغي على المصريين فعله هو مضاعفة العدد فحسب. بعدها، يعمدون إلى التقاط الأعداد الموجودة في العمود الأيسر التي تضاف لغاية 14 (الأعداد التي توجد عليها علامة *). وعن طريق إضافة الأعداد المقابلة في العمود الأيمن توصل المصريون إلى الإجابة: 54+108+216=378. إن هذا الأمر هو تطبيق للخاصية التوزيعية لعملية الضرب على عملية الجمع، لأن ما فعله المصريون يكافئ ما يأتي:

27(14)=27(2+4+8)=54+108+216=378.

إن التبرير الإضافي للطريقة يكمن في حقيقة أن كل عدد يمكن أن يوصف كمجموع لأسس العدد 2. حاول أن تبحث هذه العملية مع طلبتك إلى الحد الذي تراه مناسبا.

مارس المصريون عملية القسمة بطريقة مشابهة. لقد نظروا إلى المسألة 6 ÷ 114 بوصفها 6 مضروبة في أي عدد بحيث يكون حاصل الضرب مساويا للعدد 114.

1	6*
2	12*
4	24
8	48
16	96*

والآن، نظرا إلى أن 96 + 12+ 6 = 114، فقد وجد المصريون بأن (1+2+16)6=114 أو 114 = 19×6. الجواب هو 19.

وبينما لا تظهر أية عقبة في الطريقة المصرية لعملية الضرب، فإن عقبة سهلة تظهر أمام الطريقة المعتمدة لديهم في عملية القسمة. ولكي تسترعي الانتباه إلى هذه المسألة، ادع طلبة الصف إلى استخدام الطريقة السابقة لحل المسألة 16÷83.

1	16*
2	32
4	64*
8	128

باستخدام 80 = 64 + 16، فإن المصريين سيبقون مفتقدين 3. ونظرا لكون 16 = 16 ×1، فقد وجدوا بأنهم في حاجة إلى كسور لإكمال هذه المسألة.

في نظام الأعداد المصري، يلاحظ بأن كل كسر، باستثناء $\frac{2}{3}$ يتم وصفه كمجموع (وحدة كسور Unit Fraction)، كسور يكون البسط فيها 1. وبهذه الطريقة، تجنب المصريون بعض العقبات الحسابية التي تعترض المرء عندما يعمل على الكسور. ونظرا لارتكاز علم الحساب لديهم على مبدأ المضاعفة Doubling، فإن العقبة الوحيدة التي كانت تشخص أمامهم هي كيفية تغيير كسر بصيغة $\frac{2}{n}$ إلى كسر بصيغة: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+...$. لقد تعاملوا مع هذه المسألة بواسطة جدول (يوجد الجدول في ورق بردي يعود إلى عام 1650 ق.م)، والذي يعرض تحليلات جميع الكسور ذات الصيغة $\frac{2}{n}$ لجميع قيم n الفردية من 5 إلى 101. (ينبغي أن يكون طلبة صفك قادرين على فهم لماذا اعتبر المصريون القيم الفردية لـ n فقط).

إن كسرا مثل $\frac{2}{37}$ قد كتب بصيغة $\frac{1}{19}+\frac{1}{307}$ أو باستخدام الترميز الشائع لوحدة الكسور، $\overline{7.3}+\overline{19}$. (إن هذا الأسلوب في الترميز قد ظهر منذ زمن المصريين الذين عمدوا إلى كتابة الكسور مثل $\frac{1}{4}$ بصيغة ، والكسر $\frac{1}{14}$ بصيغة ، في المدونات الهيروغليفية). يمتلك الكسر $\frac{2}{3}$ رمزا يختص به ويظهر الكسر $\frac{1}{2}$ في بعض الأحيان بصيغة .

إن الحاجة تبرز الآن للأخذ بنظر الاعتبار قاعدة يمكن استخدامها لتحليل كسر بصيغة $\frac{2}{pq}$ (حيث p أو q قد تساوي 1). دع الطلبة يتأملون ما يأتي:

$$\frac{2}{pq}=\frac{\frac{1}{p(p+q)}+\frac{1}{q(p+q)}}{2}$$

يستطيع الطلبة إضافة كسور على الجانب الأيمن، سوية، للبرهنة على صحة ذلك. كذلك ينبغي أن ينتبه الطلبة إلى أنه نظرا لكون pq فرديا (بما أننا بحاجة إلى قاعدة لتحليل $\frac{2}{n}$ حيث n عدد فردي) فإن كل من p و q سيكون فرديا

وعليه فإن p+q سيكون زوجيا، وسيكون الحد $\frac{p+q}{2}$ عبارة عن عدد صحيح.

يستطيع الطلبة تحليل $\frac{2}{15}$ على الأقل بطريقتين. إذا حددت قيمة p=3، q=5، سيكون لديهم

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{\frac{3(8)}{2}}+\frac{1}{\frac{5(8)}{2}}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$$

أو $\overline{12}+\overline{20}$.

أما إذا افترضوا بأن p=1 و q=15 سيكون لديهم

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{\frac{1(16)}{2}}+\frac{1}{\frac{15(16)}{2}}=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$$

أو $\overline{120}+\overline{8}$.

يبدو بأنه كان لدى المصريين طرق أخرى لتحليل الكسور بحيث يجعل المقام الجديد أقل تعقيدا. مثلا، نستطيع أن نعد $\frac{2}{15}$ مثل $\frac{4}{30}$ بعد ذلك، سيكون لدينا

$$\frac{4}{30}=\frac{3}{30}+\frac{1}{30}=\overline{10}+\overline{30}$$

دع الطلبة يتأكدون من صحة هذه التحويلات.

والآن ادع الطلبة إلى إعادة اعتبار مسألة القسمة السابقة $83 \div 16$.

1	16*
2	32
4	64*
8	128
$\overline{2}$	8
$\overline{4}$	4
$\overline{8}$	2*
$\overline{16}$	1*

باختيار مجموع 8.3 من العمود الأيمن، سيتوصلون إلى الحل الآتي: $1+4+\overline{8}+\overline{16}=5+\overline{8}+\overline{16}=5\frac{3}{16}$. ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل مسائلهم الحسابية باستخدام طرق اخترعها المصريون القدماء.

التقييم اللاحق Postassessment

أ. دع الطلبة يكتبون الأعداد التالية بالخط الهيروغليفي.

(1) 5.280

(2) 25.057

(3) $\frac{2}{25}$

(4) $\frac{2}{35}$

ب. دع الطلبة يغيرون كلا من الكسور الآتية إلى تحليلين مختلفين لوحدة الكسر.

(1) $\frac{2}{27}$

(2) $\frac{2}{45}$

(3) $\frac{2}{35}$

ج. دع الطلبة يحلون المسائل الآتية باستخدام الطرق المصرية.

(1) 30×41.

(2) 137×25

(3) $11 \div 132$

(4) $101 \div 16$.

15 قضبان نابيير

Napier Rods

أهداف الأداء Performance Objectives

1 سيقوم الطلبة بأعداد مجموعة قضبان نابيير من الورق المقوى.

2 سينجز الطلبة، أمثلة عن الضرب، بنجاح، باستخدام قضبان نابيير.

التقييم السابق Preassessment

إن المهارة الضرورية الوحيدة لهذا النشاط هي القدرة على ممارسة عملية الضرب.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

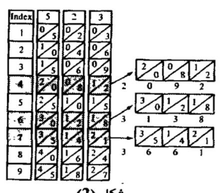
ابدأ عرضك التقديمي بنبذة تاريخية موجزة عن قضبان نابيير. إن آلة الضرب هذه قد اخترعها العالم الرياضي الاسكوتلندي جون نابيير(1550-1617)John Napier، والذي كان مسؤولا بالدرجة الأولى عن تطوير اللوغارتيمات. تتألف الآلة التي اخترعها من عصي خشبية مسطحة، مع مضاعفات متعاقبة للأعداد 9-1. (أنظر الشكل (1)).

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

شكل (1)

ينبغي أن تعطي فرصة مناسبة لكل طالب لأعداد مجموعة قضبان نابيير الخاصة به. ربما تكون أفضل طريقة لبيان طريقة استخدام قضبان نابيير في توضيح مثال باستخدام هذه الآلة.

تأمل عملية ضرب العددين 467×523، واطلب من الطلبة اختيار القضبان لكل من 5، 2، 3 ثم صف الأعمدة بجوار قضيب الدليل Index Rod. (أنظر شكل 2).



شكل (2)

ينبغي أن يختار الطلبة، فيما بعد، الصفوف المناسبة من الدليل المقابل للأرقام الموجودة في المضروب فيه.

يتم إجراء عملية جمع لكل صف باتجاه قطري (انظر شكل 2) وعليه فإن الأعداد التي سنحصل عليها:

$2092 = 4 \times 523$
$3138 = 6 \times 523$
$3661 = 7 \times 523$

قد أضيفت بعد اختيار مكان القيم المناسبة للأرقام حيث تم توليدها.

$467 = 400 + 60 + 7$
$(467)(523)=(400)(523)+(60)(523)+(7)(523)$
$(467)\ (523) = 209200$
31380
3661
244241

إن مناقشة متأنية للخطوة الأخيرة ستسهم في ضمان تكوين معرفة عملية لدى طلبتك باستخدام هذه الآلة، إضافة إلى تزويدهم بفهم شامل لمبررات عمل هذه التقانة وفاعليتها.

1- 561×49
2- 308×275
3- 4932×7655

التقييم اللاحق Postassessment

دع الطلبة يستخدمون مجموعة من قضبان نابيير (والتي قاموا بأعدادها) لضرب ما يأتي:

1. $361 \cdot 49$
2. $308 \cdot 275$
3. $4932 \cdot 7566$

16 وحدة تسعير Unit Pricing

أهداف الأداء Performance Objectives

1- سيقوم الطلبة بتحديد أي من الكسرين المحددين هو الأكبر باستخدام التقانة الموضحة على هذه البطاقة.

2- سيقوم الطلبة بتحديد أي من الكميتين اللتان حاصل ضربهما متساوي هي الأفضل بالموازنة السعرية، بعد تحديد كمية وثمن تلك الكمية

التقييم السابق Preassessment

إن المهارة الضرورية الوحيدة لهذا النشاط هي قدرة الطالب على ممارسة عملية ضرب أعداد تامة (Whole numbers).

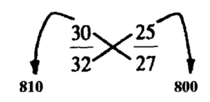
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اسأل طلبتك إذا كانوا يفضلون شراء جرة صلصة تفاح Applesauce زنة 32 oz بكلفة c30 أو جرة زنة 27 oz بكلفة c25. إن المفكر المنظم قد يلجأ إلى ترجمة المسألة إلى مسألة أخرى تطلب تحديد أيهما أكبر $\frac{30}{32}$ أو $\frac{25}{27}$.

ينبغي أن يدرك الطلبة بان هاتين النسبتين قد أتتا من (ثمن كل أونسة). إن الكلمة (لكل Per) تشير إلى عملية قسمة بحيث يمكن الوصول إلى نسبة (الثمن / أونسات) .

هناك طرق متعددة يمكن من خلالها المقارنة بين كسرين : تقسيم البسط على المقام ومقارنة الناتج العشري، أو تغيير كل من الكسرين إلى كسرين متساويين بالمقام، وهكذا.

سنحاول الآن أن نأخذ بعين الاعتبار طريقة أخرى، والتي تعد أكثر الطرق كفاءة وبساطة. ارسم سهمين كما يظهر أدناه، ثم



اضرب باتجاههما، واكتب نتيجة الضرب تحت رأس السهم.

إن تفحصاً بسيطا لحاصلي الضرب تظهر بوضوح أن 810 أكبر من التالي، وعليه فإن الكسر الذي يقبع أعلى العدد 810 (يعني $\frac{30}{32}$) هو الأكبر بين هذين الكسرين. وعليه فإن وحدة سعر الجرة زنة 27 أونس هي أقل، وهي الأفضل لكي نشتريها.

قبل إعطاء الطلبة مسائل تتضمن مقارنة وحدة الأسعار، حاول أن تعرض لهم مجموعة من المسائل العقلية التي تتضمن مقارنة الكسور فقط.

التقييم اللاحق Postassessment

اختر أيهما أكبر من زوج الكسور الآتية :

1- $\frac{7}{8}, \frac{5}{6}$

2- $\frac{19}{25}, \frac{13}{17}$

3- $\frac{17}{23}, \frac{8}{11}$

4- $\frac{5}{9}, \frac{11}{9}$

5- $\frac{4}{5}, \frac{7}{9}$

6- $\frac{18}{31}, \frac{7}{12}$

7- أي كمية تمتلك وحدة سعر أقل: جرّة زنة 7 oz من اللبن بكلفة 11c أم جرة زنة 9 oz من اللبن بكلفة 13c؟

17 حسومات وزيادات متعاقبة
Successive Discounts and Increase

تزود هذه الوحدة الطلبة بتقانة بسيطة لوصف جملة من الحسومات أو / و الزيادات المتعاقبة بوصفها حسما مكافئا واحدا، أو زيادة واحدة. قد يفتن الطلبة، إلى حد ما بسهولة الحل الذي تحمله معها هذه الطريقة للمسائل التي تتصف بصعوبة ملحوظة بالنسبة لموقف المستهلك.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتحويل حسمين متتابعين أو أكثر إلى حسم مكافئ واحد.
2. سيقوم الطلبة بتحويل حسمين متتابعين أو أكثر، أو زيادات مماثلة إلى حسم أو زيادة مكافئة.

التقييم السابق Preassessment

استخدام المسألة الآتية لأغراض تشخيصية إضافة إلى استخدامها في تحفيز المناقشة داخل الصف.

قررت "آرني" أن تشتري قميص لها. وقد قدم مخزن "باري" صفقة تجارية لبيع القميص بحسم 30٪ من السعر المدرج، أما مخزن شارلي رخيص الثمن فيعرض غالبا حسما قدره 20٪ لنفس القميص من نفس السعر المدرج وعلى كل حال، فإن مخزن "شارلي" يعرض القميص حسماً قدره 10٪ من السعر المحسوم أصلا 20٪. من أي مخزن ستحصل "آرني" على الحسم الأكبر في سعر القميص هذا اليوم؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

قد لا يدرك الطلبة، بصورة مباشرة، الفرق القائم بين الحسومات التي عرضها المخزنان في المسألة أعلاه. وقد يشعر بعض الطلبة بان هذين المخزنين يعرضان نفس مقدار الحسم. وبمساعدتك سيستطيع الطلبة البدء بملاحظة في حين أن الصفقة التجارية لمخزن "باري" قد عرضت حسما مقداره 30٪ من السعر الأصلي، فإن مخزن "شارلي" رخيص الثمن قدم حسما قدره 20٪ من السعر الأصلي، بينما كان الحسم الثاني والبالغ 10٪ من السعر الأدنى المحسوم أصلا. وعليه فإن "آرني" ستحصل على أعلى حسم وقدره 30٪.

في هذه النقطة سيبدأ طلبتك بالتساؤل عن مقدار الفرق الحقيقي بين الحسم الذي قدمه كل من هذين المخزنين. قد تستنبط، فيما بعد، بأن مقارنة هاتين الكميتين تتطلب إيجاد حسم مكافئ واحد "للحسمين المتعاقبين" 20٪ و 10٪.

قد يقترح بعض الطلبة إيجاد الحسومات المطلوبة عن طريق البدء بالسعر المثبت مثل $10.00. إن هذا العدد سيعمل بصورة جيدة في الحسابات لأن 100 هي أساس النسب. أي، إن حسما مقداره 20٪ من $10.00 ينتج سعر مقداره $8.00، ثم أن حسما مقداره 10٪ من $8.00 ينتج عنه سعر جديد مقداره $7.20. ونظرا لأن السعر $7.20 يمكن الحصول عليه مباشرة عن طريق حسم واحد مقداره 28٪ من السعر الأصلي المثبت والبالغ $10.00، نتيجة "حسومات متتابعة" مقدارها 10٪ و 10٪ فيكون الحسم المكافئ لهاتين النسبتين هو 28٪. إذ سيكون أمر مقارنة هذه النسبة مع الحسم البالغ 30٪ من السعر الأصلي بالغ السهولة.

ينبغي أن يأخذ الطلبة بعين الاعتبار طريقة عامة لتحويل أي عدد من الحسومات المتعاقبة إلى حسم مكافئ واحد. بادر إلى توضيح الموضوع بنسبتي حسم متعاقبتين هما d_1، d_2 تعملان على سعر مقداره p.

استخدم نفس الطريقة المستخدمة سابقا :

$$p-\frac{pd_1}{100}=p(1-\frac{d_1}{100})$$

يمثل السعر بعد احتساب نسبة الحسم الأول. ويمثل الحد:

$$[p(1-\frac{d_1}{100})]-[p(1-\frac{d_1}{100})](\frac{d_2}{100})$$

السعر بعد احتساب نسبة الحسم الثانية، وعليه سيكون السعر الجديد بعد احتساب مقدار الحسم الثاني:

$$1-(1-\frac{d_1}{100})(1-\frac{d_2}{100})$$

من السعر المثبت الأصلي.

وعليه فإن

$$1-(1-\frac{d_1}{100})(1-\frac{d_2}{100})$$

تعرض الحسم المقتطع من السعر الأصلي لغرض الحصول على السعر الجديد.

وعليه. فإن حسمين متعاقبين مقدارهما $d_1\%$ و$d_2\%$ يكافئان حسما منفردا مقداره:

$$1-\left(1-\frac{d_2}{100}\right)\left(1-\frac{d_1}{100}\right)$$

عبر ترجمة هذه الصيغة الجبرية إلى صيغة لفظية سيكون الطلبة قادرين على إنشاء التقانة البسيطة الآتية لتحويل الحسمين المتعاقبين إلى حسم مكافئ واحد.

1- حول كل من الحسمين المتعاقبين إلى كسور عشرية.

2- اطرح كل من هذين الكسرين العشريين من المقدار الكلي (أي 1.00).

3- اضرب نتائج الخطوة 2.

4- اطرح نتائج الخطوة 3 من المقدار الكلي (أي 1.0).

5- حول نتائج الخطوة 4 إلى نسبة مئوية.

إن تطبيق هذه القواعد على الحسمين المتعاقبين 20٪ و 10٪، ينبغي أن يظهر للطلبة ما يأتي :

1- $20\% = 0.20$, $10\% = 0.10$

2- $1.0-0.20 = 0.80$, $1.0-0.1=0.9$

3- $(0.8)(0.9) = 0.72$

4- $1.00-0.72 = 0.28$

5- $0.28 = 28\%$ (الحسم المكافئ).

سيلاحظ الطلبة بأن القواعد المذكورة أعلاه لا تحدد عدد الحسومات المتعاقبة التي ستأخذها بعين الاعتبار. وسيشجعهم هذا الأمر على دراسة الحالة التي يوجد فيها أكثر من حسمين متعاقبين بحاجة أن يحولوا إلى حسم مكافئ واحد. وينبغي أن يستمر الطلبة بأسلوب مشابه للأسلوب الذي استخدمناه سابقا مع الحسمين المتعاقبين، وسيجدوا بأن نفس القواعد تنطبق، بالحقيقة، على تحويل أي عدد من الحسومات المتعاقبة عندما نريد تحويلها إلى حسم مكافئ منفرد.

إن السؤال الطبيعي الذي يفرض نفسه في هذه النقطة سوف يمتحن بدقة طبيعة "الزيادات المتعاقبة"، أو "النقصان المتعاقب" و "الزيادة". نظرا لأن الزيادة تحتاج إلى زيادة نسبة من السعر إلى السعر الأصلي، بينما يتطلب الحسم طرح نسبة من السعر من السعر الأصلي، فيتوقع من الطالب أن يحزر/يخمن بأن تقانة تحويل الزيادات المتعاقبة، أو مجموعة من الزيادات المتعاقبة والحسومات المتعاقبة إلى زيادة أو حسم منفرد سيكون مشابها لتقانة التحويل المستخدمة في الحسومات المتعاقبة. اقترح عليهم العمل على تطبيق هذه التقانة.

إن زيادة مساحة تطبيق تقانة التحويل هذه بحيث تتضمن الزيادات إضافة إلى الحسومات سيتيح للطلبة فرصة اعتبار مسائل مثل ما يأتي:

عندما يتم تقليل أسعار الدخول إلى لعبة كرة السلة بنسبة 25٪ فإن حضور المباراة قد ازداد بنسبة 35٪. ما هو مقدار تأثير هذه التغييرات على العائد اليومي؟.

في حل هذه المسألة ينبغي أن يكون عمل الطالب مشابها لما يأتي :

1- $25\% = 0.25$ $35\% = 0.35$

2- $1.00-0.25 = 0.75$ $1.00+0.35 = 1.35$

3- $(0.75)(1.35) = 1.0125$

4- $1.0125 - 1.0000 = 0.0125$

5- $0.0125 = 1.25\%$ زيادة

قد ترغب بسؤال طلبتك عن شعورهم بصدد تحديد مقدار صافي التأثير لحسم مقداره 10٪ متتابع مع زيادة مقدارها 10٪. بصورة عامة فإن ظن الطلبة سوف يتجه صوب فكرة أن هاتين الدفعتين سوف تعادل إحداهما الأخرى، مع إبقاء السعر الأصلي دون تغيير. ومع ذلك، ينبغي تشجيعهم على تطبيق تقانة التحويل. إن صافي تأثير هذين التغييرين (الحسم والزيادة) هو بالحقيقة 1٪ وليس كما كان ظن الطلبة.

إن الجدول الآتي الذي يحوي على حسومات وزيادات متعاقبة بنفس النسبة المئوية سوف يرشد الطلبة إلى إنشاء حدس ذكي حول نقطة "التغيير المتعادل" Break Even Poin.

تغييرات متعاقبة							
٪حسم	20	15	10	5	1	0.5	1.0
٪زيادة	20	15	10	5	1	0.5	1.0
٪تغيير الحسم المكافئ	4	2.25	1	0.25	0.01	0.0025	0.0001

قد يكون مقنعا للطلبة اكتشاف أي مجموع من الحسومات والزيادات المتعاقبة التي ستبقي المبلغ الأصلي كما هو دون تغيير. إن إحدى الطرق المناسبة ستكون بتوظيف تقانة التحويل لحسم متعاقب مقداره d٪ وزيادة متعاقبة مقدارها i٪:

$1 - (1-d/100)(1+i/100) = 0;$

$1 - (1-d/100) + i/100 - di/100^2) = 0;$

$100d - 100i + di = 0;\ d = \dfrac{100i}{100+i}$ أو

$i = \dfrac{100d}{100-d}$

إن الجدول التالي يظهر القيم المحتملة لكل من d (الحسم) و i (الزيادة).

d	0	9.09$\overline{09}$	16.66$\overline{6}$	20	50	75	10	25
i	0	10	20	25	100	300	11.11$\overline{1}$	33.33$\overline{3}$

منذ الآن سيكون لدى الطالب معرفة لا بأس بها في موضوع النسب المئوية المتعاقبة. إن تقانة التحويل التي عرضت في هذا الأنموذج Model تمتاز بكونها سهلة التذكر مثل الخطوات الأساسية التي تدعو إلى: الطرح (و/أو الجمع)، الضرب، والطرح (و/أو الجمع).

التقييم اللاحق Postassessment

دع الطلبة يحاولون حل بضعة مسائل تشابه ما يأتي :

1- أرادت "أليس" شراء فستان بسعر قدره 20$. إن أحد المعارض الذي يعمد غالبا إلى حسم أسعار فساتينه بنسبة 12½٪ قد عرض حسما إضافيا مقداره 20٪ على السعر المحسوم أصلا. وفي معرض قريب وجدت أليس بأنه قد عرض نفس الفستان بحسم منفرد مقداره 32٪. أي من المخزنين يعرض السعر الأقل للفستان؟

2- عندما نقص سعر المجلة بنسبة 15٪ ازدادت المبيعات بنسبة 20٪ كيف تأثرت المبالغ المستلمة بهذه التغييرات؟

مراجع References

Posamentier, Alfred, S., Student! Get ready for the SATI: Problem Solving Strategies and Practical Tests, Thousand Oaks, CA: Growin Press, 1996.

Posamentier, Alfred S., and S. Krulik, Teachers! Prepare Your Student for the Mathematics for SAT I: Methods and Problem Solving Strategies, Thousand Oaks, CA: Growin Press, 1996.

Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind, Challenging Problem in Algebra, New York: Dover, 1996.

18 العوامل الأولية والمركبة للعدد الصحيح
Prime and Composite factors of a whole number

تعرض هذه الوحدة أساليب مختلفة لعملية التحليل العاملي لعدد ما، وتتيح للطلبة فرصة الحصول على مجموعة متكاملة من جميع العوامل المختلفة لعدد مركب صحيح. وفي نفس الوقت، تساعد هذه الوحدة الطلبة على فهم أكثر عمقا لعملية التحليل العاملي.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيحدد الطلبة العدد الكلي للعوامل، الأولية والمركبة لعدد صحيح مركب.
2. سيحدد الطلبة كل عنصر من عناصر مجموعة العوامل الأولية والمركبة لهذا العدد.

3 سيجد الطلبة مجموع جميع عناصر هذه المجموعة.

التقييم السابق Pre Assessment

ينبغي أن يكون الطلبة على دراية كافية بالقواعد الأساسية التي تخص قابلية القسمة، وقادرين على إيجاد العوامل الأولية لأي عدد.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لإيجاد مجموعة العوامل الأولية والمركبة لعدد محدد، ينبغي أن تجد أولا العوامل الأولية للعدد، ثم تحتسب جميع حواصل الضرب المحتملة لهذه العوامل. ولإيجاد العوامل الأولية للعدد. يمكن استخدام تقانة القشارة (Peeling). فعلى سبيل المثال، لإيجاد العوامل الأولية للعدد 3960، ينبغي أن تتبع ما يلي:

2) $\underline{3960}$	3960= 2 x 1980
2) $\underline{1980}$	= 2 x 2 x 990
2) $\underline{990}$	= 2 x 2 x 2 x 495
2) $\underline{495}$	= 2 x 2 x 2 x 3 x 165
3) $\underline{165}$	= 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 55
5) $\underline{55}$	= 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 11
11	

إن العوامل الأولية للعدد 3960 هي:

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 11$$

يمكن احتساب عدد العوامل لعدد ما بحاصل ضرب الأسس (يضاف لكل منها 1) لمختلف العوامل في عملية تحليل العوامل الأولية للعدد موصوفة بصيغة أسية Exponential.

وعليه، فإن العدد الكلي للعوامل الخاصة بالعدد 3960 سوف نحصل عليها من حاصل الضرب :

$$(3+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$$

ولإيجاد كل من العوامل الـ 48، اصنع الجدول الذي يفسر نفسه – بنفسه self-explanatory الآتي:

1	2	2^2	2^3
1	3	3^2	
1	5		
1	11		

والآن دع الطلبة يقومون بضرب كل عدد في الصف الأول بالعدد في الصف الثاني:

1 x 1	1 x 2	1 x 2^2	1 x2^3
1 x 3	2 x 3	2^2 x 3	2^3 x 3
1 x 3^2	3 x 3^2	2^2 x 3^2	2^3 x 3^2

إن كل حاصل ضرب سيتم ضربه بكل رقم في الصف الثالث:

1x1x1	1 x 1 x 2	1x1x2^2	1 x 1 x 2^3
1x1x3	1 x 2 x 3	1 x 2^2 x 3	1 x 2^3 x 3
1x1x3^2	1 x 2 x 3^2	1 x 2^2 x 3^2	1 x 2^3 x 3^2
1x1x5	1 x 2 x 5	1 x 2^2 x 5	1 x 2^3 x 5
1x3x5	2 x 3 x 5	2^2 x 3 x 5	2^3 x 3 x 5
1x3^2x5	2 x 3^2 x 5	2^2x3^2x5	2^3 x 3^2 x 5

ينبغي أن تستمر بنفس العملية لحين استنفاذ جميع الصفوف. في حالة مثالنا هذا، 3960، سنحصل بالنهاية على:

1x1x1x1	1x1x1x2	1x1x1x2^2	1x1x1x 2^3
1x1x1x3	1x1x2x3	1x1x2^2x3	1x1x2^3x3
1x1x1x3^2	1x1x2x3	1x1x1x2^2x3^2	1x1x2^3x3^2
1x1x1x5	1x1x2x5	1x1x2^2x5	1x1x2^3x5
1x1x3x5	1x2x3x5	1x2^2x3x5	1x2^2x3x5
1x1x3^2x5	1x2x3^2x5	1x2^2x3^2x 5	1x2^3x3^2x5
1x1x1x11	1x1x2x11	1x1x2^2x11	1x1x2^3x1
1x1x3x11	1x2x3x11	1x2^2x3x11	1x2^3x3^2x11
1x1x3^2x11	1x2x3^2x11	1x2^2x3^2x11	1x2^3x3^2x11
1x1x5x11	1x2x5x11	1x2^2x5x11	1x2^3x5x11
1x3x5x11	2x3x5x11	2^2x3x5x11	2^3x3^2x5x11
1x3^2x5x11	2x3^2x5x11	2^2x3^2x5x11	2^3x3^2x5x11

يمكن للطلبة أن يحصلوا على نفس النتائج بطريقة أكثر سرعة وسهولة: جد القواسم لكل من العوامل في أعداد العوامل الأولية عندما تكتب بصيغة أسية. وستكون في مثالنا:

$$2^3\begin{cases}2^1=2\\2^2=4\\2^3=8\end{cases}\quad 3^2\begin{cases}3^1=3\\3^2=9\end{cases}\quad 5^1\{5^1=5\quad 11^1\{11^1=11$$

a b c d

دع الطلبة يعدون جدولا يتألف الصف الأول من العدد 1 (أنظر أدناه). وليقم الطلبة برسم خط وضرب لكل aوالأعداد في الموجود فوق هذا الخط. سيقوم الطلبة برسم خط bعدد في بجميع الأعداد الموجودة فوق الخط cجديد وضرب العناصر في الثاني. ستستمر العملية لحين ضرب جميع القواسم لكل عامل في أعداد العوامل الأولية.

1	2	4	8	I
3	6	18	24	II
9	18	36	72	
5	10	20	40	III
15	30	60	120	
45	90	180	360	
11	22	44	88	IV
33	66	132	264	
99	198	396	792	
55	110	220	440	
165	330	660	1320	
495	990	1980	3960	

إن الجدول الذي يحوي الـ 48 عاملا التي نبحث عنها، تبتدئ بالعدد 1 وتنتهي بالعدد المحدد لدينا 3960.

إن القسم I تتألف من العدد 1 والعوامل في a. ويتألف القسم II من حاصل ضرب كل عدد في b مع كل عدد في I. ونشأ القسم III من حاصل ضرب كل عدد في c مع الأعداد في I و II. وأخيرا جاء القسم IV والذي نتج عن ضرب كل عدد في d مع كل عدد في كل من I و II و III. ضم الجدول $4 \times 12 = 48$ عاملا، حيث تظهر فيه جميع عوامل العدد 3960: الأولية والمركبة.

لإيجاد مجموع العوامل للعدد N، دعنا نصف العوامل الأولية له بواسطة: $a^{\alpha} \bullet b^{\beta} \bullet c^{p} \bullet d^{\theta}$، بحيث $N = a^{\alpha} \bullet b^{\beta} \bullet c^{p} \bullet d^{\theta}$.

إن مجموع جميع عوامل N سوف تحدد الصيغة الآتية:

$$s = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \bullet \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \; \frac{c^{p+1}-1}{c-1} \; \frac{d^{\theta+1}-1}{d-1}.$$

وفي مثالنا السابق، N=3960، a=2، b=3، c=5، d=11، α=3، β=2، p=1، θ=i وعليه:

$$s = \frac{2^4-1}{2-1} \bullet \frac{3^3-1}{3-1} \bullet \frac{5^2-1}{5-1} \bullet \frac{11^2-1}{11-1}$$

$$= \frac{15}{1} \bullet \frac{26}{2} \bullet \frac{24}{4} \bullet \frac{120}{10}$$

$$= 15 \times 13 \times 6 \times 12$$

$$= 14{,}040$$

التقييم اللاحق Postassessment

ادع الطلبة إلى حساب العدد الكلي للعوامل ثم إيجاد كل من هذه العوامل (سواء أكان أوليا أو مركبا) لكل مما يأتي:

أ- 3600

ب- 540

ج- 1680

د- 25725

جد مجموع جميع العوامل في كل من الحالات أعلاه.

19 نظام العد الأولي Prime Numeration system

ستعرض هذه الوحدة طريقة غير مألوفة للتعبير عن الأعداد. سيسهم أخذ نظام العد (الغريب) بعين الاعتبار في تعميق فهم الطلبة بنظام قيمة المرتبة Place Value System، بالإضافة إلى تكوين إدراك كامل عن التحليل الى العوامل الأولية.

أهداف الأداء Performance Objective

1. سيقوم الطلبة بتحويل الأعداد من نظام العد الأولي إلى نظام العد العشري.
2. سيقوم الطلبة بتحويل الأعداد من نظام العد — العشري إلى نظام العد الأولي.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون لدى الطلبة معرفة كافية بماهية العدد الأولي، وان يكونوا قادرين على التحليل العاملي لعدد عشري إلى عوامله الأولية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لجعل الطلبة اكثر دراية بنظام العد الأولي، دعهم يتأملون المسائل الآتية:

(أ) $5 \bullet 4 = 9$

(ب) $12 \bullet 24 = 36$

(ج) $8 \div 2 = 6$.

في البداية سيصاب الطلبة بحيرة وارتباك، وبعد إجراء تفحص إضافي لما هو مألوف مع الأسس سيبدأون بالتفكير من خلال التخوم الجديدة.

لا يزال هذا النظام مختلفا تماما عن أي نظام عد تمت دراسته سابقا.

في نظام العد الأولي، ولا يوجد ثمة أساس Base وتكون

قيمة كل مكان هي عبارة عن عدد أولي. إن المكان الأول (ابتداء من اليمين) هو العامل الأول، 2، والمكان التالي (إلى اليسار) هو العامل التالي، 3. ويستمر هذا الأمر مع الأعداد الأولية المتعاقبة مع كل مكان يعقبها (بالتحرك نحو اليسار) لتقابل العدد الأولي الذي يليه. يمكن أن يعرض هذا باستخدام شارطة Dash لكل مكان، وعرض قيمته تحت الشارطة.

$\overline{29}\ \ \overline{23}\ \ \overline{19}\ \ \overline{16}\ \ \overline{13}\ \ \overline{11}\ \ \overline{7}\ \ \overline{5}\ \ \overline{3}\ \ \overline{2}$

وكما هو الحال في نظامنا العشري، فان نظامنا الأولي، هذا سوف يستمر نحو اليسار بصورة غير محدودة.

ولغرض إيجاد قيمة عدد في النظام العشري، فإن الأرقام التي تحتل أي مكان سوف تضرب بقيمة المكان ثم يصار إلى إضافتها. ومن ناحية ثانية في نظام العد الأولي الحالي، يتم الحصول على قيمة العدد عن طريقة اخذ قيمة كل مكان إلى قوة العدد الذي يتبوأ تلك المرتبة ثم "الضرب". على سبيل المثال، العدد 145_p (الرمز السفلي p سوف يستخدم للإشارة إلى أن العدد يقع ضمن نظام العد الأولي) يساوي $2^5 \bullet 3^4 \bullet 5^1 = 32 \bullet 82 \bullet 5 = 12960$. لاحظ بان أسس الأعداد الأولية 5، 3، 2 هي 1، 4، 5 على التوالي.

دع الطلبة يمارسون التحويل من نظام العد الأولي إلى نظام العد العشري، وعندما يبدأون بالشعور بنوع من الراحة مع هذا العمل . دعهم يأخذون بنظر الاعتبار عرض 0، 1. دع الطلبة يعبرون عن 0_p و 10_p بوصفها أعداد عشرية.

حاول أن تبين للطلبة بأنه في ضوء التعريف $1=2^0$، وحاول أن تستنبط بواسطة الطلبة بأن تمثيل الصفر سيكون مستحيلا في نظام العد الأولي. ولغرض تحويل عدد من النظام العشري إلى نظام العد الأولي. تصبح عملية مراجعة تحليل العدد إلى عوامله الأولية أمرا ضروريا للغاية.

حاول أن توضح للطلبة بان أي عدد صحيح اكبر من واحد يمكن وضعه كحاصل ضرب عوامل أولية بطريقة دقيقة. (النظرية الأساسية للحساب). على سبيل المثال، العدد 420 يمكن تحليل عوامله كما يأتي: $2^2 \bullet 3^1 \bullet 5^1 \bullet 7^1$. وعليه فإن $420 = 1112_p$. دع الطلبة يحللون إلى العوامل الأولية: (أ) 144، (ب) 600، (ج) 1960، مع وصف ما يكافئها من نظام العد الأولي. حاول أن تؤكد بان أسس العوامل الأولية هي عبارة عن أرقام الأعداد الأولية. وعندما يتقن الطلبة التعامل مع نظام العد الحالي، حاول أن تتحداهم بضرب $4_p \bullet 5_p$ والذي يمكن كتابته بصيغة $2^5 \bullet 2^4 = 2^9 = 512$. وعليه فإن $4_p . 5_p = 9_p$. والآن دعهم يعتبرون $29_p = 2^9 \bullet 3^2 \bullet 2^4 \bullet 2^5 \bullet 3^2 = 4_p \bullet 25_p$ (أو 4608).يمكن عرض أمثلة أخرى ذات صلة بالموضوع(مثال: $(8p \div 2_p)$.

ينبغي أن يوضح للطلبة بان عمليات الجمع والطرح قد تحتاج التحويل إلى نظام العد العشري قبل الإضافة، أو الطرح فعليا. إن هذه المسائل ستوفر للطلبة فرصة التمرن بالعمل مع الأسس بطريقة جديدة وغير مألوفة. كما يمكن أن يجر نظام العد الأولي لاستعراض القاسم المشترك الأعظم، والمضاعف المشترك الأصغر لعدين من الأعداد.

افترض بان الطلبة يحتاجون إلى إيجاد القاسم المشترك الأعظم للعددين 18,720 و 3,150. في هذه الحالة ينبغي عليهم أن يغيروا هذه العددين العشريين إلى نظام العدد الأولي للحصول على: 100125_p و 12221_p. وبإدراج "أصغر قيمة لكل مرتبة" لإنشاء عدد جديد، سوف يحصلون على 121_p، وهو القاسم المشترك الأعظم للعددين.

والآن افترض بأن الطلبة قد اعترضتهم مسألة إيجاد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18,720 و 3,150. إن قيامهم بتغيير هذين العددين العشريين إلى نظام العد الأولي. للحصول على 100125_p و 122_p، ينبغي عليهم إدراج "أعلى قيمة لكل مرتبة" للحصول على 101225_p، وهو المضاعف المشترك الأصغر للعددين.

سيستمتع الطلبة بتطبيق طرق نظام العد الأولي على مسائل أخرى، والتي تتطلب إيجاد القاسم المشترك الأعظم أو المضاعف المشترك الأصغر لأعداد محددة (يمكن اعتبار اكثر من عددين في نفس الوقت). إن القيمة العددية الحقيقية لهذه الطرق تستند إلى توزيع هذه الطرق تستند إلى تسويغ هذه الطرق وتبريرها. كما ينبغي أن يعمد المعلمون إلى عرض هذه المبررات حالما يتقن الطلبة استخدام تقاناتها.

والآن دع الطلبة يقومون بتحويل O_p إلى 29_p إلى أعداد عشرية مع تدوين إجاباتهم. سيبدأ الطلبة بملاحظة إنشاء الأعداد العشرية بطريقة غير مألوفة.

حاول أن تستخرج من الطلبة تطبيقات محتملة أخرى لنظام العد الأولي.

نظام عشري	نظام أولي
$2^{0} = 1$	0_p
$2^{1} = 2$	1_p
$2^{2} = 4$	2_p
$2^{3} = 8$	3_p
$2^{4} = 16$	4_p
$2^{5} = 32$	5_p
$2^{6} = 64$	6_p
$2^{7} = 128$	7_p
$2^{8} = 256$	8_p
$2^{9} = 512$	9_p
$3^{1}.2^{0} = 3$	10_p
$3^{1}.2^{1} = 6$	11_p
$3^{1}.2^{2} = 12$	12_p
$3^{1}.2^{3} = 24$	13_p
$3^{1}.2^{4} = 48$	14_p
$3^{1}.2^{5} = 96$	15_p
$3^{1}.2^{6} = 192$	16_p
$3^{1}.2^{7} = 384$	17_p
$3^{1}.2^{8} = 768$	18_p
$3^{1}.2^{9} = 1536$	19_p
$3^{2}.2^{0} = 9$	20_p
$3^{2}.2^{1} = 18$	21_p
$3^{2}.2^{2} = 36$	22_p
$3^{2}.2^{3} = 72$	23_p
$3^{2}.2^{4} = 144$	24_p
$3^{2}.2^{5} = 288$	25_p
$3^{2}.2^{6} = 576$	26_p
$3^{2}.2^{7} = 1152$	27_p
$3^{2}02^{8} = 2304$	28_p
$3^{2}.2^{9} = 4608$	29_p

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي على الطلبة :

1. وصف كل من الأعداد الآتية وفق نظام العد العشري :

(أ) 50_p (ب) 24_p (ج) 15_p (د) 22_p (هـ) 1234_p

2. عبّر عن كل من الأعداد العشرية الآتية كحاصل ضرب أعداد أولية ، ثم من خلال نظام العد الأولي :

(أ) 50

(ب) 100

(ج) 125

(د) 400

(هـ) 1000

(و) 260

(ز) 350.

3. حل المسائل الآتية :

(أ) $3_p \bullet 6_p$

(ب) $12_p \bullet 13_p$

(ج) $6_p \div 3_p$

20 امتدادات المراتب العشرية المتكررة
Repeating Decimal Expansion

إن الاصطلاحين "غير قابل على الانتهاء Ending Never" و "اللامتناهي "Infinite" يؤديان إلى إرباك فهم الطلبة في كثير من الأحيان. أن أولى الأماكن التي يواجه الطلبة فيها هذين المفهومين في المدرسة الثانوية الدنيا حيث يشخص أمامهم امتدادات الفارزة العشرية – غير المتقطعة Non termination Decimal Expansion.

يدرك الطلبة تماما طبيعة الحاجة القائمة لرموز وتسميات محددة عندما يجابهون المراتب العشرية المتكررة، والتي تنشأ عن بعض الصيغ الكسرية. وسيكتشف الطلبة في هذه الوحدة الأنماط، والطرق الإجرائية الحسابية التي تبدو متناقضة ظاهريا والتي يكثر وجودها مع المراتب العشرية المتكررة.

أهداف الأداء Performance Objective

1. سيكون الطلبة قادرين على تحديد أي من الأعداد القياسية التي ستنتج امتدادات الفارزة العشرية، والتي تقبل انقطاعا (توقف).
2. سيحدد الطلبة اقصر امتداد للدورة المتكررة Repeating Cycle.
3. سيصبح الطلبة قادرين على استخدام المكافئات العشرية لإيجاد مراتب عشرية متكررة أخرى.
4. سيقوم الطلبة باختبار طريقة بديلة لتحديد الامتدادات العشرية.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بكيفية التغيير من الصيغة الكسرية $\frac{a}{b}$(Functional Form) للعدد القياسي، إلى مكافئه العشري، كذلك يجب أن تكون لديهم معرفة جيدة بالتحليل إلى العوامل الأولية.

حاول أن تجعل الطلبة يخمنون أي من الكسور الآتية سوف تصبح مراتب عشرية متكررة: $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{6}$. ودعهم يعملون على تحويل الكسور إلى كسور عشرية للتأكد من دقة تخميناتهم.

لاحظ أيضاً بأن المراتب العشرية المنتهية يمكن أن تعد مراتب عشرية متكررة في ضوء التكرار اللا متناهي من الأصفار.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابتدئ بجعل الطلبة يعملون على كسور بصيغة $\frac{1}{n}$ ، والتي سوف تجبرهم على تركيز اهتمامهم (وعملهم التخميني) على المقام. وإذا وجد الطلبة صعوبة في التمثيل الرقمي للمراتب العشرية المتكررة دون الإنجاز الفعلي لعملية التمديد Expansion، اقترح قيامهم بتحليل كل من عوامل المقامات للوقوف على إمكانية وجود أية أنماط واضحة. وسيرون بسرعة بأن المراتب العشرية تنتهي، فقط، وإذا كانت فقط العوامل الأولية للمقام 2 أو / و 5. ويستطيع الطلبة أن يبرروا، بسهولة، بأنه حين يكون للبسط فارزة عشرية ومجموعة من الأصفار، يصبح من مضاعفات العشرة (لأغراض عملية القسمة فقط)، نظرا لأن العوامل الأولية للعشرة هي 2 و 5، وستثمر عملية القسمة على هذين العددين فقط عن إنهاء المراتب العشرية المتكررة وتحديد نقطة نهاية لعملية القسمة.

حاول أن تتحدى الطلبة حول تحديد عدد المراتب العشرية التي يواصلون العمل باتجاهها قبل أن يصبح نمطها جليا. في بعض الحالات، كما هو في الكسر $\frac{1}{3}$ ، نحتاج إلى مرتبتين عشريتين قبل أن يصبح النمط جليا. وفي حالات أخرى، لن تكون العملية بهذه البساطة والوضوح. ادع الطلبة إلى إيجاد النمط المتكرر للكسر $\frac{1}{17}$. أن تمديد هذا الكسر العشري يحتوي على 16 مرتبة قبل وضوح أي نمط ظاهر.

$$1/17 = .0588235294\ 117647\overline{0588235294\ 117647}$$

قد يرغب بعض الطلبة بتعميم وافتراض إن الكسر $\frac{1}{n}$ يمتلك (n-1) من المراتب العشرية المتكررة. ولكن الكسر $\frac{1}{3} = \overline{0.3}$ يحتوي على مرتبة عشرية متكررة واحدة والذي يدحض نظريتهم. من ناحية ثانية، فإن امتحان أنواع مختلفة من

التمديدات لكسر بصيغة $\frac{1}{n}$، ستظهر للطلبة بجلاء بأن كل من التمديدات تمتلك كحد أعلى (n-1) من الأعشار المتكررة.

كما ينبغي أن يدرك الطلبة تماما بأن كل من المراتب العشرية للتمديد تأتي من المتبقي بعد عملية القسمة للخطوة السابقة. ولكل من البواقي هناك فقط (n-1) من الاختيارات (لا يمكن أن يساوي المتبقي صفرا لأن العملية سوف تنتهي بعد ذلك. ولا يمكن أن يساوي n لأنه سيقبل القسمة لمرة ثانية). وإذا كان المتبقي مساويا لأي عدد متبقي في خطوات سابقة، سيجد الطلبة المراتب العشرية المتكررة، أما إذا لم يصلوا إلى هذه الحالة. فينبغي الاستمرار بعملية القسمة لحين الوصول إلى مرحلة تكرار المتبقي. إن هذا الأمر سوف يحصل في، وبحدوده القصوى، وبعدد (n-1) من الخطوات. وعليه فإن $\frac{1}{n}$، إذا كان متكررا. سيكون لديه، كحد أعلى، (n-1) من المراتب العشرية.

وسيجد الطلبة متعة في ملاحظة إن التمديد المتكرر لعدد مثل $\frac{1}{7}$ سوف ينتج تمديدات لكل من $\frac{2}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{4}{7}$، $\frac{5}{7}$، $\frac{6}{7}$. ويمكن إعادة كتابة الكسر $\frac{2}{7}$ بدلالة الكسر $\frac{1}{7}$. وعليه:

$$\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7} = 2 \times .\overline{142857} = .\overline{285714}$$

بإضافة مراتب عشرية — متعددة مختلفة، سيصبح الطلبة قادرين على إيجاد مراتب عشرية — متعددة مختلفة، كما سيصبح الطلبة قادرين على إيجاد مراتب عشرية متكررة جديدة. على سبيل المثال:

$$\frac{1}{3} = .\overline{333333}$$
$$+\ \frac{1}{7} = \overline{0142857}$$
$$\frac{10}{21} = .\overline{476190}$$

لإيجاد المراتب العشرية المتكررة العامة للكسر $\frac{1}{n}$ عندما تكون n = 21. دع الطلبة يقومون بتقسيم $\overline{0.47619}$ على المقام، 10، للحصول على 0.47619.

إن العمل مع المراتب العشرية، وخلال إجراء العمليات الحسابية المختلفة سيوصل الطلبة إلى الحقيقة التي مفادها أن $.\overline{9}=1$. يصعب إدراك هذا المبدأ بواسطة طلبة المدارس الثانوية الدنيا. بالمقابل فإن البرهان الآتي، والذي يستطيعون أن ينجزوه بأنفسهم،سوف يلقي الضوء على المسألة ويزيدها وضوحا.

$$\frac{1}{3} = .\overline{3}$$
$$+\ \frac{2}{3} = .\overline{6}$$
$$1 = .\overline{9}$$

وبالمثل: بما أن

$$\frac{1}{9} \times 9 = .\overline{1} \times 9$$
$$\frac{9}{9} = .\overline{9}$$
$$1 = .\overline{9}$$

غالبا ما يركز الطلبة، ويبذلون المزيد من الجهد لغرض الفهم عندما يحسون بأنهم يتعلمون شيئا جديدا. إن الطريقة الآتية، والتي تبرز الخطوط العامة لعملية القسمة، والمستخدمة في التحويل من الصيغة الكسرية إلى الصيغة العشرية، سوف تمنح للطلبة أداة جديدة لإيجاد المرتبة العشرية المتكررة.

لإيجاد التمديد العشري للكسر $\frac{3}{7}$، افترض $r_a = \frac{3}{7}$ واضربه بالعدد 10

1) $\frac{3}{7} \times 10 = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$

والآن دع 4 تتبوأ مرتبة العشرات بالكسر العشري واستخدم $\frac{2}{7}$ بوصفه المتبقي الجديد r_1. عاود العملية ثانية، باستخدام الكسر بوصفه المتبقي الجديد واحتفظ بالجميع كرقم عشري للمرتبة التالية:

2) $\frac{2}{7} \times 10 = \frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$ $\qquad r_2 = \frac{6}{7}$

مرتبة المئات = 2

3) $\frac{6}{7} \times 10 = \frac{60}{7} = 2\frac{6}{7}$ $\qquad r_3 = \frac{4}{7}$

مرتبة الآلاف = 8

4) $\frac{4}{7} \times 10 = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$ $\qquad r_4 = \frac{5}{7}$

مرتبة عشرات الآلاف = 5

5) $\frac{5}{7} \times 10 = \frac{50}{7} = 7\frac{1}{7}$ $\qquad r_5 = \frac{1}{7}$

مرتبة مئات الآلاف = 7

6) $\frac{6}{7}\times 10=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$ $\quad r_6=\frac{3}{7}$

مرتبة الملايين = 1

اخبر الطلبة بضرورة تكرار العملية لحين يكون المتبقي مساويا للقيمة التي ابتدأوا عندها. وفي هذه الحالة $r_6=r_0=\frac{3}{7}$، وأن التمديد العشري سيكون: $\frac{3}{7}=\overline{.428571}$.

إن العرض الإيضاحي المناسب لهذه الطريقة هو أداة ممتازة لمساعدة الطلبة على فهم أكثر عمقا لما تتضمنه عملية القسمة، ولماذا تكون قيمة المتبقي عاملا حاسما في تحديد طول التكرار.

التقييم اللاحق Postassessment

ادع الطلبة إلى العمل على ما يأتي:

1. حدد أي من الكسور الآتية يعد منتهيا دون إيجاد التمديدات العشرية فعليا: $\frac{2}{9}$، $\frac{1}{8}$، $\frac{3}{13}$، $\frac{19}{20}$.
2. حدد العدد الأقصى من المراتب العشرية في الدورة المتكررة لكل من: $\frac{1}{37}$، $\frac{4}{9}$، $\frac{3}{7}$.
3. إذا علمت أن $\frac{1}{14}=\overline{.0714285}$، جد التمديد العشري للكسر $\frac{3}{14}$ دون استخدام التقسيم.
4. برهن على أن $\overline{.49}=.5$. (ملاحظة: حاول أن تتأمل الكسور $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{6}$).
5. باستخدام الطريقة البديلة (التي نوقشت خلال هذه الوحدة) احسب الكسر $\frac{2}{9}$ بوصفه كسر عشريا متعددا.

21 مزايا المراتب العشرية المتكررة التامة
Peculiarities Of Perfect Repeating Decimals

يمكن استخدام هذه الوحدة كمصدر ممتع يسلط ضوءا جانبيا على موضوع الكسور الاعتيادية والكسور العشرية، وذلك عن طريق بيان الخصائص "السحرية" لمرتبة محددة من الأعداد.

ان الأعداد هي عبارة عن مقلوبات أعداد أولية، والتي تتكرر مكافئاتها العشرية بعد اقل من P-1 من المراتب، حيث تمثل P العدد الاولي. يطلق على مثل هذه الأعداد "مكررات تامة Perfect Reperends". وفي أي مرتبة عشرية متكررة، يطلق على التعاقب الذي يتكرر "مكرر Repetends".

ينصح باستخدام هذه الوحدة بعد الوحدة السابقة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة باختبار أمثلة متعددة عن المكررات التامة للتحقق من مبادئ محددة.
2. سيكتشف الطلبة ويتعمق فهمهم بأفكار وآراء جديدة حول: القسمة، والبواقي، والمكافئات العشرية للكسور.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية ببعض مكافئات الكسور التي يكون المتبقي فيها صفرا، بينما تمتلك كسور أخرى فترات متكررة بأطوال مختلفة. يجب أن يبتدئ الطلبة العمل على تحويل الكسر $\frac{1}{7}$ إلى كسر عشري.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

من الضروري الانتباه إلى أن تحويل A/P إلى كسر عشري، فإن المكرر يمتلك مراتبا لا تزيد على P-1، لأنه بتقسيم A بواسطة P فهناك كحد أعلى P-1 من البواقي المختلفة، وحالما يظهر الباقي للمرة الثانية، فإن نفس التعاقب سوف يتكرر. إن المكررات التامة، بالإضافة إلى تعاقب البواقي P-1 التي تصاحب كلا منها، تمتاز بجملة من الخصائص الفريدة. وسوف نناقش في هذه الوحدة أكثر الخصائص بساطة وعمومية، ولكنك ستجد قائمة أكثر تفصيلا لأهم مبادئ المراتب العشرية المتكررة في كتاب

Philosophy of Arithmetic, by Edward Brooks, (Norwood Editions), PP. 460-485.

إن إحدى أكثر الخصائص بساطة، والتي ستعمد إلى توضيحها هي أن مضاعفات 1 إلى P-1 لـ P/1 هي متغيرات دورية لمكرر P/1. وبعد أن يجد الطلبة قيمة $\frac{1}{7} = \overline{0.142857}$، يمكن أن يقوموا بضرب الكسر العشري بالأعداد 2، 3، 4، 5، أو 6 فيحصلوا على الأجوبة: $\overline{0.285714}$، $\overline{0.428571}$، $\overline{0.571428}$، $\overline{0.714285}$، $\overline{0.857142}$، وهي أيضاً عبارة عن مكافئات عشرية للكسور $\frac{2}{7}$، $\frac{3}{7}$، $\frac{4}{7}$، $\frac{5}{7}$، $\frac{6}{7}$، على التوالي. بعد أن يتم فهم هذا الأمر وينجلي الغموض عنه، فإن الطريقة المبسطة لإيجاد مضاعفات $\frac{1}{7}$ ستكون بإيجاد آخر مرتبة أولا. على سبيل المثال، $4\times.\overline{142857}$ تنتهي بـ 8، لذا يجب أن تكون القيمة $\overline{0.571428}$. وعندما تكون الفترة أطول، أو عندما يظهر أي رقم أكثر من مرة واحدة في المكرر، فإن من الضروري إيجاد آخر اثنين أو ثلاثة أرقام أولا. أن تفسير هذا التغير الدوري يرتبط بحقيقة أن تقسيم P إلى 1، في النقطة التي يكون عندها المتبقي A، فإن نفس التعاقب سوف يبدأ وكما هو الحال عليه عند قسمة P إلى A. وتذكر أيضاً بأن كل A ممكنة ($1<AP$) تظهر كمتبقي.

في بعض الحالات العارضة، وعندما يكون مكرر 1/P مضروبا بـ P فإن النتيجة تكون 0.999999. إن بعض المكررات المثالية هي:

$$\frac{1}{17} = 0.0588235294117647$$

$$\frac{1}{19} = 0.052631578947368421$$

$$\frac{1}{23} = 0.0434782608695652173913$$

إن المكررات الوحيدة، الأخرى، بحيث أن $P > 100$ هي $= \frac{1}{29}, \frac{1}{47}, \frac{1}{59}, \frac{1}{61}, \frac{1}{97}$.

إن صفة غريبة أخرى لافتة للنظر لهذه الأعداد تكمن في إمكانية تقسيم المكرر إلى قسمين متساويين، وبتعاقب اقصر، وان مجموعهما هو $\overline{0.99999}$. إن عرضا رسوميا توضيحيا لهذه الحالة يظهر في أدناه.

بداية

إن الدائرة الداخلية تمثل مكرر $\frac{1}{29}$، وأما الدائرة الخارجية فتمثل تعاقب البواقي التي تظهر بعد كل عدد من أعداد الدائرة الداخلية. إن هذا الشكل الرسومي يمتلك الخصائص الآتية (شأن معظم الأشكال بجميع المكررات التامة).

1. إن أي اثنين من الفقرات المتقابلة قطرياً للمكرر تضيف لغاية 9.
2. إن أي اثنين من البواقي المتقابلة تضيف لغاية 29.
3. لضرب المكرر بالمتغير a ($1 < a < 29$)، جد قيمة a في دائرة البواقي ثم ابدأ بالمكرر الجديد بصيغة عشرية متتبعا العدد الذي يترافق مع a (باتجاه عقرب الساعة Clockwise).

قد لا يمتلك بعض الطلبة صبرا كافيا لاختبار هذه العموميات على الشكل السابق، ولكن يمكن إعداد شكل توضيحي آخر لأي من المكررات التامة، ويستطيع الطلبة إعداد أشكالهم الخاصة مرتكزين في بداية عملهم إلى المعلومة التي تنص أن $\frac{1}{17}$ هو واحد من هذه الأعداد.

وفي هذا الموضع هناك خيار واحد لكي نشق طريقنا قدما مع القسمة عندما نقوم بتوليد مكرر: بعد تقسيم 19 إلى 1 إلى خمسة مراتب عشرية، سوف نحصل على متبقي مقداره 3.

(*) $\frac{1}{19} = 0.05263\ \frac{3}{19}$. غير أننا نستطيع أن نلتمس من هذا

(*) $\frac{1}{19} = .05263 + \frac{3}{19} \times 10^{-5}$ بمعنى $\frac{3}{19}$ يمثل المرتبة العشرية السادسة.

الأمر $\frac{9}{19}$ 0.15789=($\frac{3}{19}$ 0.05263)3= $\frac{3}{19}$ لذا فإن $\frac{9}{19}$ 0.0526315789= $\frac{1}{19}$ ولكن بما أننا نعلم أن $\frac{1}{19}$ هو مكرر تام. لذا 9 = أول + رقم عاشر = ثاني + حادي عشر = ثالث + تاني عشر. ... الخ، وأننا قد قمنا بتوليد جميع الأرقام الثمانية عشر

إن هذا الأمر سيؤدي بنا إلى خاصية محددة لمكرر $\frac{1}{97}$ $\frac{1}{97}$ = $\frac{3}{97}$ 0 01= $\frac{9}{97}$ 0.0103= $\frac{27}{97}$ 0.010309= $\frac{81}{97}$ 0.01030927

ولكن ما يؤسف له هو أن 243 يمتلك ثلاثة مراتب، لذا فإن النمط الدقيق سوف يتغير. ولكننا لازلنا قادرين على إضافة قوى ثلاثية بالطريقة الآتية لتوليد المكرر:

```
0.0103092781
          243
            729
              2187
                 6561 .......
```

وهكذا

ينبغي أن يشجع الطلبة على اكتشاف أنماط أخرى للمكررات.

التقييم اللاحق Preassessment

دع الطلبة يقومون بتوليد أي من المكررات التامة باستخدام القواعد التي عرضت هنا، ثم يقومون بإيجاد مضاعفات المكرر. وحاول أن تستقصي الموضوع مع الصف لتبرير سبب اتصاف الأعداد الأولية بهذه الميزة. على سبيل المثال، إذا امتلك $\frac{1}{14}$ مكررا تاما، فماذا سيحدث لـ $\frac{2}{14}$ أو $\frac{4}{14}$؟

22 أنماط في الرياضيات Patters in Mathematics

صممت هذه الوحدة لطلبة السنة التاسعة بمادة الرياضيات. ويمكن استخدام أجزاء من هذه الوحدة لإثراء الصفوف العلاجية في إيجاد الأنماط عن طريق الملاحظة بمفردها.

أهداف الأداء Performance Objective

1. سيجد الطلبة الأنماط عن طريق الملاحظة.
2. سيجد الطلبة الصيغ Formulas الخاصة بالأنماط بطريقة المحاولة والخطأ Trial and Error.
3. سيجد الطلبة الصيغ الخاصة بالأنماط عن طريق اكتشاف القواعد الخاصة بإيجاد الثابت Constant ومعاملات x^2, x.

التقييم السابق Preassessment

حاول أن تتحدى الطلبة بإيجاد الأعداد المتتالية في الأنماط، وصيغ الأنماط الآتية:

أ.

x	Y
0	1
1	3
2	5
3	7
4	؟
5	؟

ب

x	Y
0	1
1	4
2	7
3	10
4	؟
5	؟

ج.

x	y
0	1
1	5
2	9
3	13
4	؟
5	؟

د.

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9
4	؟
5	؟

سيكون معظم الطلبة قادرين على إيجاد الأنماط، والصيغ الخاصة بهذه الأنماط باستخدام أسلوب المحاولة والخطأ. ادع الطلبة إلى ملء أمكنة الأعداد المفقودة، والصيغ مع ملاحظة الفروق بين قيم y المتتابعة. إن الجداول المكتملة ستكون كما يأتي (تمثل D الفروق بين قيم y المتتابعة).

أ)

x	y	D
0	1	
1	3	2
2	5	2
3	7	2
4	9	2
5	11	2

Y=2x+1

ب)

x	y	D
0	1	
1	4	3
2	7	3
3	10	3
4	13	3
5	16	3

y=3x+1

ج)

x	Y	D
0	1	
1	5	4
2	9	4
3	13	4
4	17	4
5	21	4

y=4x+1

د)

x	y	D
0	3	
1	5	2
2	7	2
3	9	2
4	11	2
5	13	2

y=2x+3

دع الطلبة يلاحظون قيم الثوابت في كل حالة من الحالات السابقة. هل لاحظوا أي نمط؟ بالطبع سيلاحظون بأن الثابت هو قيمة y عندما تكون قيمة x صفرا. حاول أن تشد انتباه الطلبة إلى الفروق بين قيم y المتتابعة. هل لاحظ الطلبة شيئا؟ نعم، إن الفروق بين قيم y تساوي قيمة معامل x. ليعمل الطلبة على مجموعة من الأنماط المماثلة لحين امتلاكهم القدرة على إيجاد الأنماط بسرعة، مع الصيغ التي تخص كلا من هذه الأنماط.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اطرح التمرين الآتي على طلبتك، وليقوموا بإيجاد النمط والصيغة التي تصفه إذا توفرت لديهم القدرة على إنجاز ذلك. كم هو عدد المستطيلات جميعا؟ اكمل الجدول.

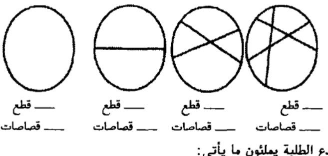
x عدد المستطيلات الصغيرة	y العدد الكلي للمستطيلات
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

من خلال ملاحظة المستطيلات، سيفلح الكثير من الطلبة في العثور على النمط، وملء الفراغات السائدة في الجدول. دع الطلبة يدونون الفارق الأول. وسيظهر لهم بأن الفرق ليس ثابتا، ثم ليدونوا الفارق الثاني، وسيجدونه ثابتا. دعهم يلخصون الحقائق التي عثروا عليها في جدول، وقد ينجح بعضهم في إيجاد الصيغة التي تخص النمط السائد في هذه المسألة، أيضاً.

x عدد المستطيلات الصغيرة	Y العدد الكلي للمستطيلات	D_1	D_2
0	0		
1	1	1	
2	3	2	1
3	6	3	1
4	10	4	1
5	15	5	1
6	21	6	1

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$$

ليمارس الطلبة نفس الأسلوب مع النمط الآتي: ما هو أكبر عدد للقطع التي يمكنك عملها بـ x من القصات؟.



دع الطلبة يملئون ما يأتي:

X عدد القصاصات	Y عدد القطع	D_1	D_2
0	1		
1	2	1	
2	4	2	1
3	7	3	1
4	11	4	1
5	16	5	1

لاحظ الفارق الأول، والذي يمتاز بكونه غير ثابت، بينما يبدو الفارق الثاني ثابتا. لاشك أن أحد الطلبة سيفلح بالوصول إلى استكمال الصيغة الآتية:

$$y=\frac{x2}{2}+\frac{x}{2}+1$$

هل هناك ثمة نمط سائد بين قيم الثوابت والمعاملات في المسألتين السابقتين؟ نعم، الثابت يمثل قيمة y عندما تكون قيمة x صفرا

دعنا نختبر الصيغة $ax^2 + bx + c = y$ ونجد قيم y لمجموعة من قيم x.

D_2	D_1	Y	X
		c	0
	a+b	a+b+c	1
2a	3a+b	4a+2b+c	2
2a	5a+b	9a+3b+c	3
2a	7a+b	16a+3b+c	4

دعنا نختبر النمط. كما وجدنا في الصيغ السابقة فإن y هو الثابت عندما تكون قيمة x صفرا. إن الفارق الأول هو a+b، وهو مجموع معاملات كل من x^2 و x. والفارق الثاني 2a يمثل ضعف قيمة معامل x^2. إن قيمة الفارق الأول عندما يكون x=1 هو a+b. ونظرا لأننا على علم بقيمة المتغير a (يساوي نصف الفارق الثاني)، نستطيع إيجاد قيمة b عن طريق طرح a من الفارق الأول (a+b). وإذا قمنا بإعادة اختبار النمط الأول، فإننا سننجح في اشتقاق الصيغة.

إن الثابت هو قيمة y عندما تكون قيمة x صفرا، وعليه فإن الثابت يساوي 1. D_2 يساوي 2a، ولما كان D_2 يساوي 1 فإن قيمة a ستساوي ½. D_1 يساوي (a+b)، ونظرا لكون D_1 يساوي 1، وقيمة a هي ½، فإن قيمة b ستساوي ½.

وعليه ستكون الصيغة كما يأتي:

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$$

التقييم اللاحق Post Assessment

اكمل الجداول الآتية واستنبط الصيغ المناسبة للأنماط الآتية عن طريق إيجاد الفارق الأول، والفارق الثاني.

x	y
0	3
1	6
2	13
3	24
4	
5	

x	y
0	0
1	5
2	14
3	27
4	
5	

x	y
0	0
1	13
2	34
3	63
4	
5	

x	y
0	2
1	3
2	6
3	11
4	
5	

23 الأعداد الكبيرة جداً "جووجول" و "جووجولبكس" Googol and Googolplex

تعرض هذه الوحدة مناقشة الأعداد الكبيرة، وتقدم للطالب آفاقا رحبة بمضمار العالم المتناه للأعداد الكبيرة، مع بيان سهولة وصف هذه الأعداد باستخدام الرموز العلمية Scientific Notation.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. ستعطى أمثلة للطلبة حول الرموز العلمية والتي تستخدم في ميادين العلوم والرياضيات.
2. بتحديد أي عدد، سيقوم الطلبة بتحويله إلى الرمز العلمي المكافئ له.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل المسائل الآتية:

1. احسب حواصل الضرب الآتية: جد الحل دون استخدام القلم:
(أ) 63×10 (ب) 0.05×100 (ج) 951×1000
2. احسب خوارج القسمة الآتية:
(أ) 470÷10 (ب) 4862÷1000 (ج) 46000÷1000
3. ما هو أكبر عدد تستطيع أن تفكر فيه؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

قد ترغب برواية القصة القديمة عن الصبيين اللذين دخلا في

مناقشة عنيفة بالشارع. وقد نشأت المناظرة عندما حول كل صبي أن يذكر عددا أكبر من عدد صاحبه، وبعد فترة، أدرك الصبيان بأن كلا منهما يستطيع ذكر عدد أكبر من العدد الذي ذكره صاحبه !. تعد الأعداد من الأمور التي تجلب متعة عند اللعب بها، ويمكن إجراء عدة أمور مشوقة بواسطتها. ورغم ذلك، يغيب عن بالنا في أحيان كثيرة أن نطرح على أنفسنا سؤالا هو: ما هي حقيقة العدد؟. ينبغي أن يسأل الطالب، كم هو مقدار المليون؟ وهل تستطيع أن تتخيل مجموع المليار الأول من الأعداد الطبيعية؟ لماذا نهتم بالأعداد ذات الفئات الكبيرة والتي لا نستخدمها- أو قد نستخدمها؟

في هذه النقطة سيكون لزاما على المعلم أن يوضح لطلبته بأن العلماء الذين يستخدمون الأعداد الكبيرة جدا، أو الأعداد الصغيرة جدا غالبا ما يلجأون إلى وصف هذه الأعداد برموز علمية.

ولتعلم كيفية استخدام هذا النظام العددي، سنحاول استدعاء بعض الأنماط السائدة في الرياضيات. وسيترك الأمر للمعلم، في هذا النقطة بالذات، بعرض الرموز العلمية، وقد ترغب بالرجوع إلى أي من الكتب المنهجية المعيارية لضمان تحقيق التطوير المناسب:

1 عندما يوصف العدد بوصفه حاصل ضرب الأس عشرة وعدد يقل عن عشرة لكنه يزيد عن أو يساوي واحد ($1 \le n < 10$)، فإن العدد المذكور يقال عنه: صالح للكتابة بأسلوب الرموز العلمية.

2 قد يكون معلم العلوم قادرا على اقتراح أعداد كبيرة جدا، أو صغيرة جدا والتي قد يستخدمها الطلبة أو يحاولون قراءتها في دروس مادة العلوم. ويمكن لهذه الأعداد أن تحول إلى صيغة الرموز العلمية. إن مناقشة عامة قد تدور حول تحديد متى تستخدم الأعداد الكبيرة (على سبيل المثال، حبات الرمل المنتشرة على الشاطئ، أو النجوم في السماء، أو في الاقتصاد، والعلوم، ... الخ). تدخر الجرائد ومقالات الصحف الحالية بإشارات متعددة إلى الملايين والمليارات، الخ كم من الناس رأى بأم عينيه مليونا من مادة ما؟. إن معظم الناس لا يمتلكون فكرة واضحة عن الحجم الحقيقي للمليون !.

لكي تحصل على مليون دولار، ما هي طول المدة التي ينبغي أن تعمل بها إذا كان مدخولك الأسبوعي 100 دولار؟ (حوالي 200 عام!). كم من النجوم تستطيع أن تبصرها عينك المجردة في ليلة صافية؟ بالحقيقة، لن تستطيع أن ترى ملايين بل بضعة آلاف، حوالي 3,500 (أي 3.5×10^3 وفق الرمز العلمي). إن مائة قطعة من الصحائف تصنع حزمة يصل سمكها إلى 5 مليمترات أو 5/1 بوصة (كل 25.4 مليمتراً تكافئ بوصة واحدة). إن مليون قطعة من الصحائف ستؤلف برجا يصل طوله إلى 55 ياردة، أو ما يعادل بصورة تقريبية بناية ذات 12 دور. افترض بأنك تقود سيارة بسرعة 65 ميل/ساعة، كم ستستغرق من الوقت لكي تسافر بهذه السرعة مسافة مقدارها مليون من الأميال؟ ($1\frac{3}{4}$ سنة).

كم هو مقدار كبر المليار؟ إن الميزانية الفيدرالية لعام 1981 قد طالبت بزيادة الضريبة بمقدار من الدولارات تزيد على عدد الثوان المنصرمة منذ ولادة المسيح (عليه السلام). (ملاحظة: وفقا لقابلية الصف المحدد، والوقت المتاح ينبغي على الطلبة القيام بتحويل جميع الأعداد الكبيرة إلى الرموز العلمية). ويجب أن يرشد الطلبة إلى حقيقة أن من المستحيل افتراضيا Virtually على العقل البشري إدراك ضخامة المليار. تذكر مقدار ارتفاع عمود يتألف من مليون صحيفة — إذا كانت مائة قطعة منها تصنع رزمة سمكها 5 مليمترات (حوالي 5/1 بوصة). إن مليار صحيفة من الورق سوف ينتج عنها برج ارتفاعه 31 ميلا!.

إن سيارة تسافر، بدون توقف، بسرعة قدرها 100 ميل/ساعة سوف تستغرق 1,140 سنة في سفرها لكي تقطع مليار ميلا. إذا كنت تتقاضى 100 دولار أسبوعيا. فعليك أن تعمل لمدة 192307 عاما لكي تحصل على مليار دولار. (إن بعض هذه الأمثلة يمكن أن تحتسب في آلة حاسبة إلكترونية).

ينبغي أن تطرح المسألة الآتية "صنع لي "جون" معروفا في اليوم السابق وقد استفسرت منه عن طبيعة المكافأة التي يريدها. كان جون حكيما جدا، وقال لي: امنحني 1 بنس Penny باليوم الأول، وبنسين في اليوم التالي، وأربعة بنسات في اليوم الثالث، واستمر على هذا المنوال لمدة 64 يوما بمضاعفة عدد البنسات في كل يوم جديد. "ما هو مقدار المبلغ الذي يتوجب علي دفعه إلى جون؟".

إن عمل جدول للمسألة سيوفر للطلبة فرصة جيدة لرؤية الأعداد وهي تنمو بسرعة، والمقدار الذي ستصل إليه.

عدد الأيام	عدد البنسات Pennies
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
الخ	الخ
64	9.223.372.036.854.775.808

والآن فإن مجموع جميع الأعداد في العمود الثاني تمثل عدد البنسات المطلوب دفعها إلى جون والبالغة :

18.446.744.073.709.551.615

يقرأ هذا العدد: ثمانية عشر كوينتليون Quintillion، وأربعمائة وستة واربعين كواردليون Quardillion، وسبعمائة وأربعة واربعون تريليون Trillion، وثلاثة وسبعون مليار Billion، وسبعمائة وتسعة ملايين، وخمسمائة وإحدى وخمسون ألفا. وستمائة وخمسة عشر.

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على ملاحظة بأنه مهما كبر مقدار هذا العدد إلا انه لازال محدودا ولا يمكن أن يعد لامتناهيا Infinite. حاول أن تجعلهم يعبرون عن هذا العدد باستخدام الرمز العلمي.

إن السؤال الآخر الذي يفرض نفسه عند هذه النقطة يتعلق بأكبر عدد يمكن وصفه بواسطة ثلاثة أرقام. باعتماد الوصف التقليدي فإن العدد الأكبر هو 999، والسؤال ماذا بصدد 99^9؟ (إن مراجعة الأس تظهر حقيقة بأن هذا يعني أن 99 قد ضرب بنفسها 8 مرات). ولكن في حالة السماح بالأسس، فإن الجواب عن السؤال سيكون 9^{9^9} ، والتي تعني، بأن 9 بالأس 9^9، أو ببساطة 9 بالأس 489، 420، 387. (حاصل ضرب 387.420.489 من التسعات) إذا أردنا طباعة هذا العدد بمعدل 16 رقم في البوصة، فقد تم تقدير ما يحتاجه هذا العدد الهائل جدا سيملأ 33 جزءا يتألف كل منها من 800 صفحة، وبمعدل طباعة 14.000 رقما في كل صفحة. لقد وجد (حسابيا) بأن هذا العدد يزيد بأربعة ملايين مرة من عدد الإلكترونات الموجودة في الكون. ولكنه يبقى معدودا ضمن الأعداد "المتناهية/المحدودة".

(ادع الطلبة إلى إيجاد أكبر عدد يتألف من ثلاثة أرقام يمكن كتابته بواسطة العدد 4).

لنقل بأن عدد حبات الرمل في جزيرة كوني Coney Island يصل حوالي 10^{20} حبة.يمكن أن تسأل الطلبة باقتراح طريقة للقيام بهذا التقدير. إن عدد الإلكترونات التي تمر خلال سلك المصباح الزجاجي التقليدي خلال دقيقة واحدة يعادل عدد قطرات الماء التي جرت في مساقط مياه نياجارا خلال مائة عام . إن سبب إيراد مثل هذه الأمثلة على أعداد كبيرة جدا يهدف إلى تنبيه الطلبة على حقيقة بأنه مهما كان كبر المجموعة فيمكن إحصاء عناصرها.

والآن قد يسأل الطلبة "ما هو أكبر عدد يمتلك اسما؟". أما اصطلاح جووجول Googol قد صيغ لوصف الرقم 1 ويليه مائة صفر . إن اصطلاحا آخر هو جووجولبلكس سينتج عنه عدد يتألف من الرقم 1 يتبعه جوجول صفراً لذا فإن "جووجول" مضروباً في "جووجول" ينتج عنه عدد يتألف من الرقم 1 يتبعه 200 صفراً. إن الطلبة الذين سيحاولون كتابة جووجولبلكس على السبورة أو عل صفحة الورق سيصل إلى فكرة مقدار هذا العدد العملاق المتناهي (لا توجد مساحة كافية للكتابة إذا سافرت باتجاه اقرب نجم مرئي، مستمرا بكتابة الأصفار في مسار رحلتك!).

لقد وجد الفلكيون بأن السنة — الضوئية Light – year تمثل وحدة ذات طول مناسب في قياس المسافات الفلكية الشاسعة جدا.إن النجم الشمالي يبعد عن كرتنا أرضية بـ 47 سنة ضوئية . ماذا يعني هذا العدد ؟ ينتقل الضوء بسرعة 186,000 ميل/ثانية. في سنة ضوئية يقطع الضوء مسافة 6,000,000,000,000 (6×10^{12}) ميلا.إن هذه المسافة الهائلة يطلق عليها السنة الضوئية . إن اقرب نجم يبعد عنا 4.4 سنة ضوئية. وأبعد نجم معروف لدينا يبعد عنا 1.4×10^9 سنة ضوئية. دع الطلبة يتأملون الآتي: يستغرق الضوء 47 سنة ضوئية لكي يسافر من الأرض إلى نجم الشمال . ماذا سيرى الشخص الذي يقف على النجم مصوبا نظره إلى الأرض في هذا اليوم ؟ (الحوادث التي جرت في عام 1934)

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بإكمال ما يأتي:

1. يبعد الكوكب بلوتو بحوالي4,700,000,000,000 ميلا عن كرتنا أرضية اعرض هذا الجواب بالرمز العلمي (4.7×10^{12}).
2. يبلغ محيط الأرض عند خط الاستواء حوالي 25,000 ميلا، اعرض هذه القيمة بالرمز العلمي (2.5×10^4).

24 رياضيات التأمين على الحياة
Mathematics of life Insurance

تصف هذه الوحدة للطلبة كيف تأخذ شركات التأمين باعتباراتها الاحتمالية، والفائدة المركبة في حساب قسط الفائدة الصافية للتأمين على الحياة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيستخدم الطلبة صيغة الفائدة المركبة لحساب قيمة رأس المال المتبقي في المصرف خلاف فترة محددة، وبفائدة معلومة.
2. سيقوم الطلبة باحتساب القيمة الحالية لرأس المال التي تزداد إلى قيمة محددة عندما تودع في المصرف لفترة محددة، وبفائدة معلومة.
3. سيستخدم الطلبة الاحتمالات، وقيمة الفائدة المناسبة لحساب قسط الفائدة الصافية التي سيقوم بدفعها حامل بوليصة التأمين.

التقييم السابق Preassessment

استخدم المسألة التالية لأغراض الفحص والتشخيص، إضافة إلى بث حافز داخل الصف. في كل 200,000 رجل على قيد الحياة بعمر 40 عاما فإن 40,199,100 يبقون منهم أحياء لسن 41 ما هي الاحتمالية الخاصة برجل عمره 40 عاما قد أمّن على حياته بأن يعيش على الأقل سنة واحدة؟ وما هي احتمالية وفاته خلال هذه السنة؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بالتعرض إلى هذه المسألة، سيصبح الطلبة على وعي تام بتطبيقات نظرية الاحتمالات في ميدان التأمين على الحياة. إن من المهم جدا بالنسبة لهذه الشركات أن تكون قادرة على تحديد المخاطر التي يؤمن الناس عليها باقتنائهم لبوليصة التأمين على الحياة.

ولغرض تقرير حسابات أقساط الفائدة، ينبغي على شركة التأمين على الحياة معرفة عدد الأشخاص المتوقع وفاتهم في كل مجموعة من المجاميع. وتقوم الشركات بإنجاز ذلك عبر جمع بيانات حول عدد الأشخاص المتوفين خلال الفترات الماضية ولكل فئة عمرية. ونظرا لأن البيانات يتم جمعها من عدد كبير من الحوادث فإن قانون الأعداد الكبيرة ينطبق على هذه الحالة. إن هذا القانون ينص بأنه "مع عدد كبير التجارب، فإن نسبة عدد النجاحات إلى عدد المحاولات يصبح مقاربا جدا للاحتمالية النظرية".

تعمد شركات التأمين على الحياة إلى صياغة جداول بمعدل الوفيات مبنية على وفيات الماضي تعرض التنبؤ بعدد الأشخاص الذي سيفارقون الحياة من كل مجموعة. ويظهر أدناه جزء من الجدول المعياري للوفيات الاعتيادية الخاص بأعضاء 1958. لصياغة هذا الجدول استخدمت عينة عدد أشخاصها 10 ملايين فردا. تم تدوين مدى حياة هؤلاء من الولادة ولغاية سن 99 عاما. وفي كل مستوى عمري، يدون الجدول أعداد الأشخاص الأحياء عند بداية السنة، وعدد الوفيات التي حصلت خلال السنة. بعدها تحتسب النسبة الآتية:

$$\frac{\text{عدد الوفيات خلال سنة}}{\text{عدد الأشخاص الأحياء عند بداية السنة}}$$

إن هذه النسبة يتم تحويلها إلى عدد وفيات لكل 1000. إن عدد الوفيات لكل 1000 يطلق عليها اصطلاح "معدل الوفيات". إن معدل الوفيات هذا، كما سيلاحظ الطلبة، يحتل مكانة بارزة في عملية احتساب قسط التأمين الذي سيسدده حامل بوليصة التأمين.

العمر	عدد الأحياء	الوفيات لكل سنة	الوفيات لكل 1000
0	10,000,000	70,800	7.08
1	9,929,200	17,475	1.76
2	9,911,725	15,066	1.52
3	9,896,659	14,449	1.46
4	9,882,210	13,835	140
10	9,805,870	11,865	1.21
11	9,794,005	12,047	1.23
12	9,781,958	12,325	1.26
13	9,769,633	12,896	1.32
18	9,698,230	16,390	1.69
25	9,575,636	18,481	1.93
30	9,480,358	20,193	2.13
42	9,173,375	28,253	4.17
43	9,135,122	41,382	4.53
44	9,093,740	44,741	4.92

جدول (1)

بعد هذه المقدمة، ينبغي أن يطرح المعلم السؤال الآتي: ما هي احتمالية وفاة شخص يبلغ عمره 18 عاما، إذا كان قد توفي 11 من 6,509 شخص كانوا أحياء عند بداية العام؟ إن الاحتمالية هي $\frac{11}{6509}$. ولكن شركات التأمين على الحياة تفضل تحويل هذه النسبة إلى معدل الوفيات لكل 1000. ينبغي أن يوجه المعلم الطلبة نحو تغيير النسبة 6509/11 إلى x/1000 عن طريق تثبيت النسب الآتية:

$$\frac{\text{عدد الوفيات خلال السنة}}{\text{عدد الأحياء عند بداية العام}} = \frac{x}{1000}$$

x = معدل الوفيات لكل 1000.

إن الجواب على المسألة أعلاه هو:

$1000 / x = 6509/11$ أو $1.69 = x$

وهذا يعني بأن 1.69 من الأشخاص سيتوفون من الألف الأصلي عند نهاية السنين الثمانية عشر. تستخدم شركة التأمين هذه المعلومات لحساب قسط الفائدة الذي سيتحمله أعضاء مجموعة فئة 18 عاما. افترض وجود 1000 شخص بعمر 18 عاما. والذين قاموا بالتأمين على حياتهم بمبلغ 1000 دولار لكل منهم ولسنة واحدة كم هو مقدار المبلغ الذي ستدفعه شركة التأمين عند نهاية السنة؟ إذا توفي 1.69 شخصا، فإن الشركة سوف تدفع (1690 = 1000 × 1.69) $1690 وعليه ما هو مقدار المبلغ الذي ستحمله الشركة لحاملي بوليصة التأمين؟ (إن هذا الأمر لا يأخذ بالحسبان الربح أو مصاريف العمل). يتم تقسيم مبلغ 1690 دولار بصورة متساوية على 1000 شخص فيساوي 1.69 دولار لكل شخص. في المناقشة السابقة، لم يأخذ الطلبة بعين الاعتبار حقيقة إن المال الذي سيسدد إلى الشركة سوف يحصل على فائدة خلال السنة. لذا بالإضافة إلى اعتبار معدل الوفيات، ينبغي أن تؤخذ نسبة الفائدة بالحسبان عند حساب قسط التأمين. ويجب على المعلم، الآن، أن يطور مفهوما للفائدة المركبة، فيطرح سؤالا على الطلبة مفاده: ما هو مقدار المال المتراكم في مصرف، عند نهاية السنة، إذا أودع شخص مبلغا مقداره $100 وبفائدة قدرها 5٪. وسيكون الجواب 100 زائدا (100)05. أو 1.05 × 100 وهو $105. إذا ابقي مبلغ $105 في المصرف لسنة أخرى، فكم سيصبح المبلغ المودع في نهاية السنة؟ (105).05+$105 أو $100×1.05×1.05 أو $(1.05)^2 \times$ $100 والذي سيصبح $100.25. ليقم الطلبة بكتابة الصيغة العامة مستخدمين P=رأس المال الأصلي، I=نسبة الفائدة خلال فترة محددة، A= مقدار راس المال في نهاية فترة محددة، و n= عدد السنوات التي سيودع خلال رأس المال الأصلي. إن الصيغة ستكون $A=P(1+I)^n$.

يجب أن يطرح المعلم، الآن، سؤالا على طلبته يستفسر فيه عن مقدار رأس المال الذي يجب عليهم إيداعه في مصرف تبلغ فائدة المودوعات فيه 5٪، إذا أرادوا أن يتراكم مبلغ $100 في سنة واحدة من الآن. في المثال السابق، رأى الطلبة بأن مبلغ $100 قد نما إلى $105 خلال مدة سنة واحدة. ستستخدم هذه المعلومات لأعداد تناسب:

$x / 100 = 100 /105 = .9524.x = 100(.9524) = \$95.24$

كم يجب علينا أن نودع الآن لغرض تراكم $100 في ناهية السنتين من الآن؟

$x / 100 = 100 /110.25 = .9070 . x = \$90.70$

ينبغي أن يكون الطلبة، الآن، قادرين على اشتقاق صيغة لاحتساب القيمة الحالية Present Value من صيغة الفائدة المركبة ($A=P(1+i)^n$).

إن هذه الصيغة هي:

$$P = \frac{A}{(1+i)^n}$$

وسيعود طلبتك الآن إلى المسألة الأصلية التي تخص موضوع شركة التأمين على الحياة، والتي يفترض بها أن تسدد مبلغا مقداره $1690 في نهاية العام إلى المتوفين الذين بلغت أعمارهم

18 عاما. ما هي القيمة الحالية لـ 1690$؟ بعبارة أخرى، ما مقدار ما تجمعه شركة التأمين في بداية السنة بحيث يمكنها أن تدفع مبلغا مقداره 1690$ في نهاية السنة؟.

باستخدام صيغة القيمة الحالية، سيحتسب الطلبة بأنه لكل 1$ ينبغي أن تسدده الشركة، يجب أن تجمع الشركة 0.9524$ في بداية السنة. وإذا كان على الشركة أن تسدد 1690$ إذن يجب عليها أن تجمع 1609.56$ بالمجموع من الألف شخص الذين يعدون ضمن فئة 18 عاما (1690 × 0.9524 = 1609.56$). وعليه فإن كل حامل بوليصة تأمين يجب عليه أن يساهم بقسط تأمين مقداره 1609$ / 1000= 1.60956 أو حوالي 1.61$.

يمكن الآن أن تفرض مسألة جديدة. افترض أن مجموعة أخرى من 1000 شخص أعمارهم 25 عاما اقتنوا بوليصات تامين لسنة واحدة تساوي 1000$ للبوليصة الواحدة (فائدة الموت هي 1000$). ووفقا لما ورد في جدول الوفيات فإن معدل وفياتهم هو 1.93 أو 1.93 شخصا يتوفى من كل 1000 شخص يقع في فئة 25 عاما خلال الخمس وعشرين عاما التي انقضت. ما هو مقدار قسط التأمين إذا كان مقدار الفائدة 5٪؟ معدل الوفيات لكل 1000 شخص عند عمر 25 عاما = 1.93. المبلغ المطلوب تسديد مستحقاته = (1000 × 1.93) = 1930$. معامل الفائدة = 9524.$ القيمة الحالية للمستحقات في سنة واحدة (9524 × 1930) = 1838.13$. عدد الأشخاص الذين يسددون القسط = 1000. صافي الأقساط = 1838.13 / 1000 = 1.83813. إن هذه العملية قد تستمر لسنوات إضافية من التأمين.

التقييم اللاحق Postassessment

احسب صافي قسط التأمين لبوليصة لسنتين ولمجموعة من 1000 شخص بعمر 30 عاما، وبفائدة مقدارها 5٪. معدل الوفيات عند سن 30 عاما هو 2.13، معدل الوفيات عند 31 هو 2.19.

25 تحليلات (تشريحات) هندسية Geometric Dissection

خلافا لشخصية Humpty Dumpty(*). فإن أشكال التحليل الهندسي يمكن أن توضع سوية لمرة ثانية. وبالحقيقة، فإن الهدف الأساسي للتحليل يكمن في قطع شكل مستوي مستقيم الخطوط بخطوط مستقيمة بطريقة ما بحيث إن الأجزاء الناتجة يمكن إعادة تركيبها لتكوين الشكل المطلوب. إن هذه الوحدة سوف تعرض المدى الواسع للتحليلات الهندسية عن طريق التأكيد على قيمتها الرياضية والترفيهية.

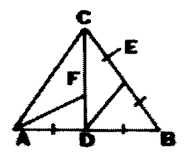
أهداف الأداء Performance Objective

1. سيشاهد الطلبة صياغات لمساحة متعدد الأضلاع بأسلوب متين مترابط.
2. سيقوم الطلبة بتحويل أشكال محددة من متعددات الأضلاع إلى أشكال من نوع آخر تساويها في المساحة بواسطة التحليلات.

التقييم السابق Preassessment

اعرض لطلبتك المسألة الآتية: لديك مثلث متساوي الأضلاع، تم تجزئته إلى أربعة قطع، والتي يمكن جمعها سوية لتكوين مستطيل. إن أحد الحلول الممكنة: أقم المنصف العمودي من النقطة C إلى النقطة D على الضلع $\overline{AB}$، ارسم من النقطة D قطعة مستقيم إلى منتصف الضلع $\overline{AC}$؛ نصف زاوية $\angle A$ مادا شعاع المنصف إلى النقطة F على الضلع $\overline{CD}$. إن هذه الأجزاء الأربعة سوف تكون مستطيلا؛

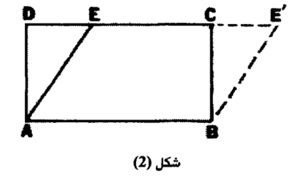
(*) هي شخصية خيالية يشار بواسطتها إلى حقيقة إن الشيء المكسور لا يعود إلى حالته الأصلية إطلاقاً.



شكل (1)

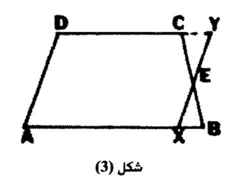
إستراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابتدئ مناقشة التحليلات بعرض تساوي المساحة بين مستطيل ومتوازي أضلاع يشتركان بنفس القاعدة. إن التحليل يستمر كما يأتي باستخدام ورق سميك أو ورق مقوى، اصنع المستطيل ABCD. اصنع قطعاً مستقيمة من الرأس A إلى نقطة E على الضلع $\overline{DC}$، ارفع المثلث ADE واضعا الضلع $\overline{AD}$ على طول الضلع $\overline{BC}$ لتكوين متوازى الأضلاع ABE'E.



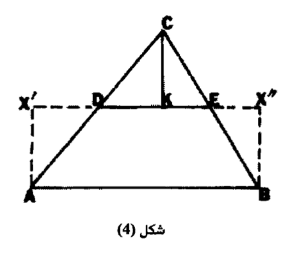
شكل (2)

وبنفس الأسلوب، تستطيع أن تعرض بأن متوازي أضلاع وشبه المنحرف بنفس القاعدة يمتلكان نفس المساحة. خذ أي شبه منحرف، جد نقطة المتصف E على الضلع $\overline{BC}$، وارسم خلال النقطة E مستقيما يوازي الضلع $\overline{AD}$، والذي يقطع الضلع $\overline{AB}$ في X والضلع $\overline{DC}$ في Y. بما إن المثلث CEY والمثلث BEX متطابقان، فإن مساحتي شبه المنحرف ABCD ومتوازي الأضلاع AXYD ستكون متساوية.



شكل (3)

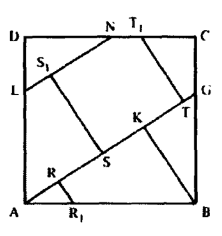
إن مدى التحويلات الممكنة لمتعددات الأضلاع إلى متعددات أضلاع أخرى بأسلوب التحليلات تمتاز بكثرتها وتعددها. ويعد يانوس بولاي Janos Bolyai، أحد الذين ارسوا دعامات الهندسة اللا اقليدية، كان الأول في اقتراح بأنه في حالة وجود أي متعددي أضلاع يمتلكان مساحة متساوية، فإن أي شكل يمكن تحليله/ تجزئته بعدد محدود من المحاولات بحيث يمكن من خلال إعادة ترتيب الأجزاء المجزئة مطابقتها للشكل الآخر ولكن، نحن مهتمون بتحويلات محددة تتطلب اقل عدد من التجزئات على سبيل المثال، يمكن أن تتأمل مسألة تجزئة مثلث حاد الزاوية لتكوين شكل مستطيل. في شكل 4، في البداية جد نقطة منتصف الضلعين $\overline{AC}$ و$\overline{BC}$ وصل هاتين النقطتين لتكون $\overline{DA}$ على الضلع $\overline{DA}$. من النقطة C أقم مستقيما عموديا على الضلع $\overline{DE}$ في النقطة X. خذ المثلث ΔDXC وضعه بحيث أن X الآن هي X` وزاوية DCX تكون مجاورة للزاوية CAB. بنفس الطريقة انقل المثلث EXC بحيث أن X ستكون الآن X`` وزاوية ECX مجاورة لزاوية CBA



شكل (4)

لتشجيع الطلبة على البدء بحل مسائل التحليل/التجزئة بأنفسهم، اقترح قيامهم بعناية بإنشاء مربع 10سم × 10سم، وكما يأتي:

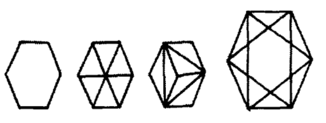
دع AL=BG=7، CT_1=3.1، AR_1=2.9، DN=4.2. ارسم $\overline{AG}$ و $\overline{LN}$، وعلى $\overline{LN}$ ليكن LS_1=1.6، والنقاط R,S,K,T على المستقيم $\overline{AG}$ بحيث RS=3.3، AR=2.4، SK=2.4 و KT=3.3 ارسم $\overline{RR_1}$، $\overline{SS_1}$، $\overline{KB}$ و $\overline{TT_1}$.



شكل (5)

بعد عملية القطع ينبغي أن يكون لدى الطلبة سبعة قطع، وباستخدام جميع هذه القطع، يجب أن يحاول الطلبة تكوين: (1) ثلاثة مربعات بنفس المساحة و (2) شبه منحرف متساوي الساقين.

إن تحليلا جميلا سيكون ممكنا مع ثلاثة أشكال سداسية منتظمة. بترك الشكل السدس الأول دون قطع، قم بتجزئة الثاني والثالث كما في الشكل الآتي (شكل 6). إن هذه الأجزاء الـ 13 يمكن أن يعاد جمعها وترتيبها لتكوين شكل مسدس منفرد.



شكل (6)

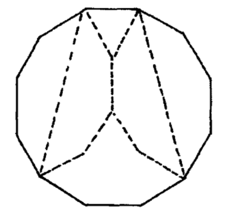
ينبغي أن يلاحظ بأن هذا التحويل يمكن اعتباره بأسلوب التدوير Rotation، وأخرى بأسلوب الانعكاسات، والتحويلات بالإضافة إلى التدوير.

بعدها تستطيع أن تحدد بأن ضلعا في المسدس الكبير هو أكبر بمقدار $\sqrt{3}$ من ضلع المسدسات الصغيرة. وبما ان مساحة المسدس الجديد تساوي ثلاث أضعاف مساحة كل من المسدسات الصغيرة، فقد قمنا بالتأكد من علاقة معنوية والتي تنطبق بين أشكال مماثلة: أي ان نسبة مساحاتها هي مربع نسبة أضلاعها المتقابلة.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكمل الطلبة التمارين الآتية:

1. اعرض بواسطة التحليل بأن المستطيل يمكن تقسيمه إلى شكلين من نوع شبه المنحرف ويمتلك كل منها نصف مساحة المستطيل.
2. بواسطة القطع الناتجة عن تجزئة مربع 10×10سم اصنع: (1) مستطيلا، (2) متوازي أضلاع.
3. جزئ الشكل المضلع الاثني عشري Dodecagon والذي يظهر أدناه إلى مربع (اقطع خلال الخطوط المؤشرة).



26 قنينة (زجاجة) كلاين
The Klien Bottle

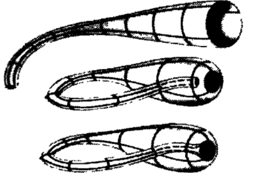
تزود هذه الوحدة الطلبة بنفاذ للبصيرة إلى أعماق أحد الموضوعات الجذابة بميدان الطوبولوجيا Topology وهو موضوع قنينة كلاين. وسوف يصاب الطلبة بالدهشة عندما يرون شكلا مجسما Solid Gigure لا يمكن تمييز داخله من خارجه.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بصنع قنينة كلاين من قطعة ورق مسطحة.
2. سيقوم الطلبة بتحديد خصائص سطح ما بواسطة خصائص طوبولوجية محددة.
3. سيقوم الطلبة بتحديد بيتي Betti للسطوح الطوبولوجية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

قبل عرض كيفية إنشاء الحالات أعلاه، ناقش بصورة مختصرة قنينة كلاين والتي تعد شكلا طوبولوجيا أحادي الضلع. اخترعت قنينة كلاين على يد العالم الرياضي الألماني فيلكس كلاين Felix Klien في عام 1842. وإذا حاولنا مقارنة قنينة كلاين مع شئ واقعي ملموس، فسوف نستخدم جسما مرنا، مثل اسطوانة تحتوي على "ثقب" قطع خلال سطحها. بعدها سنقوم بشد إحدى النهايات للحصول على قاعدة عريضة والنهاية الثانية الضيقة التي تشبه عنق القنينة. ولكن ينبغي علينا أن نأخذ بنهايتي الدائرتين سوية مع أسهمهما التي تعمل باتجاهات معاكسة (انظر الشكل الآتي). تخيل النهاية الضيقة للاسطوانة مطوية إلى أعلى، ومنغمسة خلال الثقب الموجود على الاسطوانة، ومرتبطة بالقاعدة الواسعة كما في الشكل الآتي.

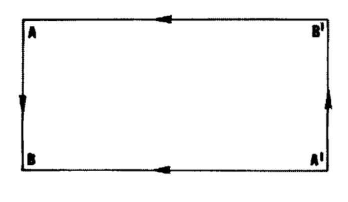


مخطط (1)

ينبغي أن لا يعد الثقب الموجود على سطح الاسطوانة ثقبا تقليديا، ولكنه عبارة عن تقاطع لسطوح مغطاة باستمرارية سطح القنينة.

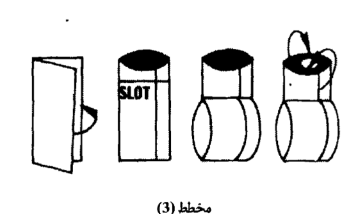
دعنا الآن نعود إلى المسألة الأصلية. يمكن تصور الحالة بسهولة إذا قمنا بمبادلة الجزء الأنبوبي الذي في الغلاف إلى نهايات الاسطوانة، وإحدى الثقوب الذراعية إلى الثقب في الاسطوانة. لقد قمنا الآن بصنع شكل الذي يكافئ طوبولوجيا قنينة كلاين.

متى توفر للطلبة فهم واضح عن الكيفية التي ستبدو بها قنينة كلاين، اعرض لهم كيفية إنشاءها من قطعة ورق. ولغرض إنشاء قنينة كلاين، فإن ما ينبغي علينا فعله بالقطعة الورقية-المسطحة سيشمل، ربط الزوايا المتتالية للحافات AB بـ $A'B'$، كذلك سنعمد إلى ربط الحافتين المتبقيتين AB' بـ $A'B$.



مخطط (2)

في البداية اصنع اسطوانة عن طريق طي الورقة إلى نصفين مع ربط الحافيتين المفتوحين بشقة من شريط. اقطع شقا صغيرا خلال سمك الورقة على مسافة تقربك بحوالي ربع المسافة من القمة. إن هذا سيقابل "الثقب" في سطح الاسطوانة. قم بطي الأنموذج من المنتصف، وادفع النهاية السفلى خلال الشق الصغير. صل بين الحافات كما تؤشر الأسهم في الشكل الآتي. يلاحظ بسهولة إن هذا الأنموذج الورقي يشابه طوبولوجيا قنينة كلاين التي صنعت من الاسطوانة.



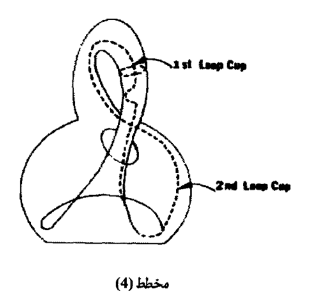
مخطط (3)

وإذا أردنا الآن اختبار قنينة كلاين ومحاولة التمييز الخارج من الداخل، وبالعكس، سنجد من المستحيل إجراء ذلك. ويبدو جليا بأن السطح ذو جانب أحادي، ولا يحوي على حافات، وهي فكرة غير اعتيادية في الأشكال الهندسية.

ونظرا لصعوبة تمييز قنينة كلاين، أو أي سطح آخر حصل تشويه في شكله، فإن من الضروري أن نكون قادرين على تمييز خصائص كل سطح بواسطة خصائص طوبولوجية أكثر بساطة. إن اثنتين من هذه الخصائص تمت الإشارة إليها: عدد الحافات، وعدد الوجوه. لقد وجدت قنينة كلاين بأنها تحتوي على جانب/ وجه واحد ولا تحتوي على أية حافة. إن الخاصية المميزة الثالثة لهذه السطوح هي "عدد بيتي" Betti Number. إن عدد بيتي هو عبارة عن أكبر عدد من القصات المستعرضة Cross cuts (وهو قص بسيط بواسطة المقص والذي يبدأ وينتهي على الحافة) والتي يمكن عملها على سطح دون تقسيمه إلى أكثر من قطعة واحدة. وهذا يعني بأن شكلا قالبه عبارة عن قرص يمتلك عدد بيتي مقداره صفرا، نظرا لأن أي قص مستعرض سيؤدي إلى تقسيمه إلى قطعتين. من جهة أخرى، فإن السطح الجانبي للاسطوانة يمتلك عدد بيتي مقداره واحد.

اطرح سؤالا على الطلبة تستفسر فيه عن سبب صعوبة تحديد عدد بيتي لشكل بقالب الكعكة المحلاة Doughnut أو قنينة كلاين باستخدام طريقة القص المستعرض. إن معظم الطلبة سوف يدركون بأنه في هذه المسألة لا يحوي كل من الشكلين الطوبولوجيين حافات محددة. لذا فإن طريقة بديلة باستخدام "القص الحلقي" Loop-cut (تبدأ من أي نقطة على السطح ثم تعود إليها ثانية دون أن تقطع نفسها، متجنبة الحافة بصورة كلية)، ستوفر طريقة أخرى لتحديد عدد بيتي. عند استخدام القص الحلقي لأغراض احتساب عدد بيتي، فإننا نقوم بإحصاء عدد الحافات فنذهب إلى إن هذا العدد يساوي عدد القصات الحلقية التي نستطيع عملها في السطح دون أن نقطعه إلى قطع تزيد على الحافات. إن شكل الكعكة المحلاة يتطلب قصتين حلقية: الأولى أفقية، والثانية عمودية، وعليه فإن عدد بيتي سيكون 2.

تتطلب قنينة كلاين، أيضاً، قصتان حلقية كما يوضح الشكل الآتي.



مخطط (4)

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقم الطلبة باحتساب عدد بيتي للسطوح الآتية:
   أ- أنبوب.
   ب- أنبوب مثقوب.
   ج- كرة مثقوبة.
2. ليقم الطلبة بتحديد أي الأشكال سوف تصنعها إذا قمت بقص قنينة كلاين في النصف.

27 مسألة الخارطة ذات الألوان الأربعة
The Four Color Map Problem

إن الطوبولوجيا هو فرع من فروع الرياضيات ذو صلة متينة بالهندسة. إن الأشكال التي نوقشت قد تظهر على سطوح المستويات. أو على سطوح ثلاثية الأبعاد -Three Dimensional. يقوم المشتغل بالطوبولوجيا Topologist بدراسة خصائص الشكل التي تبقى بعد تشويهه، أو شده وفقا لمجموعة من القواعد. إن قطعة من خيط، إذا ربطت نهايتيها، يمكن أن تصنع شكل دائرة، أو مربع. وان سبر هذه التحويلات، يظهر بأن ترتيب "النقاط" على طول الخيط لم يعاني أي تغيير. وقد نجم عن ظاهرة الاحتفاظ بالترتيب التشويه الحاصل بالشكل، والذي يعد خاصية مهمة تستأثر باهتمام الطوبولوجيين.

أهداف الأداء Performance Objectives

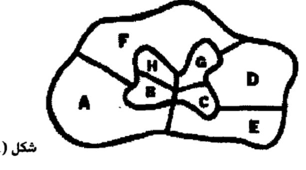
1. سيقوم الطلبة ببيان مسألة الخارطة بالألوان الأربعة.
2. بتقديم خارطة جغرافية على سطح مستوي، سيعمد الطلبة إلى بيان وعرض، بواسطة مثال، إن الألوان الأربعة كافية لتلوين جميع مكونات الخارطة وبنجاح ملموس.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بمعاني الحدود المشتركة والرؤوس المشتركة Common Vertice كما تطبق في الخرائط الجغرافية المعدة على السطوح المستوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابتدئ ببيان إن هذه المسألة قد تم حلها في الفترة الأخيرة، فقط، بتوظيف دعم مركز من الحواسيب المعاصرة. بينما كانت تعد سابقا من إحدى المسائل الرياضية التي لا يتوفر حل لها.



شكل (1)

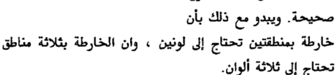
ليقم الطلبة بتحليل هذه الخارطة الجغرافية–الخيالية والتي تصف ثمانية أقطار مختلفة، مع إدراج أسماء جميع الأقطار التي تمتلك حدودا مشتركة مع القطر H، والأقطار التي تشارك برأس مشتركة مع منطقة H. يمكن أن تعد الخارطة ملونة بصورة كلية–وصحيحة عندما يتم تلوين كل قطر بصورة كلية، وان القطرين اللذين يشتركان معه بالحدود يمتلكان ألوان مختلفة عنه. إن القطرين اللذين يشتركان برأس مشتركة قد يشتركان بنفس اللون. إن قيام الطلبة بتلوين عدة خرائط وفقا لقواعد التلوين كما ذكرت أدناه (b ازرق Blue؛ r احمر Red، y اصفر Yellow، g اخضر Green).



شكل (2)

إن هذه الخارطة تتألف من منطقتين وبحدود مشتركة–واحدة، وعليه فهي بحاجة إلى لونين لكي يتم تلوينها بصورة صحيحة.

هذه الخارطة تتألف من ثلاثة مناطق مختلفة، وينبغي على الطلبة أن يستنتجوا بأنها تحتاج إلى ثلاثة ألوان مختلفة لتلوينها بصورة صحيحة. ويبدو مع ذلك بأن خارطة بمنطقتين تحتاج إلى لونين ، وان الخارطة بثلاثة مناطق تحتاج إلى ثلاثة ألوان.



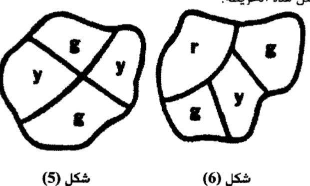
اسأل الطلبة فيما إذا كانوا قادرين على اختراع خارطة تحتوي على ثلاثة أقطار مختلفة، والتي تحتاج إلى اقل من ثلاثة ألوان لغرض تلوينها. كمثال على ذلك انظر شكل 4.

نظرا لأن القطرين الأكثر عمقا، والأكثر بعدا لا يشتركان بحدود مشتركة بينهما، يمكن أن يتشاركا باللون الأحمر، مع احتفاظهما بهويتهما المنفصلة.



شكل (4)

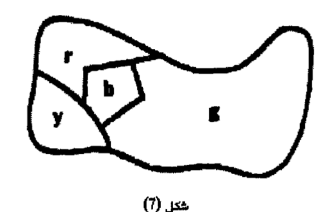
ويبدو من المنطقي الخروج باستنتاج يؤكد بأنه في حالة تلوين خارطة لثلاثة أقطار بأقل من ثلاثة ألوان، فإن خارطة لأربعة مناطق يمكن أن تلون بأقل من أربعة ألوان. ليقم الطلبة بإنشاء متل هذه الخريطة.



شكل (6) شكل (5)

يحوي شكل 5 على أربعة مناطق، ويفتقر في تلوينه الصحيح إلى لونين فقط. ويحوي الشكل 6 على أربعة مناطق، أيضاً، ويحتاج إلى ثلاثة ألوان فقط لتلوينه بصورة صحيحة.

حاول أن تتحدى الطلبة باختراع خريطة تتألف من أربعة أقطار وتحتاج إلى أربعة ألوان، بالضبط، للتلوين الصحيح. قبل القيام بمثل هذه المهمة ينبغي على الطلبة أن يدركوا الآن بأن هذه الخارطة تدعو إلى أن يشترك كل قطر من أقطارها الأربعة بحدود مشتركة مع الأقطار الثلاثة الأخرى. يعد الشكل 7 مثالا واضحا على هذه الخارطة.



شكل (7)

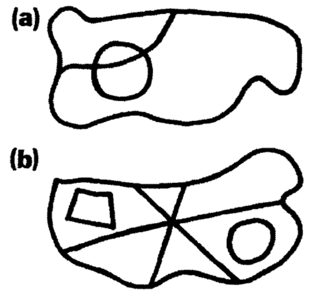
ليقم الطلبة بالخطوة المنطقية التالية في سلسلة مسائل تلوين الخرائط. وينبغي أن يصلوا إلى فكرة تلوين خرائط تتضمن خمسة مناطق مختلفة. كما سيكون من الممكن رسم خرائط تحوي خمسة مناطق وتتطلب : لونان، أو ثلاثة ألوان، أو أربعة ألوان لكي يتم تلوينها بصورة صحيحة. إن رسم خارطة تحوي خمسة مناطق ويمكن تلوينها بصورة صحيحة بواسطة خمسة ألوان هي مهمة مستحيلة. إن هذا الفضول العلمي يمكن أن يعمم من خلال تحريات إضافية، ويمكن للطلبة أن يتوصلوا إلى الفكرة التي تنص على أن أية خريطة على سطح مستو، وبأي عدد من المناطق، يمكن أن تلون بنجاح بأربعة ألوان، أو بألوان اقل.

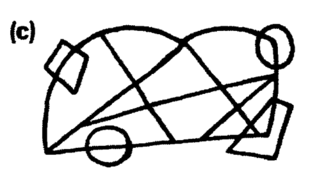
قد يكون اشد إقناعا التوجه صوب عرض المسألة كتحد مباشر بالصيغة الآتية: "هل تستطيع رسم خارطة جغرافية، على سطح مستوي، بأي عدد من المناطق، والتي تحتاج إلى خمسة ألوان لكي يتم تلوينها بصورة صحيحة؟".

إن هذه هي قضية مسألة الألوان الأربعة. ويجب أن نلاحظ بأنه في حين كانت مسائل العصور السابقة-الثلاثة المشهورة قد برهن على كونها مستحيلة في سنين خلت، فإن هذه المسألة قد تم حلها في السنين الأخيرة.

التقييم اللاحق Postassessment

1. في فقرة، استخدام الأشكال، صف ماذا يقصد بموضوع مسألة الألوان الأربعة في الطوبولوجي.
2. باستخدام الألوان: الأخضر/g، الأحمر/r، الأزرق/b، والأصفر/y اعرض بأن من الممكن تلوين كل من الخرائط الآتية، بصورة صحيحة، بأربعة ألوان، أو بعدد ألوان اقل.





3. ارسم خريطة تحتوي على عدد غير محدود من المناطق ولكنها تحتاج إلى لونين فقط للتلوين الصحيح.

مرجع Reference

Apple, K. and Haken, CN. "The Solution of The Four-Color-Map Problem". Scientific American 237, No. 4 (December 1977): 108-21.

28 رياضيات عن دراجة
Mathematics on a Bicycle

مع جملة التغييرات الحاصلة في دولاب التروس Gears على الدراجة التقليدية ذات السرع العشرة، يوجد أمامنا الكثير من التطبيقات الرياضية. وستسهم هذه التطبيقات في مساعدة الطلبة على فهم دراجاتهم، بينما تسهم في نفس الوقت بتقوية وتعميق فهمهم الرياضي.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء عدد الأسنان (أو ضرس العجلة المسننة Sprockets) في العجلتين المسننتين الأمامية والخلفية، وقطر العجلة، سيجد الطلبة نسب دولاب التروس والمسافة المقطوعة في كل حركة تدوير دواستي الدراجة Pedals (سيتم تطوير مفردات لغوية Vocabulary جديدة).
2. سيكون الطلبة قادرين على توضيح أهمية الدرجة Pitch.

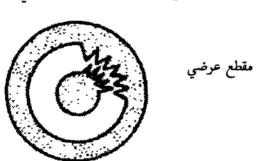
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يمتلك الطلبة المهارات الأساسية في مادة الجبر، وان يكونوا قد ألفوا استخدام الدراجات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

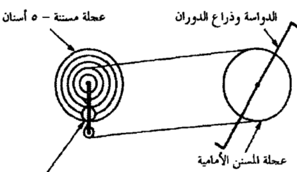
إن دراجات البالغين، والتي سنعالجها في هذه الوحدة، تحتوي على عجلتين، سلكي كابح Brake Cables أمامية وخلفية. ودولاب بثلاث، أو خمس، أو عشرة تروس، والتي تصنع من مادة الفولاذ Steel بسبائكه المختلفة.

دعنا نختبر، في البداية، الفروق في التروس بين الدراجات ذات سرعة 3 أو 10، وبالخصوص آلية عمل الدراجة ذات العشرة سرع. بالنسبة للدراجة ذات الثلاث سرع فإن آلية التروس تستقر في محور العجلة الخلفي Hub (أو محور الدولاب Axle). انها عبارة عن تقنية القابض مع مجموعة قطع، تتعشق داخل محور العجلة الخلفي. والتي تحكمها قيود Constraints بحيث لا يمكن وجود أي نسبة أكبر من القطر الداخلي للمحور الخلفي.



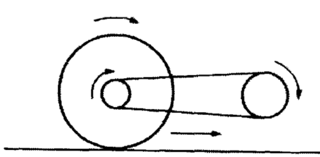
في الدراجة ذات السرع العشرة، تحتوي العجلة الخلفية على خمسة عجلات مسننة يطلق عليها العنقود Cluster، بحيث تكون أكبر عجلة مسننة أكثر قربا من أشعة الدواليب، ثم تأتي العجلات المسننة الأصغر منها واحدة تلو الأخرى، فيقل حجمها بالتدريج.

إن التعشيق (أي، ارتباط العجلات المسننة بواسطة السلسلة) سيتم عن طريق حركة السلسلة من سن إلى آخر بواسطة آلية حركة السلسلة من عجلة مسننة إلى أخرى Derailluer. دعنا نختبر التنصيب عن قرب:



يوجد هناك عجلة مسننة أمامية وخلفية مع أسنان. إن أعداد الأسنان على العجلتين المسننة الأمامية والخلفية تمتاز بأهمية بالغة.

افترض بأن العجلة المسننة الأمامية تحتوي على 40 سنا، بينما تحتوي العجلة المسننة الخلفية على 20 سنا، ستكون النسبة 20/40 أو 2. وهذا يعني بأن العجلة المسننة الخلفية تدور مرتين كلما تدور العجلة المسننة الأمامية مرة واحدة. لكن العجلة المسننة الخلفية مرتبطة بالعجلة الخلفية للدراجة، وان انتقال الطاقة يحصل أيضاً بالاعتماد على مقدار قطر العجلة. في حالة الدراجة ذات السرع العشرة فإن قطر العجلة (متضمنا الأنبوب الإطار Tire) هو 27 بوصة. إن هذا الترتيب قد عرض أدناه.



إن العلاقة (عندما تؤخذ عجلة الدراجة بعين الاعتبار) هي: نسبة دولاب التروس = النسبة × القطر = 1/2 = 27 = "27 = 54.

إن الرقم الناتج هنا يكون غالبا بين 36 و 108، ويعطي مقارنة واضحة بين دواليب التروس، كما يسهم بفائدة ملموسة في إقامة علاقة بين نسب دولاب التروس والشغل المنجز.

على سبيل المثال، فإن سائق دراجة يستخدم عجلة مسننة تحوي 46 سنا في المقدمة، وعجلة بـ 16 سن في المؤخرة مع عجلة الدراجة بقطر "27 سوف يحصل على نسبة مقدارها 77.625 ≈ 78. وهناك سائق دراجة أخرى تستخدم عجلة مسننة أمامية بـ 50 سنا، وعجلة مسننة خلفية بـ 16 سنا سوف يحصل على نسبة العجلة المسننة مقدارها 84 ≈ 84.375، والتي سوف تشكل صعوبة أكبر بالنسبة لدواسة الدراجة مقارنة مع نسبة العجلة المسننة السابقة، والتي بلغت 78.

بماذا تفيد الصعوبة الإضافية سائق الدراجة بالضغط على دواسة العجلة؟ إذا قام أحدنا بضرب نسبة العجلة المسننة التي حصلنا عليها من الصيغة السابقة بالثابت π، فسنحصل على المسافة المقطوعة – إلى أمام – في كل دورة من دورات دواسة القدم. وينبغي أن يعاود الطلبة تذكر إن المحيط = π × القطر.

على سبيل المثال، سائق الدراجة بنسبة العجلة المسننة 78 يتقدم تقريبا 245 بوصة إلى أمام خلال كل دورة من دورات الدواسة، بينما يتقدم سائق الدراجة ذات نسبة العجلة المسننة 84 إلى أمام مسافة 264 بوصة خلال كل دورة من دورات الدواسة. وعليه، فإن الزيادة في الشغل (زيادة الصعوبة في عملية دوران الدواسة) تنعكس بزيادة المسافة المقطوعة لكل دورة من دوراتها. والآن دعنا نمتحن تطبيقات متعددة بنسب مختلفة للعجلة المسننة بالنسبة لراكب الدراجة التقليدي.

افترض إن السيد كارتر Carter كان يقود دراجته براحة تامة على طريق مستوي وبنسبة 78 للعجلة المسننة، ثم اعترضه تل مرتفع. ماذا عليه أن يفعل؟ هل يتحول إلى نسبة للعجلة المسننة أعلى أم اقل؟

ينبغي أن يسترشد استدلالك العقلي بما يأتي: إذا انتقل السيد كارتر إلى نسبة 84، فإنه سيتقدم مسافة 264 بوصة إلى أمام كلما قام بتدوير الدواسة دورة كاملة. وهذا الأمر يتطلب مقدارا محددا من الشغل – للتغلب على تأثيرات الجاذبية عند الصعود على سفح التل ويتطلب بذل المزيد من الطاقة والشغل. وعليه فإن السيد كارتر سوف يلجأ إلى إيقاف عجلته دون تردد. أما إذا قام السيد كارتر بالانتقال إلى نسبة اقل فإنه سيستخدم طاقة أدنى لإدارة دواسة القدمين، وان الطاقة الإضافية المطلوبة لتسلق التل سوف تجعل عملية دوران العجلة المسننة تشابه نسبة 78 إلى حد كبير. لذا فإن الجواب سيكون: الانتقال إلى قيمة اقل لنسبة العجلة المسننة.

وينبغي على السيد "كارتر" أن يدير دواسة القدم بدورات أكثر لتسلق التل إذا اختار نسبة العجلة المسننة 84، واكثر إذا استمر باستخدام نسبة 78.

تذكر، بأن عملية دوران العجلة تبدو مشابهة لـ 78 بسبب طبيعة تضاريس التل. إن هذه هي "الموازنة بين العوامل المختلفة Trade-off" التي قام بها السيد كارتر: دوران أكثر بعزم تدوير ثابت (قوة زاوية) بدلا من نفس عدد الدورات للمسافة المطلوبة مع بذل عزم متغير.

يمكن فهم هذه الموازنة الحكيمة بين العوامل المختلفة عن طريق مقارنة الجسم البشري بالآلة. إن الآلة تعمل بكفاءة أداء افضل عندما تشتغل بعزم تدوير ثابت بالمقارنة مع عملها بعزم تدوير متغير. وتعوض بتغيير نسبة العجلة المسننة مع تغيير السرعة وعدد الدورات بالدقيقة.

إن وصفا أكثر دقة قد عرض أدناه. حيث تستخدم سيارة العجلات المسننة للتغلب على الاحتكاك الثابت Static Friction والتعجيل للوصول إلى سرعة التشغيل بينما تجهز عزم تدوير ثابت. أو عزما يقل عن الحمل الزائد Overload إلى الآلة. إن هذه الآلية لا تشابه مسألة الدراجة لأن الآلة البشرية تستطيع التغلب على زيادة عزم التدوير، لفترة قصيرة، لتسريع حركة الدراجة. وعندما تكون الدراجة بحالة حركة، فإن القوة الوحيدة — المطلوبة لدوام حركتها بسرعة ثابتة، على ارض مستوية، هي تلك التي تسهم بالتغلب على الاحتكاك الداخلي ومقاومة الرياح. إن هذه الحالة تشابه تماما ما يحصل في السيارة وآلتها التي تدور. إذا رغب راكب الدراجة زيادة تعجيل دراجته بسرعة، فقد يلجأ إلى تدوير دواستي القدمين بأكبر سرعة دورانية ممكنة. إن جميع الآلات (بضمنها الآلة البشرية) تمتلك قابلية مثلى لعزم التدوير لمثل هذه الحالة. وهناك أمران يمكن حدوثهما بحيث يحولان دون وصول الماكنة إلى السرعة القصوى المتاحة. الأول، إذا كان عزم التدوير كبيرا جدا، فإنه سيحول دون إمكانية التدوير السريع. إن هذه الحالة تناظر ما يحصل في السيارة عند الدرجة الثالثة للعجلة المسننة Third Gear عندما تحاول الاجتياز دون تقليل الحركة "Down shift". فلا تمتلك الآلة قدرة كافية لتوفير تعجيل سريع، وتقتصر على زيادة بطيئة في التعجيل. ويصح نفس الأمر بالنسبة لراكب الدراجة الذي يحاول التعجيل بسرعة في "الدراجة الصعبة للعجلة المسننة Harder Gear"، لأنه سيكون مقتصرا إلى الطاقة اللازمة لذلك. والثاني هو يدير إلى الخارج"Spinout"، ويناظر هذا الأمر ما يحصل للسيارة عندما تصل سرعتها إلى 30 ميل بالساعة عند الدرجة الأولى للعجلة المسننة. ولا يمكن أن تزداد سرعتها بالرغم من وجود قدرة كافية لزيادة السرعة. وهذا الأمر يناظر راكب العجلة الذي يدير دواستي القدم بأقصى سرعة ممكنة ولكن دون القدرة القصوى.

إذا وصل راكب العجلة إلى أقصى دوران عند أقصى عزم للتدوير. فإنه سيتمكن من الوصول إلى السرعة القصوى.

في هذه النقطة قد ترغب بأن يباشر طلبتك بأنفسهم بعض التطبيقات.

أنموذج مسألة Model Problem: يستطيع السيد "بانستر" Bannister إدارة العجلة 100 دورة بالدقيقة عند نسبة 68 للعجلة المسننة، أو بنسبة 78 وبسرعة 84 دورة بالدقيقة. للحصول على أقصى سرعة ماذا ينبغي على السيد "بانستر" اختياره؟ (هذه الاختيارات الحقيقية التي يستخدمها راكب العجلة في تحديد أي عجلة مسننة يستخدم خلال السباق النهائي).

افترض إن هذه السرع ثابتة خلال مدة السباق.

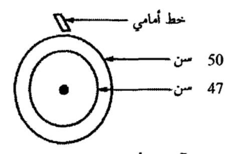
الحل Solution: إن ضرب نسبة العجلة المسننة 68 بالنسبة الثابتة $\pi = 214$ بوصة لكل دورة (تقريبيا). فإذا كان السيد بانستر يدير الدواسة بسرعة 100 دورة بالدقيقة، فإنه سيسافر بسرعة 21,400 بوصة/دقيقة، أو 20.27 ميل/ساعة.

إن نسبة العجلة المسننة 72 مضروبة بالنسبة الثابتة $\pi = 226$ بوصة لكل دورة (تقريبا) وعند سرعة 84 دورة بالدقيقة سوف تنتج سرعة مقدارها 18,984 بوصة/دقيقة أو 17.98 ميلا بالساعة. وعليه فإن من الأفضل للسيد "بانستر" أن يتسابق بنسبة العجلة المسننة التي تساوي 68.

كما ذكر سابقا، فإن على المتسابقين أن يولوا اهتماما خاصا بفقرتي أداء الدوران، وعزم التدوير. وسوف يختار المتسابق بعناية عنقود العجلة المسننة الخلفية اعتمادا على طبيعة الطريق.

إن طريقا منبسطا يستلزم معدل أسنان 13-18 في عنقود العجلة المسننة الخلفية مع 47 سنا للعجلة المسننة الأمامية الداخلية و 50 سنا للعجلة المسننة الأمامية الخارجية.

وهذا هو مورد السرع العشرة. فعندما تكون السلسلة على العجلة المسننة ذات الـ 47 سنا، تتوفر خمسة نسب مختلفة للعجلة المسننة. وعندما تتحرك السلسلة من عجلة مسننة إلى أخرى، على وعبر العجلات المسننة ذات الـ 50 سنا، هناك أيضاً خمسة نسب مختلفة للعجلة المسننة.



هناك اعتبار آخر سيأخذه المتسابق بالحسبان عند اختيار عجلاته المسننة هو القصور الذاتي Inertia. وسوف تلاحظ بأن عجلة 54 المسننة الأمامية والعجلة المسننة 18 الخلفية تعطي نفس نسبة العجلة المسننة كما هو الحال مع العجلة المسننة ذات 48 سنا الأمامية، والعجلة المسننة الخلفية ذات الـ 16 سنا، أي 16/48 = 3. وسوف يختار راكب الدراجة 16/48 لأن الشغل

يستهلك دون الرجوع إلى التعجيل من خلال التعجيل الزاوي لعجلة مسننة ذات نصف قطر أكبر بدلا من عجلة مسننة ذات نصف قطر اصغر بسبب اعتبارات القصور الذاتي. ونظرا لكون العجلة المسننة ذات نصف القطر ″10 هي الأصغر في قائمة الاختيارات للحصول على أكبر قوى للقص Shear Forces، فإن العجلة المسننة ذات الـ 34 سنا اصغر ما يتوفر. ونحن نستخدم حاليا درجة مقاس ½ Pitch (المسافة بين الأسنان)، فإن تحسيننا بدرجة مقاس تزيد على ″1 سوف يؤدي إلى زيادة عدد النسب دون أن يدع فرصة أمام العجلات المسننة لكي تزداد أقطارها. إن العجلة المسننة التي قد احسن تصنيعها سوف تبدو مشابهة للشكل الآتي، حيث تم التخلص من معظم المادة غير الضرورية.



القصور الذاتي= (X M مربع المسافة من محور الدوران). وكلما صغرت المسافة، تناقصت قيمة القصور الذاتي إلى حدودها الدنيا.

وعليه فعند اختيار دراجة بعشرة سرع تذكر على الدوام بأن أي فرق في الثمن يذهب بالتفكير صوب وجود فرق في: التصميم، والأداء، والشغل المطلوب لعملية السياقة.

وكمثال نهائي فإن كثير من الدرجات زهيدة الثمن تحتوي على 6 − 8 سرع بسبب المضاعفة Duplication. تأمل مثالنا السابق حول القصور الذاتي، عندما كان الاختيار بين 48 سنا و 54 سنا في العجلة المسننة الأمامية. لقد رأينا استنساخ نفس نسبة العجلة المسننة بعجلة مسننة خلفية 16 و 18. إن هذه الحالة تحدث في كثير من العجلات الأقل ثمنا.

التقييم اللاحق Postassessment

1. وصلت "ليزا" Lisa إلى تل يزيد على أي نسبة للعجلة المسننة لديها بـ 10. لا تستطيع ليزا أن تستخدم دواسة القدم بنسبة تزيد على نسبة 62 للعجلة المسننة. فإذا امتلكت دراجتها ذات السرع الثلاث نسب 48، 58، 78 للعجلة المسننة، أي من هذه النسب عليها اختيارها؟
2. ما هو مقدار التقدم الذي يصاحب كل دورة لدواستي القدم وبنسبة للعجلة المسننة مقدارها 78 بحيث يحرك دراجة قطر عجلتها ″27؟
3. يستطيع "جورج" George الحصول على سرعة دوران مقدارها 80 دورة بالدقيقة عند نسبة العجلة المسننة 72، و 48 دورة بالدقيقة عند نسبة 96. أيهما يوفر سرعة أكبر؟

29 الرياضيات والموسيقي
Mathematics and Music

إن الطلبة الذين يلمون بعمليات الكسور مع معرفة محدودة بنظرية الموسيقى سيتلمسون الرابطة الموجودة بين هذين الحقلين.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيظهر الطلبة معرفة بصيغ محددة تربط بين درجة النغمة الموسيقية note وخصائص الوتر أو عمود الهواء.
2. سيتعلم الطلبة كيفية إنشاء مقياس فيثاغورث الدياتوني Pythagoras Diatonic Scale.
3. سيعرض الطلبة كيف برهن اقليدس Euclid بأن الاوكتاف Octave هو اقل من ستة نغمات تامة.

التقييم السابق Preassessment

احصل على آلة وترية Stringed Instrument مثل: البيانو أو الفايولين (الكمان)، أو القيثارة. وإذا لم تتوفر هذه الآلات يمكن لقسم العلوم أن يزودك بمقياس صوت أحادي الوتر Sonometer، وهو عبارة عن آلة علمية تحتوي على أوتار تستخدم في التجارب.

قم بأداء العروض الثلاثة الآتية. وليقم الطلبة، في كل حالة، بتحديد هل أصبحت النغمة أعلى أم اقل.

1. امسك بوتر من الأوتار، وقم بشد الوتر، ثم عاود الإمساك بالوتر ثانية.

2 امسك بوتر من الأوتار، ثم اضغط نحو الأسفل على منتصف الوتر (تمويج Fretting) والذي سوف يؤدي إلى تذبذب نصف الوتر فقط.

3 باستخدام وترين يختلفان في أقطارهما (السمك Thickness) قم بإمساك كل منهما.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استنبط من الطلبة الحقائق الثلاثة الآتية:

1 كلما زاد الشد Tension، تصبح النغمة أكثر ارتفاعا.

2 كلما قل الطول، تصبح النعمة أكثر ارتفاعا.

3 كلما قل القطر، تصبح النغمة أكثر ارتفاعا.

عند هذه النقطة اعمد إلى توضيح بأن جميع ما ذكر أعلاه مؤسس في الصيغ الرياضية. ولكن هذه الصيغ تستخدم التردد Frequency، وهي عبارة عن عدد ذبذبات الوتر في كل ثانية، بدلا من النغمة. ونظرا لأن درجة النغمة تزداد بازدياد التردد، فإنها لن تؤدي إلى تغيير الصيغ. وهذه الصيغ هي:

$$\frac{F_1^2}{F_2^2}=\frac{T_1}{T^2};\frac{F_1}{F_2}=\frac{L_1}{L_2};\frac{F_1}{F_2}=\sqrt{\frac{D_2}{D_1}}$$

(الأوتار من نفس النوع) (الشد ثابت) (الطول والشد ثابتان)

حيث:

التردد = F

الشد = T

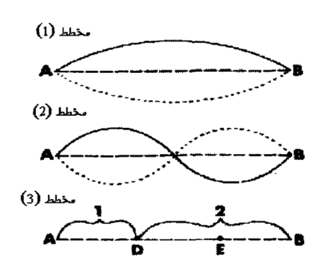
قطر الوتر = D

ليحاول الطلبة العمل على أمثلة رقمية: هناك وتر طوله 20 بوصة يتذبذب بتردد مقداره 400 VPS (ذبذبة لكل ثانية Vibration per Second) وهناك وتر آخر من نفس النوع تم الإمساك به بنفس الأسلوب (يتساوى الشد مع الحالة الأولى). فإذا كان تردده 800 VPS، فما هو مقدار طوله؟.

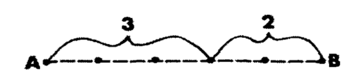
ليقم الطلبة بحل المعادلة $\frac{400}{800}=\frac{L_2}{20}$، نستنتج بأن طول الوتر الثاني هو 10 بوصات. إن مثالا آخر قد يعالج موضوع التأثير على الشد إذا تضاعف تذبذب الوتر. استنبط بأن الشد سوف يصبح أربعة أضعاف $\left(\frac{1^2}{2_2}=\frac{1}{4}\right)$.

إن الموسيقى والرياضيات يرتبطان أيضاً بإنشاء المقياس. إن فيثاغورث، الذي اصبح مألوفاً لدى الطلبة نتيجة لجهوده الطيبة على المثلث قائم الزاوية، قام بصناعة مقياس يقوم بتوليد معزوفات جميلة، ولكن يحدد ارتباطات النغمات الممكنة واستخدام التوافق (التناغم).

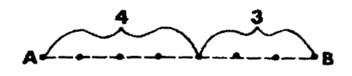
شعر فيثاغورث بأن هذه النغمات، والتي كانت سارة بالخصوص، أو منسجمة الأصوات Consonant، كانت ذات صلة بالأعداد 1، 2، 3 و 4. اخذ فيثاغورث مجموعة من الأوتار متساوية الأطوال، ويدع النغمة C بوصفها نغمة أساسية. إذا استخدم مقياس صوت أحادي الوتر، يستطيع أن يعرض المعلم مبادئ العمل الذي قام به فيثاغورث. إن هذا يعني بأن الوتر يتذبذب بصورة تامة (انظر شكل 1). للحصول على النغمة C باوكتاف أعلى، ينبغي أن يتذبذب الوتر بجزئين (يعني، يمتلك ضعف التردد) (انظر شكل 2). يمكن للمرء أن ينجز نفس الأمر بتقسيم الوتر إلى قسمين بنسبة 1:2 (انظر شكل 3).



في شكل 3، إن ذبذبة $\overline{AD}$ و $\overline{DB}$ بصورة مستقلة سوف يمتلك نفس التأثير لإنتاج نغمتين بتعد بمقدار اوكتاف. وعليه، إذا كانت C تناظر العدد 1، فإن C باوكتاف أعلى سوف تناظر العدد $\frac{2}{1}$ أو 2. أضاف فيثاغورث، أيضاً، النغمتين F و G واللتان تناظران $\frac{4}{3}$ و $\frac{3}{2}$ على التوالي. اطرح سؤالا على الطلبة حول كيفية تقسيم الوتر بنسبة 2:3. استنبط بأن الوتر يمكن أن يقسم إلى خمسة أقسام للحصول على النتيجة.



إن هذا هو أحد الأسباب التي تبرر إطلاق اصطلاح الخمسي التام Perfect Fifth على النغمة. للحصول على نغمة تناظر $\frac{4}{3}$ ينبغي تقسيم الوتر إلى سبعة أجزاء كما يأتي.



ومع ذلك، فإن هذه النغمة يطلق عليها رابعة بدلا من سابعة.

أضاف فيثاغورث إلى مقياسه $\frac{3}{2}$ G أو $\frac{3}{2}$ • $\frac{3}{2}C = \frac{9}{4}C$.

ونظرا لكون C = 1 فإن الاوكتاف C = 2، $\frac{9}{4}C = 2\frac{1}{4}C$ لن ينطبق بين النغمتين.

حاول أن تتحدى الطلبة بإيجاد نغمة تشابه "جوهريا Basically" وتنطبق بين C "واوكتافها". دعهم يستذكرون بأن عملية مضاعفة أو تنصيف الذبذبة تغير النغمة باوكتاف واحد فقط. وعليه، بدلا من $\frac{9}{4}$، استخدم فيثاغورث $\frac{1}{2}$ مقدار $\frac{9}{4}$ أو $\frac{9}{8}$.

بإضافة التناغم الثالث لكل نغمة تالية (يعني، الضرب بواسطة $\frac{3}{2}$)، سيكون الطلبة قادرين على الحصول على النغمات التي تكون الترددات ذات الصلة بها: 1، $\frac{3}{2}$، $\frac{9}{8}$، $\frac{27}{16}$، $\frac{81}{64}$، $\frac{243}{128}$. لا ريب بأن بعض "التنصيف Halving" الإضافي قد اجري عند ظهور الحاجة إليه، كما هي الحالة مع $\frac{9}{8}$ مقياس فيثاغورث الدليتروني، والذي يمكن الحصول عليه.

	C	D	E	F	G	A	B	C
الترددات ذات الصلة	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

إن G التي تحتل الموقع الخامس، تعد الخمسي المثالي. إن هذا يحصل حيثما تكون نسبة الخامس إلى الأول تساوي $\frac{3}{2}$. ينبغي التركيز خلال المناقشة على حقيقة إن الترددات تكون متناسبة إلى أطوالها بنفس النسبة.

دع يدرسون المقياس بصيغته الجديدة، حاول أن تستنبط وجود نسبة ثابتة مقدارها $\frac{9}{8}$ بين النغمات (باستثناء تلك التي بين E و F وكذلك بين B و C حيث تكون النسبة $\frac{256}{243}$).

ينبغي أن ننتبه إلى أن $\frac{9}{8}$ تناظر نغمة تامة (W) بينما تسمى البقية "نصف نغمة Semitone (S)". وعليه فإن النمط الذي تم الحصول عليه هو كما يأتي:

C	D	E	F	G	A	B	C
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2
V	V	V	V	V	V		V
W	W	S	W	W	W		S

إن هذا يدعى المقياس الرئيسي Major Scale.

ولكن، هناك بعض الصعوبات مع التناغم Harmony. عندما يصدر المرء نغمة على آلة موسيقية فإنها لا تتذبذب في جزء يؤلف النغمة الأساسية فحسب، ولكنها تنشئ أيضاً في جزء منها نغمات يطلق عليها "نغمات إضافية Overtones". إن النغمات الإضافية لها تردد يتألف من المضاعفات 2، 3، 4، 5 مضروبة بالتردد الأساسي. إن النغمة الإضافية الخمسية تناظر 5 أو $\frac{5}{4}$ إذا كانت ستستقر بين 1 و 2 (تذكر التنصيف المستمر Continuous Halving مثل $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$ ينشئ نغمات متشابهة).

إن اقرب نغمة على مقياس فيثاغورث هو E والذي يبلغ تردده $\frac{81}{64}$. عندما تعزف C ثم تتلوها E فإن الإذن تتوقع سماع نفس E بوصفها نغمة إضافية للـ C. ولكن، بالنسبة للفرد فإن E الفيثاغورسية تعد مصدرا مقلقا. إن سبب الإقلاق يعود إلى الحقيقة القائلة أن تضمن اثنان من الـ E يمتلك اختلافا يسيرا في الترددات، الأولى ستكون $\frac{81}{64}$ والأخرى $\frac{5}{4}$ أو $\frac{80}{64}$.

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا كان الشد ثابتا، وقد زيد الطول، كيف ستتأثر درجة نغم الوتر؟
2. كيف يؤثر شد الوتر على درجة النغم؟
3. افترض أن C تناظر $\frac{4}{5}$ بدلا من 1 في مقياس فيثاغورث. جد الترددات ذات الصلة بالنغمات الـ 8 التالية لهذا المقياس الرئيسي.

30 الرياضيات في الطبيعة

Mathematics in Nature

هدف الأداء Performance Objective

سيتمكن الطلبة من تمييز وتوضيح أين توجد الرياضيات بالطبيعة وفي حالة واحدة كحد أدنى.

التقييم السابق Preassessment

إن تعاقبا (سلسلة) مشهورا للأعداد (أعداد فايبوناشي The Fibonacci Numbars) كان النتيجة المباشرة لمسألة طرحها ليوناردو Leonardo من مدينة بيتزا Pisa في كتابه Liber Abaci (1202) بخصوص تكاثر الأرانب. إن استعراضا مختصرا لهذه المسألة يوضح بأن العدد الكلي لأزواج الأرانب التي تولد كل شهر تحدد التعاقب: 1، 1، 2، 3، 5، 8، 13، 21، 34، 55، 89 ....

تمتلك أعداد فايبوناشي جملة من الخصائص الممتعة، وقد ظهر بأنها موجودة في الطبيعة.

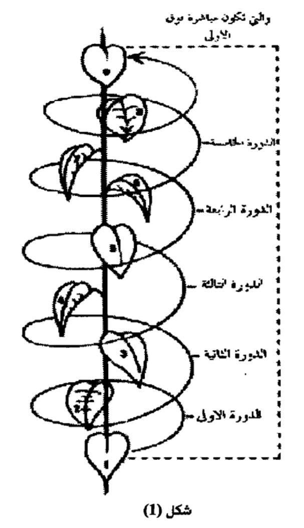
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم الطلبة بتقسيم كل عدد في سلسلة فايبوناشي على شريكه من الجهة اليمنى لكي يروا نوع التعاقب الجديد الذي سينشأ عن ذلك. سوف يحصلون على سلسلة من الكسور:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89} \ldots$$

اسأل الطلبة إذا كانوا قادرين على إيجاد علاقة بين هذه الأعداد، وأوراق النبات (ليكن هناك نبات بين يديك). من خلال منظور أعداد فايبوناشي، يستطيع المرء أن يلاحظ فقرتين: (أ) إن عدد الأوراق عند المضي قدما (وبالدوران حول الساق) من أي ورقة نحو التي تليها كائنة بنفس المحل (2) أن عدد الدورات عندما يتبع المرء الأوراق بالذهاب من ورقة إلى أخرى كائنة بنفس المحل أيضاً. في كلا الحالتين، فإن هذين العددين ينقلبان في النهاية لكي يصبحا من أعداد فابيوناشي.

في حالة ترتيب أوراق النبات، فقد استخدم الرمز الآتي: $\frac{3}{8}$ والذي يعني استغراقها ثلاثة دورات وثمانية أوراق للوصول إلى الورقة الكائنة بنفس المحل. بصورة عامة، إذا افترضنا r تساوي عدد الدورات، و s عدد الأوراق للوصول من أي ورقة معطاة إلى موقع مماثل ، فإن $\frac{r}{s}$ تمثل Phyllotaxis (ترتيب الأوراق في النبات). ليلق الطلبة نظرة فاحصة على شكل 1 ويحاولون إيجاد نسبة النبات Plant Ratio. ارسم شكلا توضيحيا على اللوحة، وحاول أن توفر نباتا حيا، إذا كان الأمر ممكنا.



شكل (1)

في هذا الشكل، إن نسبة النبات هي $\frac{5}{8}$.

إن كوز الأناناس Pine Cone يمثل تطبيقا من تطبيقات أعداد فايبوناشي. إن القنابات Bracts الموجودة على الكوز تعد أوراقا محورة انضغطت إلى مساحة اصغر. عند إمعان النظر في الكوز، يستطيع المرء أن يلاحظ حلزونين Spirals، أحدهما على اليسار (باتجاه عقارب الساعة) والثاني على اليمين (عكس اتجاه عقارب الساعة) أن إحدى الحلزونين يزداد بزاوية حادة، بينما يزداد الحلزون الثاني بالتدريج.

ليتأمل الطلبة الحلزونات – شديدة الانحدار ويباشروا بإحصائها بالإضافة إلى الحلزونات التي تزداد بالتدريج. ينبغي أن تكون الأعداد من نوع أعداد فايبوناشي. على سبيل المثال، يحتوي كوز الصنوبر الابيض على خمسة حلزونات باتجاه عقارب الساعة، وثمانية بعكس اتجاه عقارب الساعة. وقد تحتوي ثمار الاناناس الأخرى علي قيم متفاوتة لنسب فايبوناشي.

بعد ذلك، ليقم الطلبة باختبار زهرة الربيع Daisy ليروا مواطن انطباق نسب فايبوناشي عليها.

إذا نظرنا بامعان إلى نسب اعداد فايبوناشي المتعاقبة، نستطيع تقريب الأعداد العشرية المكافئة لها. ان بعضا منها سيكون:

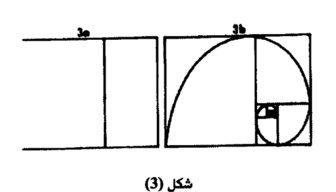
$$(1)\ \frac{2}{3} = .666667 \quad (2)\ \frac{3}{5} = .600000$$
$$(3)\ \frac{89}{144} = .681056 \quad (4)\ \frac{144}{233} = .618026$$

بالاستمرار على هذا المنوال، سنصل إلى ما يعرف "بالنسبة الذهبية Golden Ratio". إن النقطة B في شكل 2 تقسم المستقيم $\overline{AX}$ إلى النسبة الذهبية، $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AX} \approx 0.618034$.

A B C

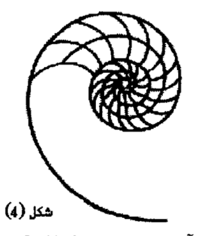
شكل 2

والآن تأمل سلسلة من المستطيلات الذهبية (الشكل 3a و 3b)، والتي قد اختيرت أبعادها بحيث أن نسبة العرض\الطول تمثل نسبة ذهبية (بمعنى، $\frac{w}{1} = \frac{1}{w+1}$).



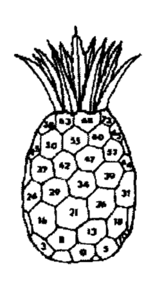
شكل (3)

إذا قسم المستطيل (شكل 3a) بمستقيم إلى مربع ومستطيل ذهبي، وإذا استبقينا تقسيم كل مستطيل ذهبي، بنفس الطريقة، تستطيع إنشاء "حلزون لوغاريتمي Logarithmic Spiral" في المستطيلات المتتابعة (شكل 3b). إن هذا النوع من المنحنيات يكثر العثور عليه في انساق البذور بالأزهار، والأصداف البحرية، والقواقع. اجلب رسوما توضيحية لعرض هذه الحلزونات (شكل 4).



شكل (4)

كمثال آخر على الرياضيات في الطبيعة، ينبغي أن يتأمل الطلبة ثمرة الأناناس Pineapple. يلاحظ فيها وجود ثلاثة حلزونات مميزة من الأشكال السداسية: مجموعة من خمسة حلزونات تلتف تدريجيا في اتجاه واحد، ومجموعة ثانية من 13 حلزونا تلتف بانحدار كبير وبنفس الاتجاه، وأخيرا مجموعة ثالثة تتألف من ثمانية حلزونات تلتف باتجاه معاكس. تتألف كل مجموعة من الحلزونات من عدد فايبوناشي. يتفاعل كل حلزوني لإعطاء أعداد فايبوناشي. يظهر شكل 5 تمثيلا لثمرة الأناناس مع ترقيم المقاييس بالترتيب. يحدد هذا الترتيب بواسطة المسافة (النسبية) التي يبعد بها كل شكل سداسي عن القاعدة. أي إن الشكل السداسي الأدنى يرقم بالرقم 5، والذي يقع أعلاه يرقم بالرقم 1. لاحظ بأن المسدس 42 يعلو قليلا عن المسدس 37.

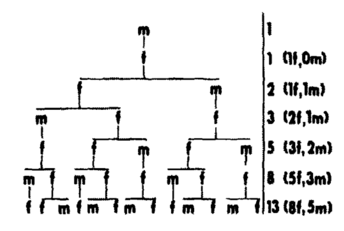


شكل (5)

تأكد من ملاحظة الطلبة لثلاثة مجاميع مميزة من الحلزونات في شكل 5 والتي تتقاطع فيما بينها، مبتدأة من القاعدة. يشمل الحزون الأول التعاقب 0، 5، 10، .. ... الخ، والذي يزداد بزاوية قليلة. اما الحلزون الثاني فيشمل التعاقب 0. 13. 26.... ، الخ والذي يزداد بزاوية اشد انحدارا. ويحوي الحلزون الثالث التعاقبات 0، 8، 16، ....، الخ والتي تقع في اتجاه معاكس بالنسبة للحلزونين الأول والثاني.

ليقم الطلبة ببيان الفروق الشائعة بين الأعداد في كل تعاقب. في هذه الحالة، فإن الفروقات هي 5، 8، 13، والتي تعد جميعها من اعداد فابيوناشي. تمتلك ثمار الأناناس المختلفة تعاقبات متباينة.

في ختام هذا الموضوع، تأمل باختصار تكاثر ذكور النحل Bees Male. تبرز ذكور النحل إلى الوجود من البيوض غير المخصبة، أما إناث النحل فتنشأ عن البيوض الملقحة. ينبغي أن يرشد المعلم الطلبة إلى تتبع تكاثر ذكور النحل. ينشأ عن ذلك النمط الآتي:



ينبغي أن يكون واضحا، من الآن، بأن هذا النمط هو تعاقب فابيوناشي.

التقييم اللاحق Postassessment

1. اطلب من الطلبة توضيح طريقتين مختلفتين تظهر الرياضيات ذاتها من خلالها في الطبيعة التي تحيط بنا.
2. ليحاول الطالب إيجاد أمثلة عن أعداد فابيوناشي في الطبيعة (غير التي تم عرضها في هذه الوحدة) وليقوموا بتوضيح الأسلوب الذي يستخدم فيه التعاقب.

مراجع References

Brother U. Alfred, An Introduction to Fabionacci Discovery, San Jose, Calif.: The Fabionacci Association, 1965.

Bicknell, M. and Vernes E. Hoggatt, Jr., A Primer for the Fabionacci Numbers, San Jose, Calif: The Fabionacci Association, 1972.

Dunlap, Richard A., The Golden Ration and Fabionacci Numbers, River Edge, New Jersey: World Scientific Publishing Co., 1997.

Hoggatt, Verner, E., Jr., Fabionacci and Lucas Numbers, Boston: Houghton Mifflin, 1969.

31 مسألة يوم الميلاد
The Birthday Problem

يستمتع الطلبة بالمسائل التي تتضمن نتائج مدهشة، وغير متوقعة. وسوف تجعل (مسألة يوم الميلاد) الطلبة ينهمكون في دراسة الاحتمالات الرياضية.

هدف الأداء Performance Objective

في مسائل تتضمن تعاقبا من الأحداث المتتالية مثل: دلالات حول أيام الميلاد، ونقر العملات المعدنية بالأظافر، وسحب بطاقات اللعب، وقذف أحجار الزهر، سيقوم الطلبة باحتساب الاحتمالات التي تحدد أن نتيجة محددة

(أ) تحدث لمرة واحدة على الأقل.

(ب) تفشل بالحدوث على الإطلاق.

التقييم السابق Preassessment

حاول أن تستفسر من طلبة الصف عما يعتقدونه بصدد احتمالية اشتراك طالبين بالصف في نفس يوم الميلاد. وسوف يستجيب الطلبة إلى ذلك باعتقادهم أن فرصة صدق هذه القضية أمر مستبعد. حاول أن تصيبهم بالدهشة في إخبارهم بأن في صف يحوي 30 طالبا، تبلغ احتمالية وجود طالبين، على الأقل، يمتلكان نفس يوم الميلاد تصل إلى حوالي 0.68 (إن احتمالية مقدارها 1.00 تدل على يقين مطلق). وترتفع هذه الاحتمالات في صف يبلغ عدد طلابه 35 فتصل إلى حوالي 0.80. حاول أن تصرح بهذه الاحتمالات في لغة (الأرجحيات Odds). وبين بأن الأرجحيات في صالح النتيجة المطلوبة هي للوهلة الأولى أفضل من 2 إلى 1 وفي الثانية 4 إلى 1. استنسخ، ثم وزع قائمة بأسماء رؤساء الولايات المتحدة مع تواريخ ولادتهم ووفياتهم. وأعط الطلبة وقتا كافيا بتأمل هذه القائمة، والبحث عن تواريخ مشتركة بين الرؤساء. (اثنان منهما، Harding, Polk، ولدا في نوفمبر، واثنان منهما، Fillmore, Taft، توفيا في 8 مارس، وثلاثة منهم، Adams, Jefferson, Monroe توفوا في 4 يوليو).

والآن قم بجولة في الصف لتحديد هل أن ثمة مجموعة من الطلبة يشتركون بيوم الميلاد. وإذا تحقق ذلك، فإن هذا الأمر سيؤدي إلى ترسيخ مبدأ الاحتمالاتن وسيساعد في إقناعهم بالقبول الظاهري للاحتمالية. أما إذا لم يكن هناك ثمة اشتراك، حاول أن تبين لهم بأنه لم يطرح أي ادعاء بصدد اليقين المطلق لهذه القضية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض المبادئ الأساسية الآتية والتي يفتقر الطلبة إلى معرفتها. توصف الاحتماليات الرياضية بصورة عشرية بين 0.00 و 1.00، وتعني احتمالية 0 (صفر) استحالة حدوث النتيجة، بينما تمثل احتمالية 1 (واحد) بأن نتيجة محددة تعد يقينية لا غبار عليها.

إن كلا من المبادئ التي طرحت هنا يمكن أن توضح بمجموعة من الأمثلة البسيطة حول نقر العملة بالإصبع Tossing، ورمي أحجار الزهر، وسحب البطاقات، ... الخ. فعلى سبيل المثال، إن احتمالية رمي مجموع 13 رمية بزوج من أحجار الزهر الاعتيادية تساوي صفرا، بينما تبلغ احتمالية إلقاء أحجار الزهر بعدد يتراوح ما بين 2 و 12 (متضمنا العدد 12) المقدار 1.0.

إن احتمالية حدوث النتيجة المطلوبة يمكن احتسابها عن طريق إعداد كسر يكون بسطه ممثلا لعدد النتائج (المقبولة Acceptable) أو (الفاشلة Unsuccessful) أو (الإخفاقات Failure). ويمكن تمثيل هذا الأمر رمزيا $P=\frac{S}{S+F}$ أو $P=\frac{S}{T}$. حيث تمثل P حصول حادثة معينة، و S عدد النتائج الناجحة، و F عدد النتائج غير الناجحة/الفاشلة، بينما يمثل الرمز T المجموع الكلي للنتائج الممكنة. يمكن من خلال أي من هاتين الصيغتين تحويل النتيجة إلى صيغة عشرية تتراوح بين الصفر و 1 نظرا لأن البسط لن يزيد على المقام بأي حال من الأحوال.

ينبغي أن يلاحظ الطلبة أيضا بأن احتمالية نتيجة مطلوبة تفشل بالحصول قد تساوي $\frac{F}{S+F}$.

ونظرا لكون $1=\frac{S+F}{S+F}=\frac{S}{S+F}+\frac{F}{S+F}$ فإنها تتبع $\frac{S}{S+F}=1-\frac{F}{S+F}$.

والآن ينبغي أن يبين الطلبة، وبعبارات واضحة، ودقيقة بأن احتمالية حصول نتيجة مطلوبة يساوي عدديا 1.00 مطروحا منه احتمالية فشل هذه النتيجة. إن هذه القضية ستسهم في مساعدة الطلبة على إكمال الدرس.

يجب أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالنظرية الأساسية للاحتمالات، والتي قد تم عرضها هنا بدون برهان: إذا كان احتمالية حادثة ما تساوي P_1، وإذا حصلت هذه الحادثة فإن احتمالية الحادثة الثانية ستكون P_2، وعليه فإن احتمالية حصول هاتين الحادثتين هي P_1P_2. حاول أن تنبه الطلبة إلى إمكانية تعميم هذا المبدأ لحساب احتمالية حدوث n من الحوادث، إذا علمت بأن كل حادثة من هذه الحوادث التالية قد حصلت، وأن النتيجة ستكون $P_1P_2P_3P_4 \ldots\ldots Pn$.

على سبيل المثال، فإن قيام الطلبة بالعمل على الأنشطة الآتية سيجعلهم يدركون بأن احتمالية سحب بطاقة البستوني Spade من شدة ورق اللعب التي تحتوي على 52 ورقة هي 13/52 أو 0.25، وأن احتمالية عدم سحب بطاقة البستوني هي $\frac{39}{52}$ أو 0.75؛ حيث أن كلا من الاحتمالين يشير إلى سحب ورقة لعب واحدة فقط من الشدة، وعلى الطلبة ملاحظة أن 0.25=1.00-0.75

إن احتمالية الحصول على وجه العملة النقدية بعملية النقر، يتبعها المؤخرة، ويتبعها مؤخرة ثانية، عندما تنقر قطعة نقود ثلاثة مرات على التوالي ستكون 1/2. 1/2. 1/2 أو 1/8، وتعرض هذه النتيجة بوضوح استخدام المبادئ الأساسية للاحتمالية في التعامل مع الحوادث المتعاقبة.

نعود ثانية إلى مسألة يوم الميلاد، تستطيع أن تبين للطلبة بأنه من السهل حساب احتمالية "عدم" وجود طالب في الصف يشارك غيره في يوم ميلاده، ثم تلجأ إلى طرح هذه النتيجة من العدد 1.0، بدلا من الحساب المباشر لاحتمالية وجود طالبين على الأقل في الصف يمتلكان نفس يوم الميلاد. حاول أن تساعد الطلبة على صياغة العرض الآتي لاحتمالية عدم وجود طلبة في الصف يشتركون بيوم ميلادهم:

$$\frac{365}{365}\bullet\frac{364}{365}\bullet\frac{363}{365}\bullet\frac{362}{365}\bullet\frac{361}{365}\bullet\frac{360}{365}\bullet\frac{359}{365}\bullet\frac{358}{365}\bullet\frac{357}{365}\bullet\frac{356}{365}\bullet\ldots\ldots$$

سيكون هناك المزيد من الكسور في حاصل الضرب، وبعدد الطلبة الموجودين في الصف. لاحظ بأن هذه الصياغة قد ارتكزت إلى السنة الاعتيادية ذات الـ 365 يوما. وإذا كان تاريخ ميلاد أحد طلبتك يقع في 29 شباط، استخدم مقامات بـ 366 وليكن الكسر الأول لديك $\frac{366}{366}$.

حاول أن توضح بأن هذه الكسور تصف احتمالية سؤال الطلبة على التوالي عن عدم ورود تواريخ قد ذكره سابقا أحد الطلبة السابقين. واعمد إلى بيان المبدأ الأساسي لحساب الاحتمالات الخاصة بالأحداث المتعاقبة – ذات التساؤل المتتالي. وسيبدي الطلبة اهتماما في تعلم أفضل كيفية لإنجاز عمليات الضرب والقسمة المتتالية – إن أفضل أسلوب سيكون من خلال استخدام الآلة الحاسبة.

سيكتشف الطلبة بأن قيمة حاصل ضربهم قد نقص إلى حوالي 0.32 عندما يصل عدد العوامل إلى 30، وإلى حوالي 0.20 عندما يصل عدد العوامل 35. نظرا لأن هذه الأعداد تعرض احتمالية عدم اشتراك طلبة الصف بنفس يوم الميلاد، فإنها تصف (الإخفاقات) وفق اصطلاح هذه المسألة. باستخدام مبدأ الطرح من 1.0، كما ذكر سابقا، للوصول إلى احتمالات (النجاح) – احتمالية وجود طالبين في الصف يشتركان بنفس يوم الميلاد – سوف نصل إليها عند 0.68 أو 0.80 أو عند كسر عشري أكبر، استنادا إلى حجم الصف. وعندما يصل عدد الأشخاص في المجموعة إلى 55 تماما، فإن احتمالية إيجاد اثنين، على الأقل، بنفس يوم الميلاد تصل إلى القيمة المدهشة 0.99!.

التقويم Evaluation

إن الطلبة الذين نجحوا بالوصول إلى هدف الأداء سيكونون قادرين على إجابة هذه الاحتمالات أو أخرى مشابهة لها بصورة صحيحة:

1- اعرض احتمالية أن في مجموعة تتألف من 15 شخصا، هناك اثنان على الأقل يشتركان بنفس يوم الميلاد.

2- إذا نقرت قطعة نقود بالإصبع إلى الهواء خمس مرات، ما هي احتمالية:

(أ) لن تستقر القطعة على الوجه بأي من هذه النقرات.

(ب) هناك على الأقل مرة واحدة تستقر القطعة على وجهها.

3- إذا سحبت بطاقة ورق اللعب من ورقة لعب اعتيادية تحوي 52 ورقة لعبة فاختبرت واستبدلت، وإذا تم تكرار ذلك أربع مرات، ما هي احتمالية كون:

(أ) هناك بطاقة ورق واحدة على الأقل مسحوبة تحوي البستوني؟ (Spade)

(ب) ليس هناك بين الأوراق المسحوبة آص Ace؟

32 هيكل نظام الأعداد
The Structure of Number System

هدف الأداء Performance Objective

عند تحديد أي عدد، سيعمد الطلبة إلى اعتباره منتميا لمجموعة: الأعداد الطبيعية،أو الأعداد الصحيحة، أو الأعداد النسبية rational number، أو الأعداد الحقيقية، أو الأعداد المركبة. وسيقوم الطلبة، أيضا، بتحويل أي مرتبة عشرية تمثل العدد النسبي إلى ما يكافئها بالصيغة الكسرية، والعكس بالعكس.

التقييم السابق Preassessment

قم بتقييم قابلية الطلبة بالاختبار الأولي الآتي، مؤكدا لهم بأن هذا اختيار تجريبي، ولن تمنح لهم درجات على عملهم فيه:

1- ميز الأعداد الآتية فيما إذا كانت تنتمي إلى: الأعداد الطبيعية، أو الأعداد الصحيحة، أو الأعداد النسبية، أو الأعداد الحقيقية، أو الأعداد المركبة (قم بتسمية "أصغر" مجموعة ممكنة في كل حالة): 3-، 5/3، 17، $\sqrt{2}$، 3.14، 22/7، $\sqrt{-9}$، $\bar{4}$، 0.2133333، ....، 2.71828، ....، 0.121121112، ....، $.1\bar{5}$، $.\bar{15}$، 1/4-، $\sqrt{16}$ - الخ.

2- حول كل من الكسور الآتية إلى مراتب عشرية: 3/8، 7/5، 2/3، 7/9، 5/11، 5/12.

3- حول كلا من الكسور العشرية الآتية إلى كسور اعتيادية: 0.875، $.\bar{8}$، 272727.، ....، 0.8333333 ...

إن الطلبة الذين يبلون بلاء حسنا في الاختبار الأولي يكونون قد بلغوا هدف الأداء. وحاول أن تكلفهم بواجب محدد مختلف بينما تقوم بعرض هذا الدرس لبقية طلاب الصف.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أطلب من التلاميذ حل معادلة خطية بسيطة مثل $3x + 5 = 11$. عندما يقدم الحل الصحيح، $x=2$، اسأل الطلبة عن نوع هذا العدد. قد يستخدم الطلبة اصطلاحات مثل (عدد تام Whole number) أو (عدد موجب Positive Number) في إجاباتهم. حاول أن توضح بأن 2 هو عدد قابل للعد Counting Number، وأن مجموعة الأعداد القابلة للعد تعرف رياضيا بوصفها مجموعة الأعداد الطبيعية. استنبط أمثلة توضيحية أخرى عن الأعداد الطبيعية ودع الطلبة يصفون المجموعة بواسطة جدول: $N=\{1,2,3, ...\}$. ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن عناصر هذه المجموعة مرتبة، وغير محددة في العدد، وأن المجموعة تمتلك العنصر الأول أو الأصغر، العضو 1.

استمر بنفس الأسلوب لتطوير مبدأ مجموعة الأعداد الصحيحة. وقم بتعديل المعادلة التي طالعناها قبل قليل بعكس قيمة الثابتين $3x + 11 = 5$. وعندما يحصلون على $x = -2$ كحل للمعادلة، فإن الطلبة سوف يذهبون إلى اعتبار هذه القيمة عددا تاما سالبا أو يطلقون اصطلاحا آخر مشابها عليها. أطرح الاصطلاح (عدد صحيح Integer) إذا لم يذكر داخل الصف. وسوف يتفهم الطلبة مباشرة بأن هذا الاصطلاح هو مرادف للاصطلاح (العدد التام Whole Number) وأن الأعداد الطبيعية التي درسناها الآن هي عبارة عن مجموعة فرعية لمجموعة الأعداد الصحيحة. يمكن أن يوضح هذا بواسطة مخطط فين Venn Diagram، والذي يتألف، في ضوء هذه المرحلة من الدرس، من دائرة داخلية تحمل عنوان "N" لوصف مجموعة الأعداد الطبيعية، ودائرة خارجية تحمل عنوان I لوصف مجموعة الأعداد الصحيحة. إن هذا المخطط سوف ينمو وتزداد تفاصيله تدريجيا مع تقدمنا في هذا الدرس عن طريق إضافة ثلاثة دوائر إضافية، تحيط كل منها بمجموع الدوائر التي سبقتها. استنبط مجموعة من الرسوم التوضيحية للأعداد الصحيحة ومد يد العون لطلبتك لوصف هذه المجموعة بواسطة جدول:

$I = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

سوف يلاحظ الطلبة بأن هذه المجموعة هي مجموعة غير محدودة، وأنها مرتبة، ولكنها لا تحتوي على عنصر أولي.

والآن، اعرض المعادلة $2x + 1 = 6$، وعندما سيبدو الحل 5/2، سيدرك الطلبة بأن هذا العدد "لا ينتمي" إلى مجموعة الأعداد الطبيعية، أو مجموعة الأعداد الصحيحة نظرا لعدم كونه عددا تاما، ولكنه عبارة عن كسر على الأصح. حاول أن توضح بأن مثل هذه الأعداد تنشأ عن أعداد نسبية بين عددين

صحيحين، a/b، حيث يكون المقام b غير مساويا للصفر (اسأل الطلبة لماذا لا يكون صفرا!).

إن الاصطلاح (عدد نسبي) اشتق من كلمة (نسبة Ratio). أضف الدائرة الثالثة إلى مخطط فين، بحيث تحيط تماما بالدائرتين السابقتين. ضع عنوانا جديدا (Q) تعبيرا عن كلمة خارج القسمة Quotient لوصف الدائرة الجديدة (الثالثة).

استنبط مجموعة كبيرة من الشواهد التوضيحية عن الأعداد النسبية، متضمنة الكسور التامة وغير التامة Proper and Improper fractions، وبقيم سالبة وموجبة لكل منهما. ينبغي أن ينتبه الطلبة إلى كون مجموعة الأعداد النسبية غير محدودة. ومرتبة. غير أنه لا يمكن إعداد جدول لها. تستطيع أن توضح للطلبة بأن الأعداد النسبية تمتاز بكونها (كثيفة في كل مكان Everywhere Dense) وأن الكمية اللامتناهية Infinitude النسبية يمكن أن تقع بين أي عددين من الأعداد النسبية.

لقد أصبحنا جاهزين الآن لاختبار الكسور العشرية. بصورة عامة. سيظهر الطلبة بعضا من عدم اليقين بصدد تشخيص أي منها يصف الأعداد النسبية. لذا ينبغي أن نأخذ بعين الاعتبار المراتب العشرية المنتهية، والمراتب العشرية غير المنتهية – المتكررة، والمراتب العشرية غير المنتهية – غير المتكررة. يستطيع طلبتك الحصول على بضعة مفاتيح عبر تحويل بعض الكسور مثل 1/8، 5/9، 1/6 إلى كسور عشرية عن طريق تقسيم بسطها على مقامها. وسوف يلاحظ الطلبة بأن النتيجة، في كل حالة، قد تكون إما كسرا عشريا منتهيا، أو كسرا عشريا غير منتهي ولكنه مكرر. يستطيع أن يلاحظ الطلبة، بسهولة، بأن كل كسر عشري منتهي يصف عددا جذريا عن طريق كتابة كل منها ككسر عشري.

بعدها، أعرض الكسور العشرية غير المنتهية. ويمكن تحدي الطلبة الذين يعتقدون بأن $.\overline{3}$ يمثل عددا نسبياً عن طريق كتابته بصورته العشرية . وقد يدرك البعض هذا الكسر العشري مساويا 1/3. وإذا كان الأمر كذلك، تحدى هؤلاء بالكسر العشري 0.5 والذي حصلوا عليه سابقا عند تحويل الكسر 5/9 إلى كسر عشري، أو تحداهم بالكسر العشري 0.1666 والذي قد حصلوا عليه أيضا سابقا عند تحويل الكسر الاعتيادي 1/6 إلى كسر عشري.

اسأل طلبتك فيما إذا كانوا قادرين على تحويل هذه الكسور العشرية إلى كسور اعتيادية وإذا كانوا عاجزين عن الوصول إلى الإجابة! أو، تحداهم بالكسر العشري $.\overline{13}$، بسبب عدم معرفتهم للإجابة. وإذا كان الطلبة بحاجة إلى مساعدتك في تحويل هذه الكسور الاعتيادية إلى كسور عشرية، فإن عرض شاهدين توضيحيين سوف يكون كافيا في توضيح هذه التقانة.

$N = 0.131313\ldots$

اضرب بالعدد 100:

$100\,N = 13.131313\ldots$

$\underline{\;\;N = 0.131313\;\;}$

$99\,N = 13$ بواسطة الطرح

$N = 13/99$

$N = 0.1666666\ldots$

اضرب بالعدد 10:

$10\,N = 1.666666\ldots$

$\underline{\;\;N = 0.1666666\;\;}$

$9N = 1.5$ بواسطة الطرح

$90\,N = 15$

$N = 15/90 = 1/6$

حاول أن تجهز طلبتك بمجموعة شواهد توضيحية، تتضمن بعض الأجزاء غير المتكررة بصيغة كسور عشرية قبل أن يظهر القسم المكرر، كما في المثال الثاني أعلاه. وساعدهم على إدراك حقيقة أن مثل هذه الكسور العشرية تمثل أعداد نسبية، رغم أن أجزاءها غير المتكررة قد تكون طويلة نوعا ما، ما دامت محدودة في طولها، وإن قسما مكررا يتبعها يتألف من مرتبة واحدة أو أكثر.

أصبح طلبتك الآن جاهزين للأخذ بعين الاعتبار الكسور غير المنتهية، غير المكررة. كما أنهم قد أصبحوا على معرفة كافية ببعض التفاصيل الآتية، خصوصا $\pi = 3.14159\ldots$ وكذلك بالطبع الجذور التربيعية لبعض المربعات غير التامة. (كن متأكدا من فهم الطلبة بأن أعدادا مثل 22/7 و 3.14 أو 3.1416 لا تعدو عن كونها تقريبات للعدد الجذري π). افترض المعادلة $x^2 + 2 = 7$. إن الذين يمتلكون معرفة كافية بخوارزمية الجذر التربيعي يمكن أن يطلب منهم العمل على $\sqrt{5}$ لبضعة مراتب عشرية لتحديد إمكانية ظهور نمط للتكرار. وسوف يكتشف الطلبة، انعدام هذا الاحتمال، وذلك لأن $\sqrt{5} = 2.236..$ وهو غير نسبي.

إن الطلبة الذين لا تتوفر لديهم معرفة كافية بالخوارزمية يمكنهم الرجوع إلى جدول للجذور التربيعية، وسوف يكتشفون بأن الجذور التربيعية الوحيدة التي تحتوي على المكررات في صورتها العشرية هي تلك التي تخص المربعات التامة. إن جميع الجذور التربيعية المتبقية هي أعداد غير نسبية، نظرا لكونها كسور عشرية غير منتهية، وغير متكررة. قد ترغب أيضا بتعميم هذه النتيجة إلى حد الجذور النونية Nth Roots للأسس النونية غير التامة Non perfect nth power.

وضح لطلبتك بأن كلا من مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية تشكلان مجموعة الأعداد الحقيقية. أضف دائرة رابعة إلى مخطط فين الذي قمت بإعداده، وحدد له الرمز R، وسيتضمن تماما جمع الدوائر الثلاثة التي تم رسمها سابقا.

ينبغي على الطلبة أن يدركوا بأن مجموعات كل من: الأعداد الطبيعية، والأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية، تعد كل منها مجموعة جزئية تامة لمجموعة الأعداد الحقيقية.

إن هذا التطوير في هيكلية نظام الأعداد يمكن أن يستنتج من خلال معالجة سريعة للأعداد المركبة. أطلب من تلامذتك محاولة حل المعادلة $x^2+4=0$. وحاول أن تساعدهم على سبب كون الإجابات مثل 2+، 2− تعد غير صحيحة، وسوف يدركون سريعا بأنه لا يوجد عدد حقيقي يمكن أن يكون حاصل مربعه 4−. أو أي عدد آخر سالب، من أجل هذا لم تكن الإجابات صحيحة

حاول أن تبين لهم بأن الأعداد غير الحقيقية يطلق عليها (خيالية Imaginary) وأن الأعداد الخيالية تكون مع الأعداد الحقيقية المجموعة التي يطلق عليها (الأعداد المركبة Complex Number) قد ترغب بتقديم الرمز $i=\sqrt{-1}$ بحيث يستطيع الطلبة كتابة حل لمعادلتهم الأخيرة بصيغة 2i+، 2i- اكمل مخطط فين بالدائرة الخامسة والأخيرة، والتي تحيط تماما بالدوائر الأربعة الأخرى، وتظهر مجموعة الأعداد الحقيقية بوصفها مجموعة جزئية – تامة للأعداد المركبة، C.

تقويم Evaluation

أعط الطلبة اختبارا يشابه الاختبار الأولي، واعمد إلى مقارنة إجابات كل طالب في هذين الاختبارين لقياس مقدار التقدم في فهم الموضوع.

33 جولات في أسس الأعداد
Excursions in Number Bases

تعلم الطلبة منذ مرحلة مبكرة من حياتهم المدرسية بأن الأساس المستخدم في نظام الأرقام الذي يسود حياتنا اليومية (النظام العشري Decimal System) هو العدد 10. وبعد ذلك اكتشف الطلبة وجود أعداد أخرى تؤدي دور الأساس في النظم العددية. على سبيل المثال، الأعداد المكتوبة بالأساس 2 (النظام الثنائي Binary System) تستخدم بكثرة في ميدان أنشطة الحاسوب. سيسعى هذا الدرس إلى استكشاف جملة من المسائل التي تتضمن أعدادا كتبت بعدة أسس صحيحة موجبة.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بحل مجموعة متنوعة من المسائل العددية والجبرية تم وصفها كعدد في أي أساس صحيح Integral Base موجب b، $b \geq 2$.

التقييم السابق Preassessment

يعتمد مقدار ما ستسير فيه ضمن هذا الدرس، لحد ما، على الخلفية الجبرية لدى طلبة الصف. حاول أن تسأل الطلبة، أو أن تقيّم نشاطهم السابق بهذا المضمار كي تحدد كم سيستفيد الطلبة من الدرس، وما مقدار الفهم الذي سينشأ لديهم عنه، وإلى أي حد سيتمكنون من فهم فكرة قيمة المرتبة عند كتابة الأعداد، ومعنى الصفر والأسس السالبة، والتقانات المستخدمة لحل المعادلات التربيعية أو تلك التي من درجات أعلا.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض بسرعة حقيقة أن العد العشري تكتب باستخدام نظام قيم المراتب. وحاول أن توضح، على سبيل المثال، بأن العدد 365، يمثل فيه الرقم 3 القيمة 300 بدلا من 3 فحسب، وأن الرقم 5 يمثل 50 بدلا من 5، بينما يعد الرقم 6 رقم آحاد ويمثل بالحقيقة العدد 6. بصورة مختصرة، $365=300+50+6=3(100)+5(10)+6(1)=3(10)^2+5(10)^1+6(1)^0$. وبنفس الأسلوب:

$$3107=3(10)^3+1(10)^2+0(10)^1+7(10)^0$$

أطلب من التلاميذ مزيدا من الشواهد التوضيحية إذا كان

الأمر ضروريا، كما ويمكن أن تقوم بمراجعة أو تعليم معنى الأس الصفري، وكذلك الأس السالب مع الطلبة لأن هذه المفاهيم سوف تستخدم لاحقا.

وضح للطلبة بأن استخدام العدد 10 كقاعدة هو أمر كيفي لحد ما، وينبغي أن يلاحظ الطلبة إمكانية استخدام أعداد أخرى كقواعد. وإذا استخدم العدد 2 كقاعدة، يعبر عن الأعداد كمجاميع أسس 2 بدلا من مجاميع مضاعفات الأعداد الصحيحة الموجبة للأساس 10، وأن الأرقام الوحيدة المستخدمة لوصف الأعداد هي 0، 1.

على سبيل المثال، إن العدد المذكور آنفا 356 يساوي

$$256+64+32+4=28+26+25+22=1(2)^8+0(2)^7+1(2)^6+1(2)^5+0(2)^4+0(2)^3+1(2)^2+0(2)^1+0(2)^0=101100100_{two}$$

إن الحروف الصغيرة تشير إلى الأساس. وفي الأساس 3 (حيث أن الأرقام المستخدمة لوصف الأعداد هي 0، 1، 2)

$$356 = 2(1)+3+27+81+243$$
$$= 2(3)^0+1(3)^1+0(3)^2+1(3)^3+1(3)^4+1(3)^5$$
$$= 111012_{three}$$

بالنسبة للأساس 5 (حيث الأرقام المستخدمة ستكون 1، 2، 3، 4).

$$356 = 1(1)+1(5)+4(25)+2(125)$$
$$= 1(5)^0+1(5)^1+4(5)^2+2(5)^3$$
$$= 2411_{five}$$

إن الرموز السفلية subscripts تكتب بصيغة حرفية بدلا من الصيغة العددية لتجنب أي إرباك محتمل. وينبغي أن ينتبه الطلبة إلى أنه عندما تكون الأعداد في أساس b فإن الأرقام الوحيدة المتوفرة لمثل هذا الوصف هي تلك التي تقع بين صفر إلى b-1، وأنه في حالة كون قيمة b أكبر من 10، ينبغي إنشاء أرقام جديدة لوصف الأعداد 10، 11، 12، ... الخ

حاول أن تذكر طلبة الصف بأن الأعداد مثل 2411_{five} ينبغي أن تقرأ بصيغة (اثنان، أربعة، واحد، واحد، أساس 5).

يجب أن توفر تمارين مناسبة حول كتابة وقراءة الأعداد التامة في أعداد ذات أساسات غير الأساس 10، وفي ضوء حاجات الصف.

بعدها تأمل أعدادا غير الأعداد الصحيحة. ساعد طلبتك على معرفة أن 12.2_{ten} يعني $1(10)^1 + 2(10)^0 + 2(10)^{-1}$، نظرا لأن $10^{-1} = \frac{1}{10}$، وأن هذا العدد يمكن وصفه بأعداد لأساسات أخرى كما هي الحال في الأعداد الصحيحة.

على سبيل المثال، لدينا في الأساس 5، $12.2_{ten} = 2(5)^1 + 2(5)^0 + 1(5)^{-1}$، نظرا لأن $1/5 = 2/10$ لذا $12.2 = 2_{ten}$، 22.1_{five}. أورد مزيدا من الشواهد التوضيحية مع مسائل مشابهة مثل تحويل 7.5_{ten} إلى الأساس 2: $7.5_{ten} = 1(2)^2 + 1(2)^1 + 1(2)^0 + 1(2)^{-1} = 111.1_{two}$. إن الكسور العشرية التي تكون أجزاءها العشرية (1/2) 0.5، (1/4) 0.25، (3/4)0.75، (1/8) 0.125، ... الخ، يمكن تحويلها بسهولة إلى أعداد الأساس 2. على سبيل المثال، $8.75_{ten} = 1(2)^3 + 1(2)^{-1} + 1(2)^{-2}$، وبما أن $0.75 = 3/4 = 1/2 + 1/4 = 1/2^1 + 1/2^2 = 2^{-1} + 2^{-2}$، لذا $8.75_{ten} = 1000.11_{two}$. يمكن أن تحول الأعداد، أيضا، من الوصف العددي في أساس محدد إلى أوصاف عددية مكافئة في أساس آخر، حيث لا يساوي أي أساس منها العدد 10. على سبيل المثال، 12.1_{four} يمكن وصفه بأعداد الأساس 6 كما يأتي: $12.2_{four} = 1(4)^1 + 2(4)^0 + 1(4)^{-1} = 4 + 2 + 2/4 = 6 + 3/6 = 1(6)^1 + 0(6)^0 + 3(6)^{-1} = 10.3_{six}$. في الأساس 10، فإن هذا العدد هو 6.5 يجب أن توفر تمارين مناسبة بمسائل عددية تشابه هذه الأنواع في ضوء اهتمامات وقدرات طلبتك.

إن الصف سيكون جاهزا للتعامل مع المسائل الجبرية في المرحلة التالية. أعرض موضوع التحدي الآتي: (في أساس محدد، b، يكون العدد 52 ضعف العدد 25. جد قيمة b). ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن 52 (تقرأ خمسة، اثنان) تصف بالواقع الصيغة 2 + b5، نظرا لأن $2 = 5(b)^1 + 2(b)^0$. ووفقا لذلك، فإن المسألة تنص بأن $5b + 2 = 2(b2 + 5)$. قم بحل المعادلة بدلالة b لتحصل على b=8. إن عملية التدقيق تظهر بأن $52_{eight} = 5(8) + 2 = 42_{ten}$ وأن $25_{eight} = 2(8) + 5 = 21_{ten}$، وأن $42 = 2(21)$.

إن المعادلة السابقة هي معادلة خطية فحسب، ولكن المسألة الآتية تتطلب استخدام معادلة تربيعية: (في أي أساس b يوصف العدد 132 ضعف العدد الموصوف 33؟). لديك $132b = 1(b)^2 + 3(b)^1 + 2(b)^0$ وكذلك $33b = 3(b)^1 + 3(b)^0$، وعليه فإن المعادلتين سوف تصبح $b^2 + b3 + 2 = 2(3b + 3)$ أو $b^2 - 3b - 4 = 0$. حل المعادلة بدلالة b بالأسلوب التقليدي للحصول على b=-1، (والذي يجب رفضه نظرا لأن مجال b موجب) وكذلك b=4، وهو الحل الوحيد المقبول.

دقق $132_{four} = 1(4)^2 + 3(4)^1 + 2(4)^0 = 1(16) + 3(4) + 2 = 30_{ten}$ وكذلك $33_{four} = 3(4)^1 + 3(4)^0 = 3(4) + 3 = 15_{ten}$ وأن 30 هو ضعف 15. اعرض مسائل مشابهة للطلبة.

إذا قام الطلبة بدراسة حل معادلات وبدرجات تزيد على

اثنين، بواسطة القسمة التركيبية Synthetic Division (نظرا لأن جميع النتائج ستكون غير كسرية)، والتي تتضمن أعدادا تضمن وصفها في أساسات تتألف من أكثر من ثلاثة أرقام.

على سبيل المثال، (في أي أساس b سيكون فيها التمثيل العددي للعدد 1213 ثلاثة أضعاف الوصف العددي للعدد 221؟). سيكون لديك:

$$= 1(b)^1 + 2(b)^2 + 1(b)^3 + 3(b)^0$$

$$= b + 2b^2 + b^3 + 3 \text{ أو } [2(b)^2 + 2(b)^1 + 1(b)^0]$$

$3(2b^2+2b+1)$، والتي يمكن تبسيطها إلى $b^3 -4b^2 -5b =0$ ونظرا لكون هذه المعادلة قابلة للتحليل دون اللجوء إلى القسمة التركيبية، قم بحلها كما يأتي:

$b(b-5)(b+1)=0$ وأن $b=$ 0، 5، -1. كما مر سابقا، فإن الحل المقبول الوحيد هو القيمة الموجبة $b=5$. ادع الطلبة إلى تدقيق الإجابة. في النهاية هناك تطبيق جبري ممتع حول تطبيقات أساس العدد والذي اقترح ما يأتي: (في الأساس 10، فإن التمثيل العددي 121 يمثل عددا تاما مربعا. هل يمثل هذا العدد مربعا تاما في أي أساس موجب؟). مد يد العون إلى طلبتك للتنقيب في جوانب هذه المسألة كما يأتي:

$(b+1)^2 = b^2 +2b +1 = 1(b)^0+2(b)^1+1(b)^2 =121_b$.

يا للعجب! إن التمثيل العددي 121 يمثل تاما في أي أساس موجب صحيح $b\geq3$، ويعد كذلك مربعا لأكثر من عدد الأساس! هو يوجد ثمة تمثيل عددي مشابه لهذا ؟

قد يكتشف الطلبة تمثيلات عددية أخرى عبر تربيع صياغات مثل $(b+2)$ و $(b+3)$ للحصول على أوصاف عددية 144، 169. إن هذه المربعات التامة في الأساس 10 هي أيضا مربعات تامة في أساس تام موجب يحتوي على الأرقام المستخدمة فيها ($b\geq10$، $b\leq5$ على التوالي). وليس من الضروري بالنسبة لمعامل b أن يكون مساويا 1. إذا قمت بتربيع $(2b+1)$، على سبيل المثال، سوف تحصل على $4b^2 + 4b +1 = 441_b$، والذي سيكون مربعا تاما في أي أساس صحيح موجب $b>5$. ادع طلبتك لمحاولة تربيع صياغات مثل $3b+1$، $2b+2$، $4b+1$، ... الخ، للحصول على مربعات تامة أخرى. وقد يرغب البعض الاستمرار بعملية التحري هذه للبحث عن مكعبات تامة، وتربيعات أسس تامة، ...، الخ. حاول أن تساعدهم بتكعيب $b+1$، على سبيل المثال، للحصول على b^3+3b^2+3b+1، موضحا بأن الوصف العددي 1331 هو مكعب تام لأي قيمة أساس صحيح $b\geq4$ (في الأساس 10، $1331 = 11^3$) في الواقع، أن 1331 هو مكعب لأكثر من عدد الأساس في كل حالة! إن هذه الدراسة يمكن أن نستمر بها ما دام الاهتمام قائما مع سماح قدرة طلبة الصف على المواكبة. إن الطلبة الذين يمتلكون معرفة كافية بنظرية ذات الحدين سيجدون من المناسب استخدامها في فتح الأسس الأعلى لصياغات مثل $b+1$، $2b+1$، ...، الخ.

تقويم Evaluation

إن الطلبة الذين نجحوا في الوصول إلى هدف الأداء سيكونون قادرين على حل مسائل مثل المسائل الآتية:

1. اعرض العدد العشري 78 بوصف عددي للأساس 5.
2. إن العدد المثل عدديا بـ 1000.1 في الأساس 2 في أي وصف عددي يمكن تمثيله في الأساس 8 ؟
3. في أساس محدد b، فإن العدد الذي المثل عدديا بـ 54 هو ثلاثة أضعاف العدد الموصوف عدديا بـ 16 جد قيمة b.
4. في أساس محدد b، فإن العدد الذي يمثل عدديا بـ 231 هو ضعف العدد المثل عدديا بـ 113 جد قيمة b.
5. في أي أساسات يمكن للعدد 100 أن يمثل مربعا تاما؟ وفي أي أساسات يصف العدد 1000 مكعبات تامة؟ هل تستطيع أن تنشئ قاعدة عامة من هذه النتائج ؟

34 زيادة الربح (الفائدة)

Raising Interest

غالبا ما يجابه الطلاب الإعلانات العائدة إلى مؤسسات الادخار والتي تعرض نسبا جذابة للربح مع ربح مركب تتكرر بالإضافة إلى المبالغ المودعة. ونظرا لكون جل المصارف تمتلك مجموعة متنوعة من البرامج، فإن من الضروري بالنسبة للأشخاص الذين يحتمل قيامهم بإيداع مبالغ من المال في المصارف أن تتوفر لديهم معرفة كافية بأسلوب حساب الربح تحت كل خيار من الخيارات المتوفرة.

هدف الأداء Performance Objective

سيستخدم الطلبة الصيغة الخاصة بالربح المركب لحساب العائد على المبلغ المستثمر لأي نسبة من نسب الربح، ولأي فترة من الزمن، ولأي تكرار شائع لتركيب الربح، وبضمنه التركيب الآني (المستمر Continuous). كما سيقومون أيضا بتحديد أي من الخيارين، أو الخيارات المتاحة تعطي أفضل عائد خلال نفس الفترة الزمنية.

التقييم السابق Preassessment

نظرا لأن هذا الدرس يتطلب توفر القابلية على تطبيق قوانين اللوغاريتمات، تأكد من امتلاك الطلبة معرفة كافية بهذه القوانين. كما وينبغي عليك، أيضا، أن تحدد مقدار حدود المعرفة المتوفرة لديهم، نظرا لأن قدرات الصف تلعب دورا حاسما في تحديد إلى أي مدى سوف تستمر بمعالجة مبادئ التركيب الآني Instantaneous Compounding.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اقترح مسألة الفائدة المالية الآتية: (في عام 1626، اشترى Peter Minuit جزيرة مانهاتن Manhattan لشركة غربي الهند الألمانية Dutch West India Company من الهنود مقابل حلية بسيطة كلفت مقدار 60 كيلدر ألماني Dutch Guilder، أو حوالي 24$ دولارا. افترض بأن الهنود كانوا قادرين على استثمار مبلغ الـ 24$ دولارا في ذلك الوقت بفائدة سنوية مقدارها 6٪، وافترض كذلك بأن نفس نسبة الفائدة ظلت قائمة خلال السنوات الماضية. كم من المال سيجني أحفاد أولئك الهنود – في هذه الأيام إذا:

(1) احتسبت نسبة الفائدة البسيطة فقط.

(2) كانت الفائدة مركبة.

(أ) سنويا (ب) فصليا (ج) بصورة مستمرة؟.

إن إجابات الأسئلة أ، ب، ج سوف تصيب الجميع بالدهشة والاستغراب!.

استعرض باختصار صيغة الفائدة البسيطة، والتي تمت دراستها في دروس مبكرة. وسوف يتذكر طلبة الصف بأن الفائدة البسيطة قد احتسبت من حاصل ضرب رأس المال P، ونسبة الفائدة السنوية r ، والفترة الزمنية بالسنوات t. وفي ضوء ذلك، سوف تكون بين يديك الصيغة: $I = P.\ r.\ t$، وفي هذه المسألة $(354)\ (.06)\ (24) = I = \$509.76$ مقدار الفائدة البسيطة. أضف هذا المبلغ إلى رأس المال البالغ 24.00$ للحصول على المبلغ A والذي يبلغ 533.67$ المتوفر بالوقت الحالي. لقد استخدمت الآن الصيغة بالنسبة للمبلغ Amount، $A = P + Prt$.

مع الاحتفاظ بهذا المبلغ الزهيد في ذاكرتنا (لعائد مستحصل بعد 354 عاما!) عاود بالتنقيب عن مقدار ما سيحصل من تحسن في الاستثمار إذا تراكبت الفائدة سنويا بدلا من احتسابها على أساس الفائدة البسيطة. برأس مال مقداره P، ونسبة فائدة سنوية مقدارها r، وعند فترة زمنية مقدارها t=1، فإن المبلغ A عند نهاية السنة الأولى سوف توفره الصيغة $A_1 = P+Pr = P(1+r)$. (إن الرمز السفلي (1) يعرض السنة التي احتسبت الفائدة عند نهايتها). والآن أصبحت $A_1=P(1+r)$ تمثل رأس المال عند بداية السنة الثانية، والتي ستحتسب على أساسها الفائدة التي تخص السنة الثانية. وعليه،

$$A_2 = P(1+r) + P(1+r)r = P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2$$

وبما أن الصيغة الأخيرة تصف رأس المال عند بداية السنة الثالثة، سيكون لديك

$$A_3=P(1+r)^2 + P(1+r)^2r = P(1+r)^2(1+r)= P(1+r)^3$$

ومنذ الآن، سيلاحظ طلبتك النمط المنبثق، وينبغي أن يكونوا

قادرين على اقتراح التعميم المناسب للمبلغ بعد مرور t من السنوات، $A_t = P(1+r)^t$.

والآن حاول تجربة هذه الصيغة على المبلغ المستثمر والبالغ 24$ في عام 1626!. مفترضاً فائدة مركبة سنوية مقدارها 6٪، وسيكون لديك

$A_{354}=24\ (1+0.06)^{354}\ =21,801,558,740$

إن هذا يعني بأن المبلغ الأصلي والبالغ 24$ يساوي في هذا الوقت تقريبا 22$ مليار!. سيصاب معظم الطلبة بالدهشة من الفرق الكبير بين هذا المقدار والمبلغ 533.76$ الذي حصلنا عليه عند احتساب الفائدة البسيطة.

تعتمد معظم المصارف، في هذه الأيام، الفائدة المركبة الفصلية، أو الشهرية او اليومية، أو المستمرة، دون الفائدة السنوية. لذا توجه لاحقا إلى تعميم الصيغة $A_t=P(1+r)^t$ بعد الأخذ بعين الاعتبار تراكب الفائدة لفترات أكثر تلاحقا. وساعد طلبتك على ملاحظة أنه في حالة تراكب الفائدة بمعدل نصف سنوي Semiannual، فإن الفائدة الدورية Periodic rate سيكون مساويا لنصف المعدل الزمني Annual rate، لكن عدد الفترات ستكون ضعف عدد السنوات: وعليه $A= P(1+r/2)^{2t}$ وبنفس الطريقة، إذا تراكبت الفائدة بصورة فصلية $A=P(1+r/4)^{2t}$.

بصورة عامة إذا تراكبت الفائدة n من المرات خلال السنة، سيكون لديك $A= P(1+r/n)^{nt}$. يمكن استخدام هذه الصيغة لأي قيمة محدودة من المرات n. بافتراض أن n = 4 في المسألة، ينتج عنها $A = 24\ (1+.06/4)^{4(354)} = 24\ (1.015)^{1416} = 34,365,848,150$. لقد ازدادت قيمة 24$ في هذه المرة إلى 34$ مليار.

ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن تغيير الفائدة المركبة من سنوية إلى فصلية نجم عن زيادة الدخل بحوالي 12$ مليار.

قد يتساءل الطلبة، الآن، حول إمكانية زيادة الدخل بصورة غير محدودة عن طريق زيادة تكرار تراكب الفائدة. إن المعالجة التامة لهذا السؤال تتطلب تطويرا شاملا لمبدأ الحدود Limits، لكن الأسلوب العامي المدرك بالبديهة سيكون وافيا بالغرض في هذه الحالة.

في البداية، دع الطلبة يباشرون، عملية استكشاف لمسألة أكثر بساطة لمبلغ مستثمر مقداره 1$ وبفائدة سنوية أسمية Nominal مقدارها 100٪ ،ولفترة زمنية مقدارها سنة واحدة. إن هذه الظروف سينجم عنها $A = 1(1+1.00/n)^n = (1+1.00/n)^n$ ادع الطلبة إلى إعداد جدول بقيم A بالنسبة لقيم شائعة للمتغير n، بحيث تكون قيمها n = 1(فائدة مركبة سنوية)، n = 2 (فائدة مركبة نصف سنوية)، n = 4(فصلية)، n = 12(شهرية).

ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن المبلغ A لا يزداد بصورة فلكية عند ازدياد قيمة n، ولكنه يزداد بصورة بطيئة من 2.00$ (n=1) إلى حوالي 2.60$ في حالة (n=12). وضح بأن المبلغ A سوف يقارب، ولكنه لن يصل بصورة قاطعة، إلى القيمة 2.27$. (المدى الذي ترغب بمناقشة الحقيقة القائلة أن $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e = 2.71828.....$ سوف يعتمد على قابلية الطلبة ومعرفتهم العملية).

نظرا لأن الاستثمارات لا تكسب فائدة مقدارها 100٪، بصورة عامة، ينبغي أن تقوم لاحقا بالتحويل إلى فائدة عامة أو r. إن وضع $\frac{r}{n}=\frac{1}{k}$ سوف تحصل على n=kr وأن المبلغ $A=P(1+r/n)^{nt}$ سوف يصبح

$A=P(1+1/k)^{krt} = P[(1+1/k)^k]^{rt}$

يبدو واضحا بأنه عندما تقارب n إلى اللانهاية، وكذلك الحال بالنسبة للمتغير k، ونظرا لكون r محدودا، فإن الصياغة الموجودة بين الأقواس تقارب قيمة e كنهاية لقيمتها. وبعدها ستحصل على الصيغة $A=Pe^{rt}$ بالنسبة "للفائدة اللحظية"، حيث تمثل r الفائدة السنوية، الأسمية، وأن t هي المدة بالسنوات. قد يستمتع الطلبة بمعرفة أن هذه الصيغة هي وصف خاص لقانون النمو العام (Low of Growth) والذي يكتب عامة بصيغة $N=N_0e^{rt}$ ، حيث تمثل N الكمية النهائية للمادة والتي كانت كميتها الابتدائية N_0. توجد تطبيقات متعددة لهذا القانون في عدة ميادين مثل زيادة السكان (البشر، والبكتريا في المستنبت Culture، ... الخ)، والانحلال الاشعاعي للعناصر (ويصبح في هذه الحالة قانون الانحلال (Low of Decay)، $N=N_0e^{-rt}$).

باستكمال مسألة الاستثمار، مستخدمين 2.72 كقيمة تقريبية للمتغير e، سيكون لديك:

$A=24\ (2.72)^{.06(354)} =40,780,708,190.$

سيرى الطلبة أن (أقصى Ultimate) عائد على مبلغ 24$ المستثمر (عند فائدة سنوية – اسمية مقدارها 6٪ ولمدة 354 عاما) سيصل إلى حوالي 41$ مليار.

يستطيع الطلبة، الآن، تطبيق الصيغة التي تم تطويرها. وتعرض المصارف، بالوقت الحاضر، فائدة تتراوح بين 5٪ ولغاية 12٪ (لفترة إيداع مقدارها سنتين أو أكثر)، ويعتمد بصورة شائعة احتساب الفائدة المركبة بصورة فصلية، أو شهرية، أو يومية، أو بصورة مستمرة. يستطيع الطلبة العمل على مسائل بقيم مختلفة ومتغيرة: لرأس المال، والنسب الدورية، وتكرار تراكب الفائدة،

والفترات الزمنية، ثم ليعمدوا إلى مقارنة العوائد، وسوف يندهش الطلبة بالمادة التي تلقنوها!.

التقويم Evaluation

إن الطلبة الذين أكملوا هدف الأداء سوف يكونوا قادرين على إجابة الأسئلة التي تشابه ما يأتي:

1- ادعت المصارف التي تعرض فائدة سنوية مركبة فصليا مقدارها 5٪ بأن المبلغ المودع يتضاعف خلال 14 عاما. هل أن ادعائهم صحيح؟

2- إذا كان لديك مبلغا تريد استثماره مقداره 1000$ ولمدة سنتين، هل ستحصل على عائد كبير من مصرف توفير يعرض فائدة سنوية مقدارها 5٪ مركبة فصليا، أو من مصرف تجاري يعرض فائدة سنوية مقدارها 4½ ٪ مركبة بصورة دائمة؟

3- تعرض مصارف فائدة سنوية - اسمية مقدارها 6٪ مركبة بصورة دائمية على أمد توفير مقداره سنتين أو أكثر، وتدعي بأن هذه الفائدة تكافئ (فائدة سنوية مؤثرة Effective Annual Rate) (الفائدة مركبة سنويا) بمقدار 6.27٪. برهن على صحة ذلك، مفترضا أن المبلغ المودع هو 500$ (الحد الأدنى التقليدي) ولمدة مقدارها سنتين.

35 علاقات: الانعكاس، والتماثل، والانتقال
Reflexive, Symmetric, and Transitive Relations

ستتوفر للطلبة خلال هذا الدرس فرصة مناسبة لاستكشاف بعض خصائص العلاقات الرياضية السائدة بين الأعداد، والأشكال الهندسية، والمجموعات، والقضايا، والأشخاص، والأماكن، والأشياء.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بتمييز ماهية علاقات محددة سواء كانت علاقات: انعكاس، أو تماثل، أو انتقال، أو بوصفها علاقة تكافؤ.

التقييم السابق Preassessment

ادع الطلبة إلى وصف طبيعة ما يدل عليه الاصطلاح الرياضي (العلاقة Relation). وإذا لم تقتنع بفهم الاصطلاح، اعرض جملة من الأمثلة، قبل البدء بالدرس. قد ترغب في تنويع العلاقات التي ستعرضها أمام طلبتك، في ضوء مستوى المهمة والخلفية العلمية في موضوعات مثل: الجبر، والهندسة، ونظرية المجموعة، ونظرية العدد، والمنطق.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ بمعالجة علاقة بسيطة جدا مثل (يكون مساويا لـ Is Equal to) بالنسبة للأعداد الحقيقية. وسينجح الطلبة من استثمار خبراتهم السابقة، في إدراك حقيقة أن أي كمية a تساوي نفسها، لأنه إذا كانت الكمية a تساوي كمية أخرى تساوي b، بعدها ستكون b مساوية لـ a؛ وكذلك إذا كانت الكمية a تساوي كمية أخرى b، وأن b بدورها تساوي كمية ثالثة c، بعدها ستكون a مساوية لـ c. وسيكون لدينا رمزيا، $a=a$، $a=b \leftrightarrow b=a$، وكذلك $a=b$، $b=c \leftarrow a=c$. إن السهم يقرأ (يدل ضمنا Implies) كما هو الحال في المنطق المألوف. (استبدل السهم بالكلمة إذا لم يكن طلبة الصف معتادين على استخدام هذا الرمز).

وضح للطلبة بأنه عندما تمتلك الكمية a علاقة محددة بذاتها (كما في $a=a$) فإن تلك العلاقة يطلق عليها (انعكاسية Reflexive). يضاف إلى ذلك، عندما تكون الكمية a تمتلك علاقة محددة بكمية أخرى b، وأن b تمتلك نفس العلاقة بـa (كما في $a=b \rightarrow b=a$) فإن تلك العلاقة يطلق عليها (التماثل

Symmetric)، يضاف إلى ذلك عندما تكون الكمية a تمتلك علاقة مع كمية أخرى b وأن b تمتلك علاقة مشابهة بكمية ثالثة c، وسينتج عن هذا الأمر أن a ستمتلك نفس العلاقة مع c (كما في b=a و b=a→c= a) ويطلق على هذه العلاقة صفة (انتقالية Transitive).

إن علاقة تمتلك جميع الخصائص الثلاثة المذكورة يطلق عليها (علامة تكافؤ Equivalence Relation).

والآن ادع الطلبة إلى اختبار بعض العلاقات التي اعتادوا التعامل معها في عملهم المبكر بدائرة العلوم الرياضية. لقد أنشأت قبل قليل قضية أن عبارة (يكون مساويا لـ Is equal to) هي علاقة تكافؤ. تابع الموضوع عبر تأمل العلاقتين (يكون أكبر من Is greater than)، و (يكون أصغر من Is smaller than) بالنسبة للأعداد الحقيقية. سيكتشف طلبة صفك، بسرعة. بأن هاتين العلاقتين ليست انعكاسية أو تماثلية، لكنهما علاقتان انتقالية. إن تغييرا ممتعا نتلمسه في العلاقة (لا يكون مساويا لـ Is not equal to) بالنسبة للأعداد الحقيقية. ورغم أن هذه العلاقة ليست انعكاسية، فإنها تعد تماثلية في خصائصها. وقد يعتقد الطلبة، أيضا، بأن هذه العلاقة هي انتقالية ولكن مثالا عددياً – بسيطا سوف يبرهن على تهافت هذا الاعتقاد. $7+2 \neq 9+6$ وكذلك $11+4 \neq 7+2$ ولكن $11+4 = 9+6$. لذا فإن العلاقة (لا يكون مساويا لـ) ليست انتقالية.

لاشك بأن جميع العلاقات التي تناولناها بالدراسة هي ليست علاقة تكافؤية. دع الطلبة يتناولون بالدراسة علاقة أخرى. على سبيل المثال، (هو مضاعف is multiple of) أو (قابل للقسمة على is divisible by) و (هو عامل لـ is a factor of) بالنسبة للأعداد الصحيحة. إن جميع هذه العلاقات تمتاز بكونها انعكاسية وانتقالية، ولكن أيا منها لا يعد تماثليا. ادع طلبتك إلى برهنة هذه الحقائق جبريا. بالنسبة للعلاقة الأولى، على سبيل المثال، قد يلجأ الطلبة إلى كتابة $a = kb$ و $b=me$. حيث يمثل كل من m، k أعداداً صحيحة. ويبدو واضحا بأن $a=1a$ قابل للقسمة على a (انعكاسية) ؛ $a / b = k$ ونظرا لكون a قابل للقسمة على b ولكن $b / a = 1 / k$ وهو ليس عددا صحيحا، لذا فإن b غير قابلة للقسمة على a (غير متماثلة)؛ $a = kb$ وكذلك $b= mc \rightarrow a=k(mc)$ أو $a/c=km$، وهو عدد صحيح، نظرا لأن حاصل ضرب عددين صحيحين يكون عددا صحيحا، (مجموعة الصحيحة قد أغلقت عند الضرب)، لذا فإن a قابل للقسمة على c (انتقالية).

تأمل بعد ذلك بعض العلاقات السائدة في ميدان الهندسة. في البداية استكشف العلاقات (هو متطابق مع is congruent to) وكذلك (هو مشابه لـ is similar to) بالنسبة للأشكال الهندسية. وسيجد الطلبة صعوبة محدودة في تمييز أن هاتين العلاقتين هما علاقتان متكافئتان. ادع الطلبة إلى اختيار كل من هاتين العلاقتين عندما تكون مرفوضتين. آنذاك ستظهر كل منهما فقط خاصية التماثل.

إن العلاقتين (هو مواز لـ is parallel to) و (هو عمودي على is perpendicular to) تمتاز كل منها بكونهما مثيرتان للاهتمام عندما نحاول تطبيقهما على المستقيمات في مستوى وعلى المستويات ذاتها.

على سبيل المثال، بالنسبة للمستقيمات في مستوى فإن (هو موازِ لـ) تمتاز بكونها تماثلية وانتقالية، ولكن (هو عمودي على) تمتاز بكونها تماثلية فقط. اطلب من طلبة الصف تبرير ذلك. وسيلجأون إلى استدعاء أفكار وآراء من الهندسة مثل (المستقيمات الموازية لنفس المستقيم توازي بعضها الآخر) المستقيمات المتعامدة على نفس المستقيم توازي بعضها الآخر إن هذه العلاقات يمكن أن تناقض كتمارين.

إن الطلبة الذين يتمتعون ببعض المعرفة حول نظرية المجموعة يمكن أن يستكشفوا العلاقتين (هو مساوي لـ is equal to)، و(هو مكافئ لـ is equivalent to) عند تطبيقها على المجموعات. نظرا لكون المجموعات المتساوية هي تلك المجموعات التي تحتوي على عناصر متماثلة، يبدو واضحا بأن (هو مساوي لـ) هي علاقة تكافؤية.

تمتلك المجموعات "المتكافئة" نفس العدد من العناصر (يمكن أن توضع عناصرها في توافق واحد – لـ – واحد بين بعضها)، ولكن ليس من الضروري تماثلها. إن انعكاسا بسيطا يظهر بأن (هو مكافئ لـ) هي علاقة تكافؤية أيضاً. إن علاقة ممتعة أخرى هي (هو تكملة لـ is the complement of) عندما تطبق على المجموعات. ينبغي أن يكتشف طلبة الصف بأن هذه العلاقة هي علاقة تماثلية، ولكنها ليست انعكاسية أو انتقالية. (إذا كانت a متممة b وكانت b متممة c بعدئذ a ليست متممة c ولكن على الأصح a=c).

إن علاقة ممتعة أخرى من نظرية الأعداد هي (هو منطبق على وحدة Modulo m) بالنسبة للأعداد الصحيحة. إن الطلبة الذين يمتلكون معرفة كافية بهذا المبدأ ينبغي أن يكونوا قادرين على البرهنة بسهولة بأن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤية، باستخدام الجبر البسيط، $a\equiv(\text{mod } m)$ وبما أن $a-a=Om$ (تبرهن

خاصية الانعكاسية)، $a \equiv b(\text{mod } m) \rightarrow b \equiv a\ (\text{mod } m)$

وبما أن $b-a=-(a-b) = -km$ (تبرهن خاصية التماثل)،

وأن $a \equiv b\ (\text{mod } m)$ $b \equiv c(\text{mod } m) \rightarrow a \equiv c(\text{mod } m)$

وبما أن $a-c = (a-b) + (b-c) = pm+km = m(p+k)m$

(تبرهن خاصية الانتقال).

إن الطلبة الذين يمتلكون معرفة كافية بالمنطق الرمزي يمكن أن يدعون إلى تأمل العلاقة (يقتضي ضمنا Implies) بالنسبة للقضايا (مثال كما يرمز لها بالرموز r, q, p).

إن الطالب اليقظ سوف يدرك بأن هذه العلاقة هي علاقة انعكاسية، $p \rightarrow p$ (نظرا لأن أي قضية تقتضي ضمنا ذاتها) وكذلك انتقالية، $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ (نظرا لأن هذا الأمر يمكن البرهنة على كونه تكرارا للمعنى باستخدام جداول الصدق). لكنها ليست تماثلية. لأن $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ ليست صادقة؛ (نظرا لأن صدق القضية لا يضمن صدق معكوسها).

والآن حاول أن توسع مساحة مفهوم العلاقات من الإعدادات الرياضية الصارمة لكي يتضمن العلاقات الموجودة بين الأشخاص والأماكن، والأشياء. وسيجد طلبتك بأن هذا الأمر يعد موردا للثقافة والتسلية. اقترح علاقة مثل (هو أب لـ is father of). إن انعكاسا بسيطا يوضح بأن هذه العلاقة ليست انعكاسية، وليست تماثلية، كما أنها ليست انتقالية !. يبدو واضحا بأن a لا يمكن أن تكون والداً لذاتها (ليست انعكاسية) ؛ وأنه إذا كان a أب لـ b، بعدئذ يكون b ابنا أو بنتا وليس أبا لـ a (ليست تماثلية) ، وأنه إذا كان a أبا لـb، وأن b هو أب لـ c، بعدئذ فإن a هو جد c وليس أبا له (ليست انتقالية)!.

إن علاقات كثيرة مماثلة يمكن دراستها عن كثب، وبضمنها (هي أم لـ is mother of)، و(هو أخ لـ is brother of). (تحذير: علاقة انتقالية وليست تماثلية، نظرا لأن b قد تكون أختا لـ a)، (هي أخت لـ is sister of)، (هو قريب لـ is sibling of) (إن هذه العلاقة هي تماثلية)، (هو قرين لـ is spouse of)، (هو سلف لـ is ancestor of)، (هو منحدر من is the descendent of)، (هو أكثر طولا من is taller than)، وكذلك (يزن أكثر من Weigh more than). إن أيا من هذه العلاقات يمكن استكشافها في الحس السالب Negative sense وكذلك بالحس الموجب. بالنسبة للأماكن، يستطيع الطلبة تأمل علاقات مثل: (هو شمال is north of)، (هو غرب is west of). (تحذير: إن الانتقالية ليس من الضروري صدقها إذا اختيرت الأماكن من أي مكان في العالم بدلا من منطقة محددة أو بلد واحد)، (هو على ارتفاع أكبر من is at a higher altitude than)، (يبعد ميلا واحدا بالضبط عن is exactly in mile from) (تماثلية فقط)، وكذلك (هو أقل من ميل واحد بالضبط من is less than one mile from) (انعكاسية وتماثلية). إن العلاقات بين الأشياء قد تتضمن: (هو فوق is above)، (هو أكبر من is older than)، (يكلف بقدر costs as mush as)، وكذلك (يكلف أكثر من costs more than).

التقويم Evaluation

إن الطلبة الذين نجحوا بالوصول إلى هدف الأداء سيكونون قادرين على إجابة أسئلة تشابه الأسئلة الآتية:

1- عين كل من العلاقات الآتية هل هي علاقات: انعكاسية، أو تماثلية، أو انتقالية، أو تكافؤية:

أ- (هي مكملة لـ is supplementary to) بالنسبة للزوايا.

ب- (هو مطابق لـ is congruent to) بالنسبة لقطع المستقيم.

ج- (هي مجموعة جزئية لـ is subset of) بالنسبة للمجموعات.

د- (هي مجموعة جزئية حقيقية لـ is a proper subset) بالنسبة للمجموعات.

هـ- (هي مكافئة لـ is equivalent to) بالنسبة للقضايا.

و- (هو أكثر غنى من is wealthier than) بالنسبة للشعوب.

ز- (هو أصغر من is smaller than) بالنسبة للأشياء.

ح- (هو أبرد من is colder than) بالنسبة للأماكن.

2- برهن جبريا بأن العلاقة (هو متمم لـ) هي تماثلية بالنسبة للزوايا الحادةن ولكنها ليست انعكاسية أو انتقالية.

3- أي من العلاقات الآتية انعكاسية وانتقالية، ولكنها ليست تماثلية ؟

أ- (هو أس صحيح موجب لـ is a positive integral power of) بالنسبة للأعداد الحقيقية.

ب- (له نفس المساحة مثل has the same area as) بالنسبة للمثلثات.

ج- (هي نقيض لـ is the converse of) بالنسبة للقضايا.

د- (هو أكثر شبابا من is younger than) بالنسبة للناس.

36 تجاوز منطقة يتعذر بلوغها
Bypassing an Inaccessible Region

سوف تعرض هذه الوحدة مسألة إنشاء خط مستقيم خلال منطقة يتعذر بلوغها باستخدام مسطرة عدلة وفرجار، وبدون استخدام أدوات في / أو فوق هذه المنطقة التي يتعذر بلوغها. إن هذا النشاط سيوفر فرصة مناسبة للطلبة لإظهار الموهبة والقدرة على الإبداع.

أهداف الأداء Performance Objective

1- لديك قطعة خط مستقيم مع نقطة نهاية على حدود المنطقة التي يتعذر بلوغها، وسيقوم الطلبة، مستخدمين المسطرة العدلة والفرجار بإنشاء قطعة مستقيم أخرى على خط مستقيم واحد Collinear مع المستقيم المعطى، وفي الجهة المقابلة من المنطقة التي يتعذر بلوغها (إن نقطة النهاية سوف تقع على حدود هذه المنطقة).

2- لديك نقطة ما على إحدى جهات المنطقة التي يتعذر بلوغها، وسيقوم الطلبة باستخدام مسطرة عدلة وفرجار لإنشاء قطعتي مستقيم على استقامة واحدة، تمتلك كل منها نقطة بوصفها نقطة نهاية ولا يقطع أي منها المنطقة متعذرة البلوغ.

التقييم السابق Preassessment

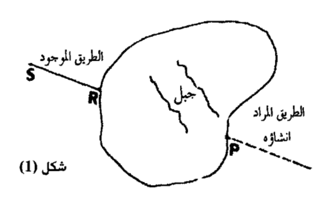
ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالإنشاءات الهندسية الأولية باستخدام مسطرة عدلة وفرجار.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لإحداث اهتمام ابتدائي بالموضوع، ابدأ هذا الموضوع باصطناع قصة حول بلدين يفصل بينهما جبل من الجبال، وأن كلا منهما يرغب بإنشاء طريق مستقيم ونفق Tunnel خلال هذا الجبل. ونظرا لأن كلا من هذين البلدين لا يستطيع اتخاذ قرار بصدد أسلوب حفر النفق. فإنهما قد اتفقا سوية على إنشاء طريق على أحد جوانب الجبل عند النقطة المتوقعة للنفق (استمرار الطريق المستقيم على الجانب الآخر من الجبل) والتي سينشأ عندها خلال الجبل.

باستخدام مسطرة عدلة وفرجار، فقط، سيحاول الطلبة رسم مسار الطريق الجديد.

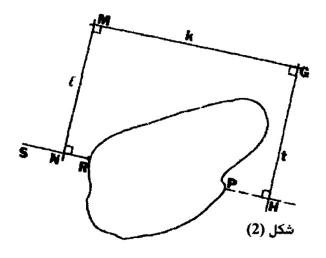
حالما فهم الطلبة المسألة، دعهم يقومون برسم مخطط (خرائط) لهذه الحالة.



شكل (1)

ينبغي أن ينشأ الطلبة على امتداد واحد امتدادا لقطعة المستقيم $\overline{SR}$ عند النقطة p (باستخدام منطقة عدلة وفرجار) دون أن يلمسوا، أو يمرون خلال المنطقة التي يتعذر بلوغها.

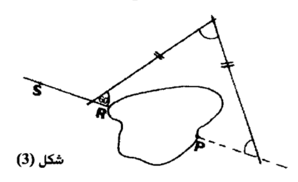
هناك عدة طرق لإنشاء المتسامت الممتد بقطعة المستقيم $\overline{SR}$ عند النقطة P. إن إحدى هذه الطرق تكمن في إقامة مستقيم عمودي (المستقيم ℓ) إلى $\overline{SR}$ عند نقطة مناسبة N على قطعة المستقيم $\overline{SR}$. وبعدئذ وعند نقطة ملائمة M من المستقيم ℓ يقام عمود (المستقيم k) على المستقيم ℓ (أنظر شكل 2).



شكل (2)

عند نقطة مناسبة G من المستقيم k أقم عمودا (المستقيم t) على المستقيم k. بعدها يتم الحصول على النقطة H على المستقيم t. بحيث أن GH=MN. إن المستقيم المنشأ عموديا على المستقيم t عند النقطة H سوف يكون المستقيم الذي نحتاجه خلال النقطة P ويكون على امتداد واحد (متسامتا) مع قطعة المستقيم SR. (ينبغي ملاحظة أنه بالرغم من كون P متسامتة (على امتداد واحد) مع قطعة المستقيم $\overline{SR}$ فإنه لا حاجة لها، افتراضيا. بالنسبة للإنشاء). إن تبرير هذه الطريقة يعود إلى أن المستطيل (مطروحا منه قسم من ضلع) قد تم إنشاؤه فعليا.

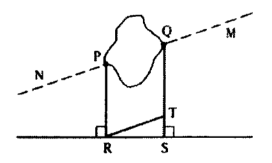
هناك طريقة ثانية للحل تتضمن استبدال المستطيل أعلاه بمثلث متساوي الأضلاع، نظرا لسهولة إنشاء زوايا بقياس 60°. يعرض شكل 3 هذه الطريقة، ويتوقع أن يكون واضحا بذاته.



شكل (3)

إن مسألة إنشاء خط مستقيم (خلال) منطقة يتعذر بلوغها، عندما تحدد نقطتي نهاية فقط (عن إحدى جهتي المنطقة)، هي مسألة تحمل تحديا كبيرا. ويمكن أن تصاغ أحداث قصة حول هذا الموضوع بصورة طبيعية لكي تجعلها أكثر قربا لفهم الطلبة.

لإنشاء قطعتي مستقيم متسامتتين عند كل من النقطتين (Q,P) مثبتة على جهتين متقابلتين من منطقة يتعذر بلوغها، ابدأ برسم أي قطعة مستقيم مناسبة من النقطة p، وأقم مستقيما عموديا عليه عند نقطة مناسبة R. إن هذا المستقيم العمودي ينبغي أن لا يقطع المنطقة التي يتعذر بلوغها – أنظر شكل 4.



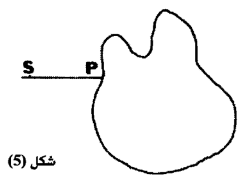
شكل (4)

والآن أنشئ عمودا من النقطة Q إلى المستقيم الذي تم رسمه أخيرا، قاطعا إياه عند النقطة S. ثم عين النقطة T على $\overleftrightarrow{QS}$ بحيث PR=QS. ارسم قطعة المستقيم $\overline{RT}$. عند النقطة p أنشئ الزاوية $\angle PRT \cong \angle RPN$، وعند النقطة Q أنشئ $\angle QTR \cong \angle TQM$. إن هذا سيكمل الإنشاء المطلوب، وبما أن $\overline{NP}$ و $\overline{QM}$ هما امتدادين للضلع $\overline{PQ}$ في متوازي الأضلاع PRTQ، وعليه يعدان متسامتان (على استقامة واحدة).

هناك عدة طرق أخرى لحل هذه المسألة. تتضمن كثير منها مثلثات متشابهة لغرض إنشاء المستقيمين المطلوبين لاحقا. من ناحية ثانية، فإن الطلبة الذين يختارون مباشرة العمل على هذه المسألة، فإنهم جديرون بأن يرشدوا إلى نشاط مبدع.

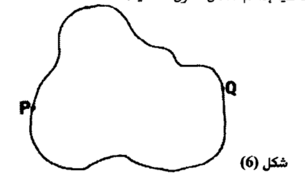
التقييم اللاحق Postassessment

1– ليقم الطلبة بإنشاء (امتداد) لقطعة المستقيم $\overline{SP}$ على الجهة الثانية من المنطقة التي يتعذر بلوغها (باستخدام مسطرة عدلة وفرجار فقط دون لمس، أو اجتياز المنطقة التي يتعذر بلوغها).



شكل (5)

2– ليقم الطلبة بإنشاء قطعتي مستقيم متسامتيتين على نهايتين متقابلتين (Q,P) في المنطقة التي يتعذر بلوغها (باستخدام مسطرة عدلة وفرجار فقط، دون لمس، أو اجتياز المنطقة التي يتعذر بلوغها). إن فقرتي التقييم اللاحق هاتين أصبحتا أكثر تحديا إذا تم نشدان الطرق الأصلية.



شكل (6)

إن هذا القرار على مستوى قابلية طلبة الصف.

37 الزاوية التي يتعذر بلوغها
The Inaccessible Angle

ستوفر هذه الوحدة، من خلال تطبيق ترفيهي، فرصة مناسبة للطلبة لاستخدام جملة من العلاقات الهندسية التي تلقنوها في أساليب جديدة. كذلك ستفتح الباب أمام حشد كبير من الأنشطة الإبداعية.

هدف الأداء Performance Objective

لديك زاوية يقع رأسها في منطقة يتعذر بلوغها (يشار إليها فيما بعد كزاوية يتعذر بلوغها) سيقوم الطلبة بإنشاء منصف زاويتها باستخدام مسطرة عدلة وفرجار.

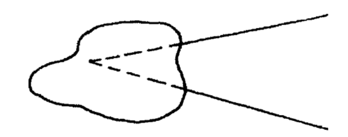
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالإنشاءات الهندسية الأساسية وباستخدام مسطرة عدلة وفرجار. وتأكد بأن الطلبة قادرين على تنصيف زاوية محددة، بصورة صحيحة، مستخدمين مسطرة عدلة وفرجار.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد أن يكمل الطلبة استعراض الإنشاءات الهندسية الأولية أعرض لهم الموقف الآتي:

مسألة Problem: لديك زاوية برأس يتعذر بلوغه (يعني، أخبر الطلبة بأن رأس الزاوية يقع في منطقة، وعبر منطقة لا يمكن استخدام مسطرة عدلة وفرجار معها)، أنشئ منصف الزاوية باستخدام مسطرة عدلة وفرجار فقط.



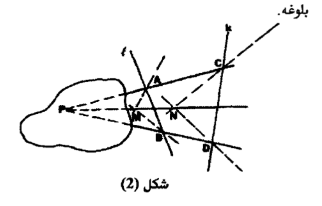
شكل (1)

في البداية، ستكون محاولات معظم الطلبة، على الأرجح، غير صحيحة. ولكن الاعتناء باستجابات الطلبة، وأخذها بعين الاعتبار سيسهم بدور دليل مرشد إلى الحل الصحيح. سوف يعرض الطلبة في بعض الأحيان بعض الحلول الغريبة (والخلاقة). لذا ينبغي أن تمنح جميع هذه الحلول اهتماما كافيا.

إن الإظهار الأفضل للمورد الأساسي لطبيعة الإبداع الذي توفره هذه المسألة سيتضمن عرض ثلاثة حلول متباينة.

الحل Solution I

ارسم أي مستقيم ℓ يقطع شعاعي الزاوية التي يتعذر بلوغها في النقطتين A و B. ضع الرمز P لرأس الزاوية الذي يتعذر بلوغه.



شكل (2)

أنشئ منصفي الزاوية $\angle PAB$، $\angle PBA$، واللذان يتقاطعان فيما بعد عند النقطة M. ذكّر الطلبة بأنه لما كانت منصفات زوايا المثلث (هنا ΔAPB) تتلاقى في نقطة واحدة، فإن منصف الزاوية $\angle P$، والذي نحاول إنشاءه، ينبغي أن يحتوي على النقطة M. وبنفس الطريقة، ارسم أي مستقيم k، يقطع شعاعي الزاوية التي يتعذر بلوغها في النقطتين D,C. أنشئ منصفي الزاويتين $\angle PCD$ و $\angle PDC$ واللذان يتقاطعان عند النقطة N. مرة ثانية، يجب أن يدرك الطلبة بأنه لما كانت منصفات زوايا المثلث (في هذه الحالة المثلث ΔCPD) تتلاقى في نقطة واحدة، فإن منصف الزاوية $\angle P$ ينبغي أن يحتوي على

النقطة N. وعليه لقد تمت البرهنة بأن المستقيم المطلوب يحتوي على النقطتين M ؛ N؛ وعليه برسم $\overleftrightarrow{MN}$ يكون الإنشاء قد اكتمل.

الحل Solution II

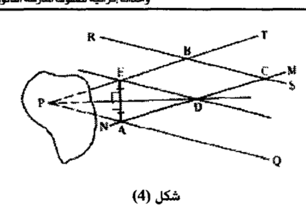
ابدأ هذه الطريقة بإنشاء مستقيم مواز لأحد شعاعي الزاوية التي يتعذر بلوغها. أنظر شكل 3. ويمكن أن ينفذ هذا بأي طريقة من مجموعة الطرق المتاحة.

في شكل 3. $\overleftrightarrow{RS}$ يوازي $\overleftrightarrow{PT}$ (شعاع الزاوية التي يتعذر بلوغها P∠)، ويقطع $\overleftrightarrow{PQ}$ عند النقطة A. أنشئ منصف زاوية SAQ∠ والذي سيقطع $\overleftrightarrow{PT}$ عند النقطة B. بما أن $\overleftrightarrow{SR} // \overleftrightarrow{PT}$، PBA≅∠SAC∠. ولكن PAB ≅ ∠CAQ ≅∠ SAC∠. وعليه PAB≅∠PBA∠ وبذلك يصبح المثلث PAB متساوي الساقين

ونظرا لكون منصف الزاوية العمودي على قاعدة المثلث متساوي الساقين ينصف أيضا زاوية الرأس، فإن العمود المنصف لقطعة المستقيم $\overline{AB}$ هو منصف الزاوية المطلوب للزاوية التي يتعذر بلوغها (P∠).

الحل Solution III

ابدأ بإنشاء المستقيم ($\overline{MN}$) موازيا لأحد شعاعي الزاوية ($\overrightarrow{PT}$) التي يتعذر بلوغها (P∠)، ويقطع الشعاع الثاني في النقطة A. أنظر شكل 4.



شكل (4)

بعدها أنشئ المستقيم ($\overleftrightarrow{RS}$) موازيا للشعاع لآخر ($\overrightarrow{PQ}$) إلى الزاوية التي يتعذر بلوغها ويقطع $\overrightarrow{PT}$ وكذلك $\overleftrightarrow{MN}$ عند النقطتين B، C على التوالي. باستخدام زوج من الفرجارات، أعمد إلى تأشير قطعة المستقيم $\overline{AD}$ على $\overline{AC}$ بنفس طول $\overline{BC}$. خلال النقطة D، أنشئ $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{PQ}$، حيث تقع E على $\overrightarrow{PT}$. والآن يمكن بسهولة إظهار بأن ED=AD. (لأن EBCD متوازي أضلاع وأن ED = BC؛ وبما أن PEDA هو متوازي أضلاع، كل ضلعين متجاورين فيه متطابقين ($\overline{ED} \cong \overline{AD}$)، فإن الشكل هو معين. وعليه، فإن القطر $\overline{PD}$ هو منصف الزاوية التي يتعذر بلوغها. ويمكن إنشاء $\overline{PD}$، ببساطة عن طريق تنصيف الزاوية EDA∠ أو إقامة العمود المنصف لـ $\overline{EA}$.

بعد عرض هذه الحلول على طلبتك، ينبغي أن تأتي بعدها الحلول التي اخترعها الطلبة مباشرة. كما ينبغي أن يشجع التفكير لتحفيز قدرات إبداعية أكبر.

التقييم اللاحق Postassessment

اعرض للطلبة الزاوية التي يتعذر بلوغها واطلب منهم العمل على تنصيفها.



إنشاءات مثلث

Triangle Constructions

غالبا ما يعمد المعلمون إلى تبرير مسلمات التطابق Congruence Postulates باللجوء إلى عرض أن المثلثات المنفردة يمكن إنشاءها من بيانات محددة مثل أطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث، أو ربما طول ضلعين من أضلاعه وقياس الزاوية المتضمنة. إن هذه الوحدة ستوسع من دائرة المناقشة الأولية لإنشاءات المثلث بحيث تشمل مسائل تثير المزيد من الاهتمام.

هدف الأداء Performance Objective

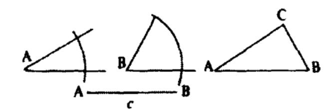
لديك قياسات الأجزاء الثلاثة من المثلث (والتي تحدد المثلث)، وسيقوم الطلبة بتحليل، وإنشاء المثلث المطلوب باستخدام مسطرة عدلة وفرجار.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالإنشاءات الهندسية الأولية ،والتي غالبا ما تدرس في مساق الهندسة بالمدارس الثانوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

للبدء بتحسين اطلاع الطلبة على هذا الموضوع، أجعلهم يباشرون إنشاء مثلث، حيث تتوفر قياسات زاويتين من زواياه والضلع المعطى.



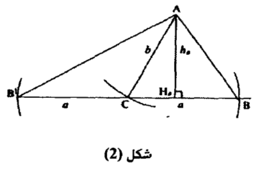
شكل (1)

سيقوم الطلبة برسم مستقيم، وتأشير طول قطعة المستقيم $\overline{AB}$ (يشار إليه في بعض الأحيان بالرمز c، وهو طول الضلع المقابل للزاوية $\angle C$) بإنشاء الزاويتين A، B عند أي نهاية من المستقيم AB، سوف يجدون في آخر الأمر بأنهم قد أنشأوا مثلثا منفردا ΔABC.

لا ريب، بأنه لو توفرت لدى الطلبة قياسات الزوايا الثلاثة في مثلث، فإن كل طالب سيقوم بإنشاء مثلث بمساحة تختلف عن مساحة المثلث الذي أنشأوه بقية زملاؤه (رغم أن جميع هذه المثلثات تمتلك نفس الشكل). والآن، إذا زود الطلبة بأطوال الأضلاع الثلاثة لمثلث فإنهم سيقومون جميعا بإنشاء مثلثات متطابقة فيما بينها. عند هذه النقطة ينبغي أن يدرك الطلبة بأن بيانات معلومة سوف تحدد مثلثا "منفرداً" بينما لا تنجح معلومات أخرى في تحقيق ذلك.

من أجل هذا فإن الطالب سيكون محددا في تحري مثل هذه الحالات حيث تتوفر قياسات الأضلاع والزوايا فقط. وقد يرغب أخذ بعض أجزاء المثلثات بعين الاعتبار، كذلك اعرض المسألة الآتية:

قم بإنشاء مثلث إذا كان لديك طول ضلعين من أضلاعه، ومقدار الارتفاع بالنسبة لأحد هذين الضلعين. يجب أن ندون هذه المسألة مثل $[a,b,h_a]$، حيث يمثل h_a طول الارتفاع إلى الضلع a.



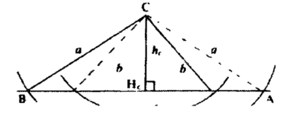
شكل (2)

لإنجاز هذا الإنشاء، خذ النقطة H_a على أي مستقيم وأقم العمود h_aA (باستخدام طريقة المسطرة العدلة والفرجار التقليدية) وبطول مقداره h_a. بواسطة القوس (A,b) (ملاحظة: إن الرمز المزدوج المرتب هو طريق مختصر، فحسب، للإشارة إلى الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها b) اقطع مستقيم القاعدة في النقطة C، ثم بالقوس (C,a)، اقطع مستقيم القاعدة ذاتها في النقطتين B',B. إن الحلين هما المثلث ABC، والمثلث AB'C، والذي يحوي كل منهما على البيانات $[a, b, h_a]$. إن الفحص الإضافي

لهذا الحل سوف يظهر بأن $b > h_a$ يعد شرطا ضروريا، وأنه في حالة كون $b=h_a$، فإنه سيكون هناك حل واحد فقط للمسألة.

إن مسألة أكثر بساطة تتألف من إنشاء مثلث فيه $\{a,b,h_c\}$، هنا يبدأ الطالب بطريقة مماثلة. على أي مستقيم، أقم العمود Hc وبطول مقداره hc. عند النقطة C بالجهة البعيدة من h_c، ارسم (C,a) و (C,b). وستكون نقاط تقاطعهما مع خط القاعدة الأساسي هي النقطتين A و B على التوالي. مرة ثانية، ينبغي فتح باب مناقشة موضوع التفرد.

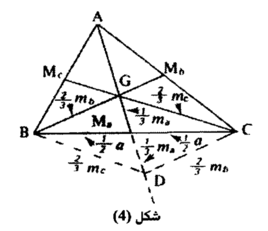
إن الشكل السابق سيساعد في إثراء هذه المناقشة.



شكل (3)

إن بعض إنشاءات المثلث تتطلب بحثا جيدا ومزيدا من التحليل قبل البدء بالإنشاء على أرض الواقع. إن مثالا واضحا على مثل هذه المسألة يكمن في إنشاء مثلث قد أعطيت أطوال مستقيماته المتوسطة الثلاثة $\{m_a, m_b, m_c\}$.

ترتكز إحدى الطرق المستخدمة لتحليل هذه المسألة إلى أخذ الناتج النهائي ΔABC بعين الاعتبار.



شكل (4)

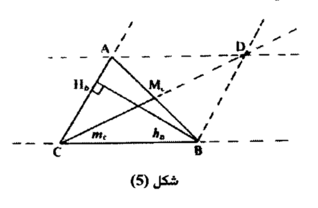
يكمن الهدف هنا في قدرتنا على إنشاء واحد من المثلثات المتعددة والمعروضة في الشكل أعلاه عبر مجموعة من الطرق الأولية. إن مد m_a (المستقيم المتوسط في الضلع a)، بمقدار ثلث طوله باتجاه النقطة D، ثم رسم $\overleftrightarrow{BD}$ وكذلك $\overline{CD}$ سنكون قد حصلنا على المثلث BGD والذي يسهل إنشاؤه. بما أن المستقيمات المتوسطة تقسم بعضها الآخر إلى ثلاثة أقسام متساوية، سيكون واضحا أمامنا بأن $BG = 2/3\ m_b$. وبما أن $GM_a = DM_a = 1/3 m_a$، (بالإنشاء) وأن $BM_a = CM_a$ فإنا سنستنتج بأن BGCD هو متوازي أضلاع. وعليه فإن

$$BD = GC = 2/3\ m_c$$

بعد الآن من السهل إنشاء المثلث BGD، بما أن كلا من طول أضلاعه يساوي ثلثي طول المستقيمات المتوسطة. وبعد إنشاء المثلث BGD، سيكون الطلبة قادرين على إكمال الإنشاء المطلوب بواسطة: (1) مد BG بمقدار نصف طوله إلى النقطة M_b. (2) مد $\overline{DG}$ إلى طوله الذاتي إلى النقطة A، وكذلك (3) مد BM_a إلى طوله الذاتي إلى النقطة C (حيث M_a هي نقطة منتصف $\overline{DG}$). ويمكن الحصول على المثلث المطلوب لاحقا، عن طريق رسم $\overrightarrow{AM_b}$ لكي يقطع $\overrightarrow{BMa}$ عند النقطة C، وكذلك رسم $\overline{AB}$.

لا تقتصر هذه المسألة على إعادة النظر في المفاهيم المهمة التي استفادها الطلبة من الهندسة الأولية، ولكنها توفر أيضا للطلبة فرصة مناسبة للتمرن على الاستدلال "المعاكس" Reverse في تحليل المسألة.

لتوفير ممارسة وتطبيق إضافة دع الطلبة ينشئون المثلث ABC في ضوء المعلومات الآتية $\{a, h_a, m_c\}$.



شكل (5)

مرة ثانية، اجعل الطلبة يبدأون بتفحص المثلث المطلوب. يجب أن يلاحظ الطلبة بأن ΔCBH_b يمكن إنشاؤه بسهولة عن طريق إقامة عمود عند H_c متعامدا على $\overrightarrow{AC}$ وبطول مقداره h_b. عند النهاية البعيدة B، ارسم (B, a) لكي يقطع $\overleftrightarrow{AC}$ في النقطة C، ولإكمال المثلث CBH_b.

إن التفحص الإضافي للشكل السابق سيقترح إمكانية إنشاء المثلث CDB أيضاً. ارسم المستقيم ($\overleftrightarrow{DB}$) موازيا للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ وقاطعا القوس $(C, 2m_c)$ عند النقطة D. ولإيجاد A،

ارسم المستقيم ($\overleftrightarrow{AD}$) موازيا للمستقيم $\overleftrightarrow{CB}$ وقاطعا $\overleftrightarrow{CH_b}$ في النقطة A. بما أن الشكل ADBC هو متوازي أضلاع، فإن $\overleftrightarrow{CD}$ بنصف $\overleftrightarrow{AB}$ عند النقطة M_C وأن m_c = $CM_c = \frac{1}{2}CD$. وعليه فإن المسألة قد تم تحليلها بأسلوب معاكس، وبعدئذ تم إنشاء المثلث المطلوب.

عندما تأخذ بعين الاعتبار قياسات أجزاء أخرى من المثلث مثل منصفات الزوايا، ونصف قطر الدائرة الماسة، ونصف قطر الدائرة المحوطة، ونصف محيط الشكل Semi-perimeter (بالإضافة إلى قياسات الأجزاء التي عولجت مبكرا في هذا الأنموذج) بعدها ستظهر أمامنا احتمالات 179 إنشاء ممكن لمسائل المثلث، حيث تتألف كل منها من قياسات هذه الأجزاء الثلاثة من المثلث. قد يكون بعضها بسيطا إلى حد كبير (مثال، $\{a, b, c\}$) وهناك بعض آخر أكثر صعوبة وتعقيدا (مثال، $\{h_a, h_b, h_c\}$).

تسهم مسائل الإنشاء من هذا النوع بدور منصة الوثوب إلى دراسة أكثر تعمقا بهذا الموضوع، بالإضافة إلى مسائل إنشاءات هندسية أخرى. إن كتابا قد نشر حديثا، ويحتوي على مزيد من مفردات هذا الموضوع (تتضمن قائمة متكاملة لإنشاءات المثلث الـ 179!) بالإضافة إلى تشكيلة من موضوعات مثيرة عن إنشاءات هندسية، (مثال، استعراض للإنشاءات الأولية، ومجموعة من التطبيقات، وإنشاءات الدائرة، ...، الخ) يتوفر لدى:

Dale Seymour / Cuisennaire
10 Bank Street
White Plains, NY 10602

وهو بعنوان:

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بإنشاء المثلثات الآتية:

1- $\{a, b, m_a\}$.
2- $\{a, h_b, t_c\}$.
3- $\{a, h_b, h_c\}$.
4- $\{ha, m_a, t_a\}$.
5- $\{ha, h_b, h_c\}$.

ملاحظة: t_a هو طول منصف الزاوية A.

39 معيار الإنشاء
The Criterion of Constructibility

ستسهم هذه الوحدة في تطوير معيار إنشاء للأدوات الأقليدية التقليدية Euclidean Tools، وهي المسطرة العدلة والفرجار.

أهداف الأداء Performance Objective

1- سيبين الطلبة معيار الإنشاء.

2- سيعرض الطلبة صياغات جبرية بأسلوب هندسي (بدلالة أطوال محددة).

التقييم السابق Preassessment

اطلب من الطلبة أن يمثلوا هندسياً AB+CD و CD− AB، AB −CD، حيث أن ABو CD معطيان.

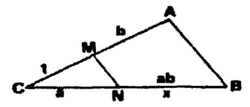
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ينبغي أن يكون معظم الطلبة قادرين على أداء المسألة أعلاه بنجاح. والآن افترض AB=a وأن CD=b.

A___a___B C_____b_____D

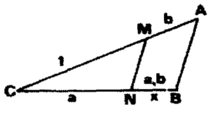
إن الاهتمام المنطقي الثاني سينصب على عرض حاصل ضرب قطعتي خط مستقيم. في هذه الحالة لابد من استخدام قطعة مستقيم بوحدة طول واحدة. ولإنشاء ab، ينبغي الأخذ بعين الاعتبار الحالتين الآتية: (I) عندما يكون $1<a$ و $1<b$، وكذلك (II) عندما يكون $1>a$ و $1>b$.

في الحالة الأولى (I)، سيقوم الطلبة بإنشاء الشكل الآتي. لاحظ بأن $\overline{MN}//\overline{AB}$ وأن الزاوية $\angle C$ هي أي زاوية مناسبة.



بما أن $\overline{MN}//\overline{AB}$، $a/x=b/1$ وأن $x=ab$، وعليه فإن NB هي قطعة المستقيم بالطول المطلوب (يعني a,b). ينبغي أن يلاحظ بأن $a<ab$ وكذلك $b<ab$ والذي يمكن توقعه إذا كانت $a>1$ و $b>1$.

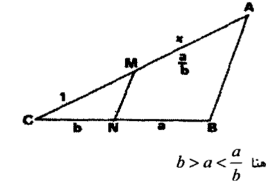
في الحالة الثانية (II)، سوف يستمر الطلبة بنفس الطريقة كما في الحالة (I)، ولكن بما أن $a<1$ و $b<1$، ينبغي أن يكون واضحا بأنه بناء على المفاهيم الهندسية فإن $a>ab$ وكذلك $b>ab$.



والآن يمكن أن نتحدى الطلبة باكتشاف أنماط مشابهة لإنشاء قطعة مستقيم والذي يمثل خارج قسمة قطعتي المستقيم المحددتين. وللمرة الثانية سيكون أمامنا حالتين بحاجة لكي نأخذهما بعين الاعتبار:

الحالة (I) $a<b<1$. للمرة الثانية دع الطلبة يقومون برسم الشكل السابق، حيث $\overline{MN}//\overline{AB}$ في هذه الحالة إما أن يكون $a<a/b<b<1$ أو $a<b<a/b<1$. ينبغي أن نحث الطلبة على التأكد من ذلك.

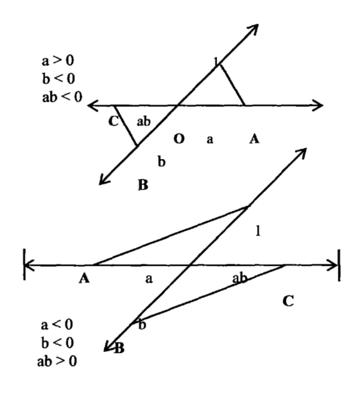
الحالة (II): $b<a\leq1$. استمر بنفس الأسلوب أعلاه لإنشاء الشكل الآتي:



هنا $b>a<\frac{a}{b}$

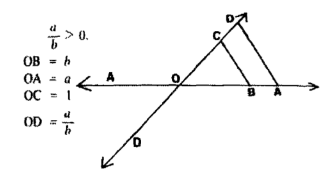
لغاية الآن فإن جميع قطع المستقيم التي أخذت بعين الاعتبار كانت تمتلك طولا موجبا Positive Length. والآن سيصبح الطلبة، شغوفين بالاطلاع حول إمكانية استخدام قطع مستقيم بقيم سالبة لوصف حاصل الضرب وخارج القسمة.

لغرض تأمل قطع المستقيم ذات الأطوال السالبة، ينبغي أن تعرض محاور الأعداد، الأفقية والمائلة Oblique. لإيجاد ab، ثبت A على المحور الأفقي بحيث $a=OA$، وحدد موقع B على المحور المائل بحيث $b=OB$. ارسم مستقيما خلال الـ 1 على المحور المنحرف ونقطة A. من خلال B ارسم مستقيما موازيا للمستقيم الأول، ويقطع المحور الأفقي في النقطة C وعليه $ab=OC$.



سيلاحظ الطلبة بأن كل من a، b قد تم تأشيرهما على محورين مختلفين، وأن حاصل ضرب كل حالة، ab، كان أقل من، أو ،أكبر من صفر على نحو مناسب.

وكما هو الحال سابقا، ينبغي أن نجد حاصل القسمة باعتبار القسمة عملية معكوسة لعملية الضرب. ولإيجاد a/b سنقوم بإيجاد x بحيث $bx = a$، $a > 0$، وكذلك $b > 0$، بعدئذ $a/b>0$.



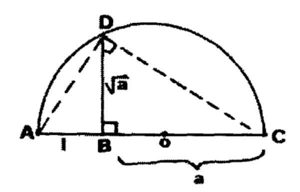
وبالمثل. عندما $a < 0$ و $b > 0$ ينتج أن $\frac{a}{b} < 0$

$$OB = b \quad OA = a \quad OC = 1 \quad OD = \frac{a}{b}$$

ليتأمل الطلبة موضوع القسمة على صفر يعني أين هي B إذا كانت $b=0$ ؟ وماذا سيحصل لـOD ؟

إن العملية الوحيدة المتبقية، والتي ستظهر الحاجة عندها للوصف الهندسي هي أصل الجذر التربيعي. وهنا سيباشر الطلبة إنشاء نصف دائرة على $a+1$ (حيث تنشد قيمة $\sqrt{a}$). بعدئذ وعند نقطة النهاية المشتركة، B، للمقطع 1 وكذلك a، أقم عمودا لقطع نصف الدائرة في النقطة D. وعليه $BD=\sqrt{a}$.

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تطبيق نظريات متوسط التناسب Mean Proportional للبرهنة على هذا.



إن حل مسألة الإنشاء يمكن وصفه كجذر لمعادلة. على سبيل المثال، تأمل مسألة مضاعفة مركب. ينبغي أن نجد حافة المكعب الذي يكون حجمه ضعف حجم المكعب المعلوم. أي، ينبغي أن نجد x، عندما $x^3=2$. إذا استطعنا الحصول على الحل بواسطة عدد محدود من تطبيقات العمليات +، −، ×، ÷ وكذلك $\sqrt{\ }$. باستخدام معطيات قطع المستقيمات ووحدة طول Unit Length. بعدئذ سيكون الإنشاء ممكنا.

بالمقابل، إذا كان الإنشاء ممكنا، يمكننا الحصول عليها بعدد محدود من تطبيقات: الإضافة، والطرح، والمضاعفة، والقسمة، واستخراج الجذر التربيعي، باستخدام معطيات قطع المستقيمات ووحدة طول اختيارية.

ونحن على علم بأن المستقيمات والدوائر التي قمنا بإنشائها يمكن تحديدها إما بالمقاطع المعلومة، أو تلك التي حصلنا عليها من تقاطعات خطين مستقيمين، أو خط مستقيم ودائرة، أو دائرتين.

ولعرض النقيض أعلاه، ينبغي أن نبين بأن هذه التقاطعات يمكن الحصول عليها من معاملات المعادلات، وبعدد محدد من تطبيقات عمليات الجمع، الطرح، الضرب، القسمة، واستخراج الجذر التربيعي.

هنا خطان مستقيمان:

$$y = mx + b$$
$$y = m'x + b' \qquad m \neq m'$$

يتقطعان في النقطة (x,y) وفيهما:

$$x = (b-b')/m-m' \qquad y = (mb' - m'b)/(m-m')$$

إن هذه العلاقات قد تم الحصول عليها من المعادلات بتطبيق العمليات أعلاه. إن معادلة دائرة نصف قطرها r ومركزها (c,d) هي $(x-c)^2+(y-d)^2 = r^2$. ولإيجاد نقطة تقاطع الدائرة مع المستقيم $y=mx+b$، نستطيع التعويض بالنسبة لـy في معادلة الدائرة.

$$(x-c)^2 + (mx+b-d)^2 = r^2$$

ينشأ عن هذا معادلة تربيعية بالنسبة للمتغير x. وبما أن حل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c =0$ هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ونحن على علم بأن المعادلة التربيعية

$$(x-c)^2+(mx+b-d)^2 = r^2$$

لديها جذر يمكننا الحصول عليه من الثوابت المعروفة باستخدام العمليات الخمس المذكورة آنفا.

إن تقاطع الدائرتين يشابه إلى حد كبير تقاطع دائرة مع وتر مشترك. وعليه، يمكن لهذه الحالة أن تختصر لإيجاد تقاطع دائرة مع مستقيم.

معيار الإنشاء Criterion of Constructibility إن إنشاء هندسيا مقترحا سيكون ممكنا باستخدام مسطرة عدلة وفرجار فقط وإذا كانت فقط في حالة كون الأعداد التي تعرف، جبريا، العناصر الهندسية المطلوبة يمكن أن تشتق من تلك التي تعرف العناصر المعلومة بعدد محدود من العمليات المعقولة، واستخراجات الجذر التربيعي.

التقييم اللاحق Postassessment

1- أعد صياغة وألق مزيدا من الضوء على معيار الإنشاء.

2- إذا كان لديك الأطوال 1, a, b أنشئ قطعة مستقيم بطول $\sqrt{ab/a+b}$.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teacher and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.



إنشاء أطوال جذرية
Constructing Radical Lengths

يكثر الطلبة من السؤال حول كيفية إنشاء خط مستقيم بطول $\sqrt{2}$. إن هذا النشاط سوف يصوب محتواه باتجاه هذا السؤال بالإضافة إلى إيجاد أطوال قطع جذرية أخرى.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بإنشاء قطعة بطول جذري محدد، بعد تحديد وحدة طول لها.

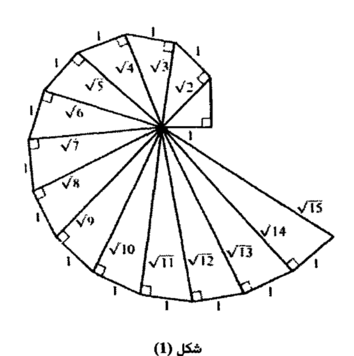
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تطبيق نظرية فيثاغورث، وعلى معرفة كافية بالإنشاءات الهندسية الأساسية باستخدام المسطرة العدلة والفرجار.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

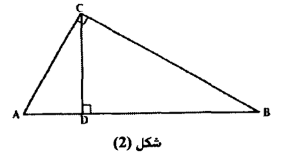
أطلب من التلاميذ إنشاء مثلث على أن يكون طول أحد أضلاعه $\sqrt{2}$ (تأكد من إخبارهم حول ضرورة اختيار وحدة طول مناسبة). وفي جميع الاحتمالات سيعمد الطلبة إلى رسم مثلث متساوي الساقين، قائم الزاوية طول ساقه 1. وسيجدون بواسطة نظرية فيثاغورث بأن طول الوتر هو $\sqrt{2}$.

والآن دعهم يباشرون إنشاء مثلث قائم الزاوية باستخدام هذا الوتر وبساق آخر طوله وحدة واحدة. إن المثلث القائم الزاوية الذي أنشئ حديثا سيكون لديه وتر طوله $\sqrt{3}$. سوف يكتشف الطلبة، بسهولة، الحقيقة التي تستخدم نظرية فيثاغورث بإعادة هذه العملية، وسينجح الطلبة في توليد، جذور لأعداد صحيحة، يعني، $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{4}$، $\sqrt{5}$، ... على التعاقب. وهو الشكل الذين يكثر من تسميته باسم الحلزون الجذري (Radical Spiral). والذي يعرض الحالات المذكورة.



شكل (1)

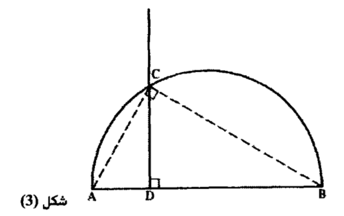
من المتوقع أن يطرح الطالب سؤالا عن إمكانية وجود طريقة أكثر ملائمة لإنشاء $\sqrt{15}$ بدلا من توليد حلزون جذري لغاية $\sqrt{15}$. أرشد الطلبة إلى استذكار إحدى نظريات الوسط المتناسب. ويظهر في الشكل أدناه بأن CD هو الوسط المتناسب بين AD و BD.



شكل (2)

أي CD/BD=AD/CD أو $(CD)^2 = (AD)(BD)$، والتي تتضمن بأن $CD=\sqrt{(AD)(BD)}$.

إن هذه العلاقة ستساعد الطلبة على إنشاء قطعة مستقيم بطول $\sqrt{15}$ في أحد الإنشاءات. وسيكون مجموع ما سيحتاجونه هو إنشاء الشكل أعلاه وافتراض AD = 1 وأن BD=15، وبعدئذ $Cd=\sqrt{(1)(15)}=\sqrt{15}$. وسيكون ما عليهم فعله هو رسم قطعة بطول 16 وتقسيمها إلى قطعتين بأطوال 1، 15. ودعهم يقيموا عند نقطة التقسيم عمودا على هذه القطعة. إن نقطة تقاطع العمود مع نصف الدائرة التي تحوي قطعة بطول 16 بوصفها قطرا لها، سوف تحدد نقطة النهاية بالنسبة للقطعة العمودية التي يبلغ طولها $\sqrt{15}$. أنظر الشكل الآتي:



شكل (3)

هناك حاجة ملموسة للخطوط المقطعة لتبرير الإنشاءات.

التقييم اللاحق Postassessment

1- أنشئ حلزون جذري لغاية $\sqrt{18}$.

2- أنشئ قطعة بطول $\sqrt{18}$ باستخدام وحدة طول معلومة. لا تنشئ حلزونا جذريا في هذه الحالة.



إنشاء مخمس
Constructing a Pentagon

هدف الأداء Performance Objective

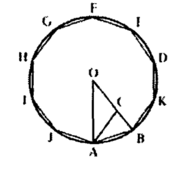
سيقوم الطلبة بإنشاء مخمس منتظم في ضوء المعلومات المتوفرة عن طول نصف قطر الدائرة المحوطة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بخصائص المخمس المنتظم.

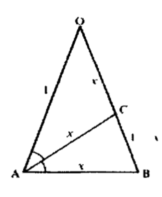
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بجعل الطلبة يتأملون الشكل معشر الزوايا Decagon الذي نصف قطره 1 شكل (1).



شكل (1)

من نقطة المركز O، ارسم المستقيمين $\overline{OA}$، $\overline{OB}$ لتكوين المثلث متساوي الساقين AOB. ينبغي أن يلاحظ الطلبة، وبسهولة، بأن قياس $m\angle AOB = 360°$ (يعني، 360/10 =36). وعليه فإن قياس $m\angle OAB = m\angle OBA = 72°$. اعزل المثلث AOB للوضوح (شكل 2).



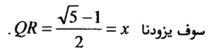
شكل (2)

ارسم منصف الزاوية $\overline{AC}$. وعليه فإن قياس الزاوية $m\angle OAC = 36°$ ، مما يجعل المثلث OCA متساوي الساقين. وبنفس الطريقة، يكون المثلث CAB متساوي الساقين. يضاف إلى ذلك $\Delta BAC \sim \Delta AOB$. وإذا افترضنا أن $OC = x$، بعدئذ $CB = 1\text{-}x$ وكذلك $CB=x=AB$ من التماثل سيحصل الطلبة على النسبة $\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$ والذي سيوصلنا إلى المعادلة $x^2\text{-}x+1=0$.

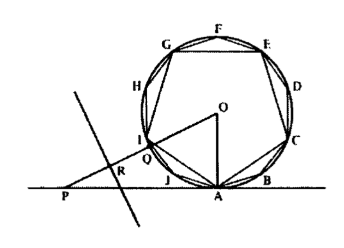
تمتلك هذه المعادلة جذرين، أحدهما أهمية هندسية:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

والآن ادع الطلبة إلى تأمل إنشاء القيمة الحالية لـ x. في أي نقطة A من المستقيم، أقم عمودا بطول OA = 1، وأنشئ دائرة الوحدة (يعني دائرة طول نصف قطرها 1) تمسّ المستقيم في النقطة A. أقم على المستقيم AP=2، ثم ارسم $\overline{OP}$. باستخدام نظرية فيثاغورث، ينبغي أن يحدد الطلبة بأن $OP = \sqrt{5}$ وكذلك $OP - OQ = \sqrt{5}\text{-}1$ أخيرا فإن العمود المنصف من $\overline{PQ}$



سوف يزودنا $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = QR$.



شكل (3)

ينبغي أن يؤشر الطلبة، الآن، المقاطع المتتالية لـ x على دائرة الوحدة الأصلية. وعندما يتم إكمال ذلك بصورة صحيحة. فإن قيمة x سوف تعطينا 10 أقواس على الدائرة بالضبط. وبعد أن يكمل الطلبة إنشاء الشكل معشر الأضلاع، سوف يدركون بوضوح بأن ربط الرؤوس المتبادلة للشكل المعشر، سيثمر عن حصولنا على المخمس المطلوب.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بإنشاء مخمس منتظم في ضوء وحدة طول محدودة.

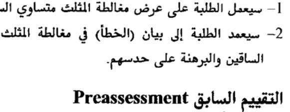
42 تحري مغالطة المثلث متساوي الساقين
Investigating the Isosceles Triangle Fallacy

تقدم هذه الوحدة فرصة لاعتبار مغالطة المثلث متساوي الساقين بصورة شاملة. كما ويمكن أن تستخدم هذه المغالطة في ترسيخ مبدأ صفة الوسيطية (البينية) Betweeness.

أهداف الأداء Performance Objectives

1- سيعمل الطلبة على عرض مغالطة المثلث متساوي الساقين.

2- سيعمد الطلبة إلى بيان (الخطأ) في مغالطة المثلث متساوي الساقين والبرهنة على حدسهم.



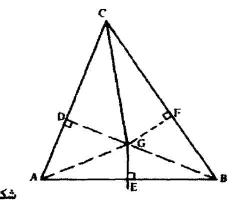
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالطرق المختلفة للبرهنة على تطابق المثلثات، بالإضافة إلى قياس الزاوية في دائرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ المناقشة بتحدي طلبتك لرسم مثلث مختلف الأضلاع Scalene على السبورة والذي ستقوم أنت بالبرهنة على كونه متساوي الساقين. ولغرض البرهنة على أن المثلث المختلف الأضلاع ΔABC هو متساوي الساقين، ارسم منصف الزاوية $\angle C$ والمنصف العمودي لـ $\overline{AB}$. من نقطة تقاطعهما، G، أقم عمودا على $\overline{AC}$ وكذلك $\overline{CB}$، ويلتقي بهما عند النقطتين D، F على التوالي.

ينبغي أن يلاحظ الطلبة وجود أربعة إمكانيات للوصف أعلاه وللمثلثات المختلفة بأنواعها المتنوعة: شكل (1) حيث $\overline{GE}$ و $\overline{CG}$ يلتقيان داخل المثلث:



شكل (1)

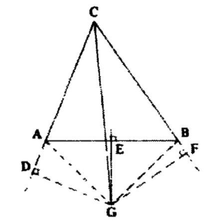
شكل 2، حيث يلتقي كل من $\overline{GC}$، و $\overline{GE}$ على AB ؛

شكل (2)

شكل 3، حيث $\overline{GC}$، و $\overline{GE}$ يلتقيان خارج المثلث ولكن الأعمدة $\overline{GD}$، $\overline{GF}$ يقعان على $\overline{AC}$، $\overline{CD}$ ؛

شكل (3)

شكل 4، حيث $\overline{GC}$، و $\overline{GE}$ يلتقيان خارج المثلث، ولكن الأعمدة $\overline{GD}$، $\overline{GF}$ يلتقيان $\overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{CG}$ خارج المثلث.



شكل (4)

إن برهان المغالطة يمكن إنجازه بواسطة أي من الأشكال السابقة. وليقم الطلبة بمتابعة البرهان على أي (أو جميع) هذه الأشكال.

المعطى Given:

ABC مثلث مختلف الأضلاع.

برهن Prove:

AC=BC (أو أن المثلث ΔABC متساوي الساقين).

البرهان Proof:

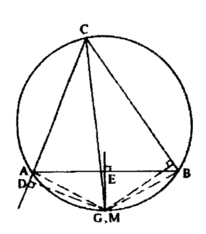
بما أن $\angle ACG \cong \angle BCG$ وكذلك $rt\angle CDG \cong rt\angle CFG$، $\Delta CDG \cong \Delta CFG$ (SAA). عليه، DG=FG وكذلك CD=CF بما أن AG = BG (إن النقطة على المنصف العمودي لمستقيم تبعد بنفس المسافة من نقطتي نهاية قطعة المستقيم) وأن الزاويتين $\angle ADG$ ، $\angle BFG$ هما زاويتان قائمتان. $\Delta DAG \cong \Delta FBG$(H.L). وعليه فإن DA=FB. بعدها سيكون AC=BC (بالإضافة في الأشكال 1، 2، 3 والطرح في شكل 4).

في هذه النقطة سيصاب الطلبة بقلق واضطراب ظاهر. وسوف يتساءل بعض الطلبة عن مورد الخطأ، والذي سمح لهذه المغالطة بالحصول.

سيكون بعض الطلبة على درجة كافية من النباهة والذكاء بحيث يستطيعون الشروع في دراسة، وتمحيص الأشكال ثانية، وسيكون الإنشاء الصارم كافيا في إيجاد الخطأ الدقيق الذي يكمن في الأشكال:

أ- النقطة G "ينبغي" أن تكون خارج المثلث.

ب- عندما يلتقي العمودان أضلاع المثلث، فإن أحدهما سوف يلتقي ضلعا "بين" الرأسين، بينما لا يصح ذلك مع الثاني.



شكل (5)

ينبغي أن نتابع بعض المناقشات حول إغفال إقليدس لمبدأ البينية (صفة الوسيط). ولكن يكمن إجمال هذه المغالطة في البرهان الفعال للفقرتين (أ)، (ب) أعلاه، واللتان تظهران بوضوح خطأ هذه المغالطة.

ابدأ باعتبار الدائرة المحوطة بالمثلث ΔABC.

ينبغي أن يحتوي منصف زاوية $\angle ACB$ نقطة للمنتصف M، للقوس $\overset{\frown}{AB}$ (نظرا لأن الزاويتين $\angle ACM$، $\angle BCM$ هما زاويتان محاطتان ومتطابقتان). إن المستقيم المنصف والعمودي على AB ينبغي أن ينصف القوس $\overset{\frown}{AB}$، وعليه يجب أن يمر بالنقطة M. من أجل هذا فإن منصف الزاوية $\angle ACB$ والمستقيم المنصف العمودي على $\overline{AB}$ سيتقاطعان "خارج" المثلث عند النقطة M (أو G). إن هذا الأمر سيلغي احتمالات الشكلين 1، 2.

والآن دع الطلبة يتأملون الشكل الرباعي المحاط بالدائرة ACBG. بما أن الزوايا المتقابلة للشكل الرباعي المحاط (أو الدائري) تكونان متكاملتين، سيكون قياس $m\angle CAG+m\angle CBG=180^o$. وإذا كانت الزاويتان $\angle CAG$، $\angle CBG$ قائمتان، بعدئذ سيكون CG قطرا وسيكون المثلث ΔABC متساوي الساقين.

وعليه نظرا لكون ΔABC مثلث مختلف الأضلاع، فإن الزاويتين $\angle CAG$ و $\angle CBG$ ليستا قائمتين. في هذه الحالة ستكون إحداهما حادة والثانية منفرجة. افترض أن الزاوية $\angle CBG$ حادة، وأن الزاوية $\angle CAG$ منفرجة، بعدئذ ينبغي أن يكون في المثلث ΔCGB الارتفاع على $\overline{CB}$ "داخل" المثلث، بينما في حالة المثلث "المنفرج" ΔCAG، سيكون الارتفاع على $\overline{AC}$ "خارج" المثلث. (إن هذه القضايا غالبا ما يتقبلها الطلبة مباشرة ولكنها قابلة للبرهان بسهولة). وأن حقيقة كون عمود

واحد وواحد فقط من الأعمدة يقطع ضلعا في المثلث بين رأسين من رؤوسه سيلغي البرهان المغالط.

إن من الضروري جدا أن يؤكد المعلم على أهمية مبدأ صفة البينية في الهندسة.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بما يأتي:

1- برهن بأن أي مثلث مختلف الأضلاع هو مثلث متساوي الساقين.

2- وضح (وبرهن) أين يكون (البرهان) في السؤال 1 مغلوطا.

3- ناقش مبدأ صفة البينية بدلالة أهميته في الهندسة.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

43 نقطة متساوية الزوايا Equiangular Point

ستسهم هذه الوحدة في تطوير علاقات هندسية ممتعة من أشكال هندسية غير تقليدية. إن هذا الموضوع مناسب لأي طالب قد أتقن معظم مفردات منهج الهندسة الخاص بالمدارس الثانوية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1- سيقوم الطلبة بتعريف النقطة متساوية الزوايا في مثلث حاد الزاوية.

2- سيحدد الطلبة موقع النقطة متساوية الزوايا بمثلث حاد الزاوية.

3- سيقوم الطلبة ببيان ثلاثة خصائص (على الأقل) للشكل المستخدم في تحديد موقع النقطة متساوية الزوايا بمثلث حاد الزاوية.

التقييم السابق Preassessment

قبل محاولة عرض هذه الوحدة على صفوفك، استعرض مع الطلبة قياس الزاوية بدائرة، والخصائص الأولية للتطابق والتماثل.

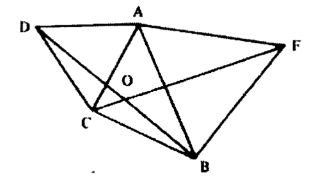
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ عرضك في تحدي الطلبة بالمسألة الآتية:

معطى: المثلث حاد الزاوية ABC.

المثلثان ACD، ABF متساويا الأضلاع.

برهن: $DB = CF$

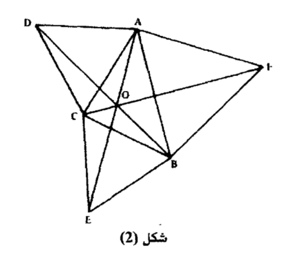


شكل (1)

رغم أن هذه المسألة تستخدم أكثر المبادئ الأساسية (فقط) من منهج الهندسة في المدارس الثانوية، فسيجد الطلبة في المسألة تحديا إلى حد ما. إن الأمر الذي يبدو للوهلة الأولى محيرا ومربكا في هذه المسألة يكمن في اختبار زوج المثلثات المناسب للبرهنة على التطابق. وإذا لم يعثر الطلبة على إيجاد ذلك، بعد مرور بضعة دقائق، أخبرهم بأسماء المثلثات التي تستخدم قطعتي المستقيم $\overline{DB}$ ، $\overline{CF}$ كأضلاع. وسيدركون بسرعة بأن عليهم برهنة أن $\Delta CAF \cong \Delta DAB$. بعدها ستبرز مسألة "كيفية" البرهنة على تطابق هذين المثلثين. أرشد الطلبة إلى أن المثلثات المتداخلة Overlapping Triangles غالبا ما

تشترك في عنصر مشترك. وتعد الزاوية $\angle CAB$ العنصر المشترك في هذه الحالة. بما أن المثلث ΔACD والمثلث ΔABF متساوية الأضلاع، فإن قياس $m\angle DAC = 60^o$، $m\angle FAB=\angle FAC$، وكذلك $m\angle DAB=60^o$ (إضافة). بما أن المثلث ΔACD متساوي الأضلاع، $AD=AC$، وكذلك بما أن المثلث ΔABF متساوي الأضلاع، $AB=AF$. وعليه $(\Delta CAF\cong\Delta DAB)$ (S.AS)، وعليه سيكون $DB=CF$.

متى أدرك الطلبة بوضوح هذا البرهان، دعهم يتأملون مثلثاً ثالثاً متساوي الأضلاع ΔBCE، مرسوم على الضلع $\overline{BC}$. أطلب منهم مقارنة طول $\overline{AE}$ مع طول $\overline{DB}$ وكذلك $\overline{CF}$.



شكل (2)

سيدرك معظم الطلبة بأن قطع المستقيمات الثلاثة تتساوى في أطوالها. إن البرهان على هذه القضية يمكن أن ينجز بنفس الطريقة السابقة.أي ليعمد الطلبة، ببساطة، إلى برهنة أن $\Delta CAE\cong\Delta CDB$ للحصول على $AE = DB$.

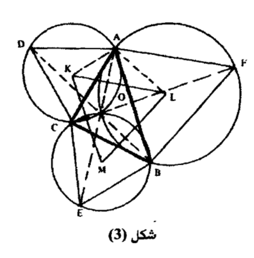
إن حقيقة كون $AE = DB = CF$ ستكون مثيرة للغاية عندما يبقى حاضرا في ذهنك بأن المثلث ΔABC هو أي مثلث حاد الزاوية إن عددا من النتائج المدهشة يمكن الآن تأسيسها من هذا الأساس. أعرض كل منها، على انفراد، ولكن حالما تتم البرهنة على كل منها، حاول أن تقيم بعناية كل علاقة بحقائقها التي تم تأسيسها سابقا.

1- قطع المستقيمات $\overline{AE}$، $\overline{DB}$، $\overline{CF}$ تمتاز بكونها متلاقية في نقطة واحدة.

البرهان Proof: تأمل الدوائر المحوطة بالمثلثات الثلاثة – متساوية الأضلاع ΔACD، ΔABF، ΔBCE.

لتمكن النقاط M, L, K مركزا للدوائر الثلاثة (أنظر شكل 3). تلتقي الدائرتان L,K في النقطتين A,O. بما أن قياس $m\angle ADC=240^o$، ونحن على علم بأن قياس الزاوية $m\angle APC=1/2(m\angle \widehat{ADC})$ سيكون $m\angle AOC=120^o$. وبنفس الطريقة $m\angle AOB=1/2(m\angle \widehat{AFB})$ وعليه سيكون $m\angle COB=120^o$ نظرا لأن الدورة الكاملة تكافئ 360^o.

بما أن $m\angle \widehat{CEB} = 240^o$، وأن الزاوية $\angle COB$ هي زاوية محاطة وأن النقطة O يجب أن تقع على الدائرة M. عليه، نستطيع أن نلاحظ بأن الدوائر الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة، وتتقاطع عند النقطة O.



شكل (3)

ليقم الطلبة، بوصل النقطة O مع النقاط F , E, D, C, B, A. قياس $m\angle DOA=m\angle AOF=m\angle FOB=60^o$، وعليه يكون $\overleftrightarrow{DOB}$، وبنفس الطريقة سيكون $\overleftrightarrow{COF}$، $\overleftrightarrow{AOE}$.

وعليه فقد تمت البرهنة بأن $\overline{AE}$، $\overline{CF}$ وكذلك DB تتلاقى في نقطة واحدة، وتتقاطع عند النقطة O (والتي هي أيضا نقطة تقاطع الدوائر الثلاثة K, L, M).

والآن اسأل الطلبة تحديد النقطة في المثلث ΔABC التي تقابل عندها الأضلاع الثلاثة الزوايا المتطابقة. سيتذكر الطلبة، بسرعة، بأنهم قد أكملوا قبل قليل البرهنة على أن $m\angle AOB=m\angle AOC=m\angle BOC=120^o$ وعليه فإن النقطة – التي يطلق عليها نقطة متساوية الزوايا في مثلث– التي تقابل عندها أضلاع المثلث ΔABC الزوايا المتطابقة هي النقطة O.

2- إن المراكز المحوطة M,L,K للمثلثات الثلاثة – متساوية الأضلاع ΔACD، ΔABF، ΔBCE على التوالي، تحدد مثلثا آخر متساوي الأضلاع.

البرهان Proof: قبل البدء بهذا البرهان، استعرض باختصار، مع الطلبة، العلاقة القائمة بين أضلاع المثلث بزوايا 30، 60، 90.

ليقم طلبتك باعتبار المثلث متساوي الأضلاع ΔDAC. بما أن AK هو 2/3 الارتفاع (أو المستقيم المتوسط)، سنحصل على

النسبة $AC:AK = \sqrt{3}:1$. بنفس الطريقة، في المثلث متساوي الأضلاع ΔAFB $AF:AL = \sqrt{3}:1$ وعليه $AC:AK = AF:AL$.

$m\angle LAF = m\angle KAC = 30^\circ$، $m\angle CAL = m\angle KAL$ (انعكاسية) وكذلك $m\angle KAL = m\angle CAF$ (إضافة) وعليه $\Delta KAL \sim \Delta CAF$. وهكذا فإن $CA:AK = CF:KL = \sqrt{3}:1$.

بنفس الطريقة نستطيع البرهنة على أن $DB:KM = \sqrt{3}:1$ وأن $AE:ML = \sqrt{3}:1$. عليه $DB:KM = AE:ML = CF:KL$. ولكن بما أن $DB = AE =$ CF كما تمت البرهنة عليه سابقا، سنحصل على $KM = ML = KL$. إذن المثلث ΔKML هو مثلث متساوي الأضلاع.

بوصفه تحديا استنتاجيا اطرح سؤالا على طلبتك تطلب فيه الكشف عن علاقات أخرى في شكل 3.

التقييم اللاحق Postassessment

لغرض اختبار قدرة طلبتك على فهم هذا الدرس، اعرض عليهم التمارين الآتية:

1- عرف النقطة متساوية الزوايا بمثلث حاد الزاوية.

2- ارسم أي مثلث حاد الزاوية. وحدد، باستخدام المسطرة العدلة والفرجار، النقطة متساوية الزوايا بالمثلث.

3- بين ثلاثة خصائص سائدة في شكل 3، أعلاه.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Emeryville, CA: Key College Publishing,2002.



النقطة الأقصر مسافة بمثلث
The Minimum Distance Point of a Triangle

ستطور هذه الوحدة عملية البحث عن نقطة بمثلث يكون مجموع أبعادها بالنسبة للرؤوس في الحد الأدنى.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيبرهن الطلبة بأن مجموع المسافات إلى أضلاع المثلث متساوي الأضلاع من نقطة داخلية هو مقدار ثابت.
2. سيثبت الطلبة النقطة الأقصر مسافة بمثلث لا يحوي على زاوية بقياس 120° أو أكبر.

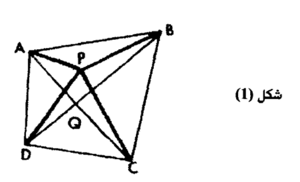
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالمبادئ الأساسية المتباينات الهندسية Geometric Inequalities.

أطلب من طلبة الصف إيجاد موقع نقطة في شكل رباعي الأضلاع. يكون مجموع أبعادها عن الرؤوس بالحد الأدنى.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ المناقشة بجعل الطلبة يتأملون موقع النقطة في داخل شكل رباعي الأضلاع، والتي يكون مجموع أبعادها عن الرؤوس بالحد الأدنى المكن (من هنا ينبغي أن نشير إلى مثل هذه النقطة بوصفها النقطة الأقل بعدا minimum distance point).



شكل (1)

تستطيع أن تتوقع بأن معظم الطلبة سيظنون بأن نقطة تقاطع الأقطار (النقطة Q في شكل 1) ستمثل هذه النقطة (النقطة الأقل بعدا). ورغم أن هذا التخمين هو تخمين ذكي،

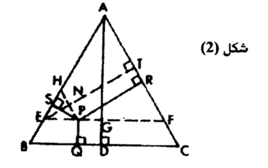
حاول أن تستنبط تبريرا (برهانا) على اختيار هذه النقطة بالذات.

دع الطلبة يختارون أي نقطة P (لا تقع على Q) في داخل الشكل رباعي الأضلاع ABCD (شكل 1). PA+PC>QA+QC (نظرا لأن مجموع طول أي ضلعين في مثلث يكون أكبر من طول الضلع الثالث). وبنفس الطريقة، PB+PD>QB+QD. بالإضافة إلى ذلك، سنحصل على PA+PB+PC+PD>QA+QB+QC+QD، والذي يظهر بأن مجموع المسافات من نقطة تقاطع قطري الشكل رباعي الأضلاع إلى الرؤوس هي أقل من مجموع المسافات من أي نقطة داخلية أخرى بالشكل الرباعي إلى رؤوسه.

إن الاهتمام المنطقي التالي للطلبة ينصب عادة على (ما هي النقطة الأقل مسافة في مثلث؟). وقبل مباشرة هذا السؤال، فإن من المفيد بالبدء في تأمل نظرية مشوقة أخرى والتي ستسهم لاحقا في مساعدة الطلبة على تطوير نقطة أقل مسافة في مثلث.

مرة ثانية، ادع طلبتك إلى استخدام بديهيتهم، وحدسهم الشخصي مع الاستدلال العقلي بصورة استقرائية. ودعهم ينشئون مثلثا كبيرا متساوي الأضلاع، ثم ليعمدوا إلى اختيار أي نقطة بداخله وقياس أبعادها، بعناية ودقة، من الأضلاع الثلاثة للمثلث متساوي الأضلاع. وبعد أن يكمل الطلبة تدوين مجموع الأبعاد الثلاثة للنقطة عن أضلاع المثلث، أطلب منهم إعادة خطوات العمل لثلاث مرات أخرى، على أن يغيروا موقع النقطة الداخلية في كل مرة من هذه المرات الثلاثة. إن القياسات الدقيقة سوف تعطينا مجاميع متساوية للأبعاد لكل نقطة تم اختيارها. وهكذا، يفترض أن يكون الطلبة قادرين على الخروج بالاستنتاج الآتي : إن مجموع المسافات من أي نقطة داخل المثلث متساوي الساقين إلى أضلاعه هي مقدار ثابت. إن برهانين على هذا الكشف الممتع سوف توفر هنا :

الطريقة I Method:



شكل (2)

في المثلث متساوي الأضلاع ΔABC، $\overline{PR} \perp \overline{AC}$، $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$، $\overline{PS} \perp \overline{AB}$، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

ارسم مستقيما يمر بالنقطة P ويوازي $\overline{BC}$ ملتقيا بالمستقيمات $\overline{AD}$، $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ في النقاط F, E, G على التوالي.

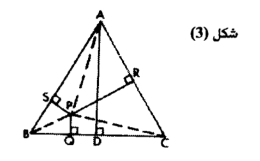
$PQ = GD$.

ارسم $\overline{ET} \perp \overline{AC}$. بما أن المثلث ΔAEF متساوي الأضلاع، $AG \cong ET$ (جميع ارتفاعات المثلث متساوي الأضلاع متطابقة).

ارسم $\overline{PH} // \overline{AC}$ ملتقيا بالضلع $\overline{ET}$ عند النقطة N. $\overline{NT} \cong \overline{PR}$. بما أن المثلث ΔEHP متساوي الأضلاع، فإن الارتفاعين $\overline{PS}$ ، $\overline{EN}$ متطابقان.

لذا، فإننا أظهرنا بأن $PS+PR = ET = AG$. وبما أن $PQ=GD$، $PS+PR+PQ=AG+GD=AD$ وهو ثابت بالنسبة للمثلث قيد الدراسة.

الطريقة II:



شكل (3)

في المثلث متساوي الأضلاع، ΔABC، $\overline{PR} \perp \overline{AC}$، $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$، $\overline{PS} \perp \overline{AB}$، $\overline{AD} \perp \overline{BC}$.

ارسم $\overline{PC}, \overline{PB}, \overline{PA}$.

مساحة المثلث ΔABC = مساحة ΔAPB + مساحة ΔBPC + مساحة ΔCPA

$(PR)(AC)1/2+(PQ)(BC)1/2+(PS)(AB)1/2=$

بما أن $AC = BC = AB$ فإن مساحة المثلث ΔABC = $1/2\ (BC)[PS+PQ+PR]$، ولكن مساحة المثلث ΔABC = $(AD)(BC)1/2$، عليه $PS+PQ+PR=AD$، وهو ثابت بالنسبة لهذا المثلث.

سيكون الطلبة جاهزين الآن لتأمل المسألة الأصلية : إيجاد نقطة أقصر مسافة بمثلث. ينبغي أن نأخذ بعين الاعتبار مثلثا مختلفا لا توجد فيه زاوية يزيد قياسها على $120°$.

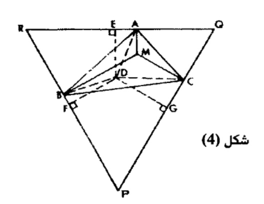
إن الطلبة الذين يدركون الحاجة الملموسة للتماثل في هذه المسألة، قد يقترحون اختيار النقطة التي تقابل عندها الأضلاع الزوايا المتطابقة. فإذا ثبت قبولهم لهذا التخمين يصبح لزاما عليهم البرهنة على صحته.

لذا ينبغي علينا البرهنة على : إن النقطة الداخلية في مثلث (لا يزيد قياس أي زاوية من زواياه على $120°$) والتي تقابل عندها الأضلاع الزوايا المتطابقة، هي النقطة الأقل بعدا بمثلث.

البرهان Proof

في شكل 4، افترض بأن M هي نقطة داخلية بالمثلث ΔABC، حيث تكون قياسات الزوايا $m\angle AMC=m\angle BMC=m\angle AMB=120°$. ارسم مستقيمات تمر بالنقاط A،B،C والتي تكون عمودية على $\overline{AM}$، $\overline{BM}$، $\overline{CM}$ على التوالي.

تلتقي هذه المستقيمات لتكوين المثلث متساوي الأضلاع ΔPQR للبرهنة على أن المثلث ΔPQR متساوي الأضلاع، لاحظ بأن قياس كل زاوية من زواياه هي $60°$. يمكن أن يعرض هذا الأمر عندما نتأمل، على سبيل المثال، الشكل الرباعي AMBR. بما أن قياس $m\angle RAM=m\angle PBM=90°$، وأن قياس $m\angle AMB=120°$، ينتج عن ذلك أن قياس $m\angle ARB=60°$.



شكل (4)

لتكن النقطة D أي "نقطة أخرى" داخل المثلث ΔABC. ينبغي أن نفرض بأن مجموع المسافات من M إلى رؤوس المثلث يقل عن مجموع المسافات من النقطة D إلى الرؤوس.

من النظرية التي أكملنا برهانها أعلاه، $MA+MB+MC=DE+DF+DG$ (حيث أن قطع المستقيمات $\overline{DE}$، $\overline{DF}$، $\overline{DG}$ هي الأعمدة على كل من $\overline{REQ}$، $\overline{RBP}$، $\overline{QGP}$ على التوالي).

ولكن $DE+DF+DG < DA+DB+DC$. (إن أقصر مسافة من نقطة خارجة عن مستقيم هي عبارة عن طول قطعة العمود من النقطة إلى المستقيم).

بالتعويض :

$$MA + MB + MC < DA + DB + DC$$

والآن بعد استكمال البرهنة على النظرية، قد يتساءل الطلبة لماذا اخترنا تحديد مناقشتنا بالمثلثات التي تقل قياسات زواياها عن 120^0. دعهم يحاولوا إنشاء النقطة M في مثلث منفرج الزاوية وقياس إحدى زواياه 150^0. إن مبرر التحديد الذي تبنيناه سوف يبدو واضحا لا لبس فيه.

التقييم اللاحق Postassessment

لاختبار مقدار فهم الطلبة واستيعابهم للتمارين السابقة، أطلب منهم :

1- برهن أن مجموع المسافات إلى أضلاع مثلث متساوي الأضلاع ومن نقطة داخلية تمثل مقدارا ثابتا.

2- حدد النقطة الأقصر مسافة بمثلث لا يحوي على زاوية يزيد قياسها على $120°$.

3- حدد النقطة الأقصر مسافة بشكل رباعي الأضلاع.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

45 عودة إلى المثلث متساوي الساقين
The Isosceles Triangle Revisited

في البدايات المبكرة لمساق الهندسة بالمدارس الحالية، يمارس الطلبة مجموعة من تمارين البرهنة باستخدام المثلثات متساوية الساقين. إن متل هذا البرهان يتضمن البرهنة على أن منصفات زاويتي القاعدة بمثلث متساوي الساقين تكون متطابقة. ورغم أن هذا البرهان يتسم بالبساطة لحد كبير فإن نقيضه يمتاز بصعوبة بالغة. وربما يعد من أكثر براهين القضايا صعوبة، على الإطلاق، في ميدان الهندسة الأقليدية. تعرض هذه الوحدة بضعة طرق، والتي يستطيع الطلبة بواسطتها برهنة القضية.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بالبرهنة على أنه "إذا تطابق منصفا زاويتي من زوايا المثلث، فإن هذا المثلث يكون متساوي الساقين".

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد مارسوا أكثر من تمرين على البراهين الهندسية؛ ومن ضمنها البراهين غير المباشرة Indirect Proofs .

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ عرضك التقديمي في مطالبة الطلبة بالبرهنة على: أن منصفي زاويتي القاعدة في مثلث متساوي الساقين يكونان منطابقين.

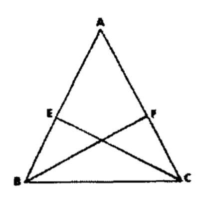
قد ترغب بالبدء معهم بصورة منتظمة:

المعلومات المتوفرة:

المثلث متساوي الساقين $\Delta\ ABC$ وفيه $AB = AC$. $\overline{CE}, \overline{BF}$ منصفي زاويتي قاعدة المثلث.

برهن Prove:

$\overline{BF} \cong \overline{CE}$



البرهان :Proof

وأن $m\ \angle ECB = \frac{1}{2} m\ \angle ACB$

$m\ \angle FCB = \frac{1}{2}\ m\ \angle ACB$

بما أن $m\ \angle ABC = m\ \angle ACB$ (زاويتا قاعدة المثلث متساوي الساقين)

وبما ان $m\ \angle FBC = m\ \angle ECB$ ، $\overline{BC} \cong \overline{BC}$

$\Delta FBC \cong \Delta ECB$ (ASA). عليه سيكون $\overline{BF} \cong \overline{CE}$

عندما ينجز الطلبة العمل على هذا البرهان، أدعهم إلى بيان نقيض القضية التي برهنت قبل قليل إذا تطابق منصفان زاويتين من زوايا المثلث فإن هذا المثلث يكون متساوي الساقين.

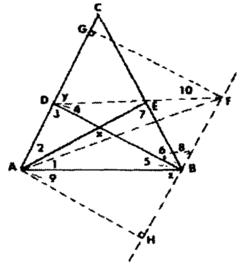
تحدى الطلبة ببرهنة القضية الجديدة. وبما أنه يبعد احتمال أن يكون طلبتك قادرين على برهنة هذه القضية في وقت قصير، فقد ترغب بأن تعرض لهم بعضا من البراهين الآتية. سيصابون بدهشة كبيرة بأن تقيض قضية نظرية تتسم بالبساطة يمتاز بصعوبة بالغة.

إن كلاً من البراهين الآتية تمتاز بكونها براهين تعليمية. وبحاجة إلى اهتمام وعناية خاصة.

المعطى:
$\overline{BD}$، $\overline{AE}$ هما منصفا زاويتين في المثلث ΔABC

$\overline{AE} \cong \overline{BD}$

برهن: أن المثلث ΔABC متساوي الساقين.



البرهان Proof :

ارسم الزاوية $\angle DBF \cong \angle AEB$ بحيث $\overline{BF} \cong \overline{BE}$.

ارسم $\overline{DF}$.

كذلك ارسم $\overline{FG} \perp \overline{AC}$ وكذلك $\overline{AH} \perp \overline{FH}$

بالفرضية. $\overline{AE} \cong \overline{DB}$ ، $\overline{FB} \cong \overline{EB}$ وكذلك $\angle 7 \cong \angle 8$

وعليه فإن $\Delta AEB \cong \Delta DBF$ (SAS)، $DF = AB$، وكذلك

$m\angle 1 = m\angle 4$

$m\angle x = m\angle 2 + m\angle 3$ (زوايا خارجية بمثلث)

$m\angle x = m\angle 1 + m\angle 3$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 4 + m\angle 3$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 7 + m\angle 6$ (زوايا خارجية بمثلث)

$m\angle x = m\angle 7 + m\angle 5$ (بالتعويض)

$m\angle x = m\angle 8 + m\angle 5$ (بالتعويض)

وعليه $m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle 8 + m\angle 5$ (انتقالية)

لذا $m\angle z = m\angle y$.

المثلث قائم الزاوية $\Delta FDG \cong$ المثلث قائم الزاوية ΔABH (SAS)، $DG = BH$، $FG = AH$.

المثلث قائم الزاوية $\Delta AFG \cong$ المثلث قائم الزاوية ΔFAH، (HL) وكذلك $AG = FH$.

وعليه يكون GFHA متوازي أضلاع.

وكذلك، $m\angle 9 = m\angle 10$ (من المثلثين ΔABH، ΔFDG).

$m\angle DAB = m\angle DFB$ (بالطرح)

$m\angle DFB = m\angle EBA$ (من المثلثين ΔDBF، ΔAEB).

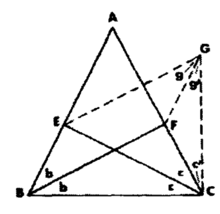
وعليه فإن $m\,\Delta DAB = m\,\Delta EBA$ (انتقالية) وان المثلث ΔABC يكون متساوي الساقين.

إن البراهين التالية لهذه النظرية هي براهين "غير مباشرة" وربما تحتاج إلى تقديم خاص.

المعطى: $\overline{BF}$، $\overline{CE}$ هما منصفا زاويتين بالمثلث ΔABC.

$\overline{BF} \cong \overline{CE}$

برهن: أن المثلث ΔABC متساوي الساقين.



البرهان غير المباشر Indirect Proof I:

افترض أن المثلث ΔABC ليس مثلثا متساوي الساقين.

افترض $m\angle ABC > m\angle ACB$

$\overline{BF} \cong \overline{CE}$ (فرضية)

$\overline{BC} \cong \overline{BC}$

$m\angle ABC > m\angle ACB$ (حسب الفرضية)

$\overline{CF} > \overline{BE}$

من خلال النقطة F، ارسم $\overline{GF}$ موازية لـ $\overline{EB}$.

من خلال النقطة E، ارسم $\overline{GE}$ موازيا لـ $\overline{BF}$.

الشكل BFGE هو متوازي أضلاع.

$\overline{BF} \cong \overline{EG}$ ، $\overline{EG} \cong \overline{CE}$ ، والمثلث ΔGEC متساوي الساقين.

$m\angle(g + g') = m(c + c')$

ولكن $m\angle g = m\angle b$

$m(b + g') = m\angle(c + c')$

وعليه فإن، $m\angle g' < m\angle c'$ بما أن $m\angle b > m\angle c$

في المثلث ΔGFC، لدينا $CF < GF$

ولكن $GF = BE$

إذا $CF < BE$

إن فرضية عدم تساوي قياس $m\angle ABC$، $m\angle ACB$ تؤدي

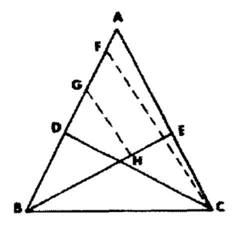
إلى نتيجتين مختلفتين، $CF < BE$، $CF > BE$. وعليه فإن المثلث ΔABC هو مثلث متساوي الساقين.

والآن سيأتي برهان غير مباشر جديد:

المعطى: $\overline{BE}$ ، $\overline{DC}$ هما منصفا زاويتي المثلث ΔABC.

$\overline{BE} \cong \overline{DC}$

برهن: أن المثلث ΔABC هو مثلث متساوي الساقين.



البرهان Proof II:

في المثلث ΔABC، فإن منصفي زاويتي المثلث ABC، ACB يمتلكان نفس القياس (أي أن، $BE = DC$). افترض بأن m $m\angle ABC < m\angle ACB$، إذن

$m\angle ABE < m\angle ACD$.

بعدها نقوم برسم $\angle FCD$ متطابقة مع $\angle ABE$. لاحظ بأننا قد نختار F بين B و A دون أن تضيع ا لعمومية. وفي المثلث ΔFBC، $FB > FC$. (إذا كان قياس زاويتي مثلث غير متساوي، إذن يكون قياس الضلعين المقابلين لهما غير متساوي أيضاً، ويكون الضلع ذو القياس الأكبر هو الضلع المقابل للزاوية ذات القياس الأكبر).

اختر النقطة G بحيث يكون $\overline{BG} \cong \overline{FC}$.

بعدها ارسم $\overline{GH} // \overline{FC}$

وعليه $\angle BGH \cong \angle BFC$ (زوايا متناظرة)، وكذلك

$\Delta BGH \cong \Delta CFD$ (ASA)

عندها ينتج أن $BH = DC$.

بما أن $BH < BE$، وهذا يناقض الفرضية التي تنص على تساوي منصفا الزاويتين. إن حجة مشابهة سوف تظهر استحالة الحصول على $m\angle ACB < m\angle ABC$. عندها ينتج أن $m\angle ACB = m\angle ABC$ وأن المثلث ΔABC هو مثلث متساوي الساقين.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بالبرهنة على أنه في حالة تطابق منصفا زاويتي مثلث فإن المثلث سيكون متساوي الساقين.

مرجع Refremce

Posamentier, A. S., and Charles, T. S., Challenging Problems in Geometry, New York: Dover; 1996.

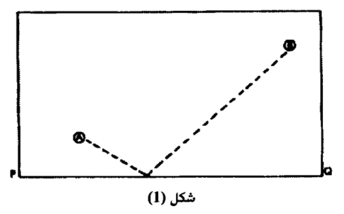
46 الخصائص الانعكاسية للمستوى
Reflective Properties of The Plane

هدف الأداء Performance Objective

لديك مستقيم ونقطتان في إحدى جهات المستقيم، سيقوم الطلبة بتحديد أقصر مسار مشترك من إحدى النقاط إلى المستقيم ثم إلى النقطة الثانية.

التقييم السابق Preassessment

باستخدام المخطط التوضيحي الآتي أطلب من الطلبة تحديد النقطة الصحيحة على بطانة حافة مائدة البليارد Cushion $\overline{PQ}$ والتي ينبغي أن ترتطم بها الكرة A لكي ترتطم بعدئذ بالنقطة B (افترض عدم وجود "English" على الكرة).



شكل (1)

إن عدم الاتفاق بصدد موقع ارتطام الكرة سوف ينشأ عنه اهتمام كاف لإثارة موضوع خصائص الانعكاس.

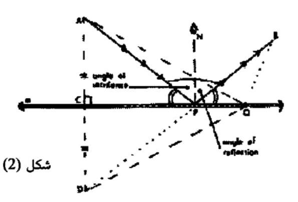
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليحاول طلبة الصف البرهنة على الخاصية الآتية: "إن شعاع الضوء سوف يصنع زاويتين متساويتين مع مرآة قبل، وبعد أن ينعكس عليها".

(إن هذه النظرية يمكن البرهنة عليها بسهولة بعد الأخذ بعين الاعتبار البرهان الآتي).

لإيجاد اقصر مسافة من النقطة A إلى المستقيم m ثم إلى النقطة B في شكل 2، تأمل العمود المقام من النقطة A إلى المستقيم m (الذي يلتقي مع المستقيم m بالنقطة C). افترض إن النقطة D على $\overline{AC}$ بحيث $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. إن النقطة D يطلق عليها "الصورة المنعكسة Reflected Image" للنقطة A في المستقيم m.

إن نقطة تقاطع $\overline{BD}$ والمستقيم m تحدد النقطة P، وهي النقطة المطلوبة في المسألة الأصلية. ولكن، ما ينبغي عرضه الآن هو أن:



شكل (2)

AP + PB هو اقصر "من أي مسار آخر من A إلى المستقيم m (لنقل عند النقطة Q)، ومن ثم إلى النقطة B.

قد يكون الطلبة اكثر ارتياحا باعتبار هذا الأمر "برهانا شكليا Format Proof".

لديك: النقطتان A، B تقعان على نفس الجهة بالنسبة للمستقيم. $m\overleftrightarrow{ACD} \perp \overleftrightarrow{CPQ}$ حيث تمثل Q أي نقطة على $\overleftrightarrow{CP}$ (عند النقطة P).

$\overleftrightarrow{DPB}$

$\overline{AC} \cong \overline{CD}$

برهن: $AP + PB < AQ + QB$

الخطوط العامة للبرهان Outline of Proof: بسبب كون المستقيم m العمود المنصف لـ $\overline{ACD}$، سيكون $\overline{AP} \cong \overline{DP}$ وكذلك $\overline{AQ} \cong \overline{QD}$.

في المثلث ΔDQB، $BD < BQ + QD$ (تباين مثلث). بما أن $BD = DP + PB$، $AP + PB < AQ + BQ$.

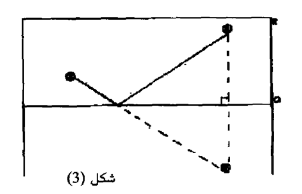
تستطيع أن تعرض الآن على الصف، بما أنه

$\angle BPQ \cong \angle CPD$؛ وأن $\angle APC \cong \angle CPD$، علاوة على ذلك $\angle APC \cong \angle BPQ$.

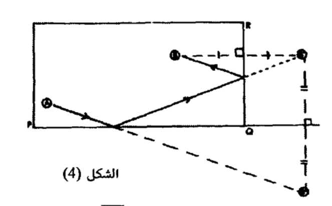
إذا كان $\overleftrightarrow{PN} \perp$ المستقيم m، فإن الزاوية $\angle APN$ (زاوية السقوط Incidence Angle) متطابقة مع الزاوية $\angle BPN$، زاوية الانعكاس Angle of Reflection.

ليقم الطلبة بتطبيق خصائص الانعكاس على مسألة منضدة البليارد.

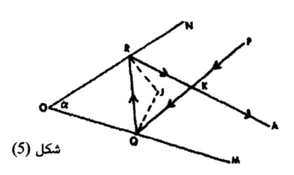
سترتد كرة البليارد بعيدا عن بطانة حافة مائدة البليارد كما "يثب" الضوء بعيدا عن المرآة. من اجل هذا إذا كانت الكرة عند الموقع A (شكل 3)، ويرغب اللاعب أن يجعلها ترتطم بحافة مائدة البليارد $\overline{PQ}$ إلى الموقع B، يستطيع أن يستهدف بضربته على $\overline{PQ}$ حيث يرى النقطة B (إذا وضعت المرآة على طول $\overline{PQ}$).


شكل (3)

وليتأمل الطلبة الآن مسألة ضرب حافتي المائدة ($\overline{PQ}$ ثم $\overline{QR}$) قبل ضرب B.


الشكل (4)

تأمل الصورة المنعكسة للنقطة B في $\overline{QR}$، وأطلق عليها B' (شكل 4). والآن عليهم أن يتأملوا، فحسب، مسألة أين ستضرب الكرة من A على حافة المنضدة $\overleftrightarrow{PQ}$ بحيث تتدحرج باتجاه B'. لإجراء ذلك، دعهم يأخذون الصورة المنعكسة لـ B' في $\overleftrightarrow{PQ}$، ثم نقطة تقاطع المستقيم الذي يصل بين A والشعاع المنعكس عن B' (أطلق عليها B''). و $\overleftrightarrow{PQ}$ هي النقطة المستهدفة لإتمام ضربتي حافة المائدة. يستطيع الطلبة تصور هذه النقطة كانعكاس للكرة في B بالمرآة الموضوعة على طول $\overleftrightarrow{PQ}$، والتي سوف يرونها كانعكاس على المرآة الموضوعة على طول $\overline{QR}$.



شكل (5)

إن الصف الذي سيثار اهتمامه بالموضوع، قد يرغب في النظر إلى ما وراء الانعكاس المزدوج Double Reflection إلى حيث الزاوية بين مستويين تثبت دائما بوصفها زاوية قائمة.

إن مرآتين بزاوية ثنائية الأسطح – ثابتة Fixed Dihedral Angle بينهما يطلق عليهما مرايا الزاوية Angle Mirrors. ليقم الطلبة بالبرهنة على انه إذا أضاء مراقب الضوء في مرايا الزاوية بحيث أن الشعاع ينعكس بعيدا عن أحدهما، ثم من الثانية، فإن الشعاع المنعكس أخيرا سيكون زاوية مع الشعاع الأصلي والذي سكون ضعف الزاوية ثنائية الأسطح بين المرآتين. بعبارة أخرى:

معطى: المرآتين OM، ON، افترض $\angle NOM = \propto$، كذلك فإن شعاع الضوء المنبعث عند النقطة P مستهدفا Q ينعكس بعيدا عن OM على ON وبعدئذ إلى A.

برهن: $m\angle PKR = 2\propto$ (شكل 5)

الخطوط العامة للبرهان Outline of Proof:

ارسم الأعمدة على المستويين (المرآتين) عند نقاط سقوط الشعاع في كل منهما، يعني، $\overleftrightarrow{QJ} \perp \overleftrightarrow{OM}$، في النقطة Q، وارسم $\overleftrightarrow{RJ} \perp \overleftrightarrow{ON}$، في النقطة R (نقطة سقوط الشعاع على المرآة $\overleftrightarrow{ON}$). بعدئذ، بواسطة خاصية الانعكاس، ينصف كل من $\overleftrightarrow{QJ}$، $\overleftrightarrow{RJ}$ الزاويتين $\angle PQR$ و $\angle QRA$ على التوالي. بعدها $m\angle PKR = m\angle KQR = m\angle KRQ$، (نظرية الزاوية الخارجية في مثلث). فإن،

وأن $m\angle PKR = 2(m\angle JQR + m\,QRJ)$

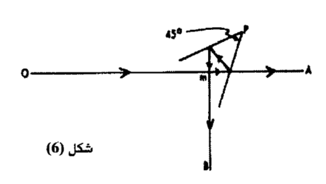
ولكن، بما أن كل من $m < PKR = 2(180° - m\angle RJQ)$ الزاويتين $\angle JRO$ ، $\angle JQO$ هما زاويتان قائمتان، $m\angle ROQ = 180° - m\angle RJQ$ (مجموع قياسات الزوايا الداخلية في الشكل الرباعي الأضلاع 360°).

بالتعويض، $m\angle PKR = 2(m\angle POQ) = 2\alpha$.

إن إحدى تطبيقات مرايا الزاوية هي عندما تكون قيمة الزاوية ثنائية الأسطح45° فإن الشعاع سوف ينعكس بزاوية مقدارها 90°. إن زوجا من مثل هذه المرايا يطلق عليها غالبا "المربع الضوئي، Optical Square، بسبب استخدامه في تحديد خطوط الرؤية المتعامدة.

لبيان كيفية استخدام المربع الضوئي، ليقف طالب عند كل من النقاط الثلاثة B ، A،O ، بحيث تعرّف هذه النقاط مثلثا (شكل 6). باستخدام هذا المربع سيكون الطلبة قادرين على تحديد موقع التقاء العمود من B إلى $\overleftrightarrow{AO}$ يقابل $\overrightarrow{AO}$.

ليقف طالب آخر عند O ويصوب نظره نحو الطالب الواقف عند النقطة A. وليأت طالب ثالث ويقف عند النقطة P، ممسكا بالمربع الضوئي، ومحركا إياه على طول خط النظر من O إلى A.

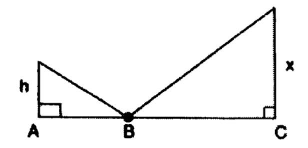


شكل (6)

لحين يكون الطالب (في نقطة ما هي m) الطالب عند O قادرا على رؤية الطالب عند النقطة B في مرآة الزاوية. إن النقطة m هي قاعدة الارتفاع من B إلى $\overrightarrow{OA}$.

التقييم اللاحق Postassessment

باستخدام خاصية الانعكاس، ليقم الطلبة بالبرهنة على ان ارتفاع سارية العلم هو $X = \frac{h.BC}{AB}$ حيث X هو ارتفاع المراقب



47 إيجاد طول "سيفيان" بمثلث
Finding the Length of a Cevian of a Triangle

تعرض هذه الوحدة طريقة لإيجاد طول "أي" قطعة مستقيم تصل بين رأس المثلث مع أي نقطة بالضلع المقابل. يطلق على قطعة المستقيم هذه اصطلاح سيفيان، نسبة إلى العالم الرياضي جيوفاني سيفا Giovanni Ceva الذي ابتكر نظرية حول التقاء متل قطع المستقيم هذه. تكون هذه التقانة مفيدة بالخصوص للطلبة. نظرا لكونها تسد فراغا في جملة من المناهج.

بصورة عامة، يتعلم الطلبة طرقاً لإيجاد أطوال سيفيانات خاصة مثل الارتفاع وبعض المستقيمات المتوسطة. ولكن باستخدام نظرية ستيورات Stewart's Theoie (سميت إشارة إلى العالم ماثيو ستيوارت الذي نشرها عام 1945)، سيكون الطلبة قادرين على إيجاد طول "أي" سيفيان بمثلث.

أهداف الأداء Performance Objectives

1- سيقوم الطلبة بإيجاد طول سيفيان محدد بمثلث معلوم، والذي تكون أطوال أضلاعه (وقطعته) معروفة.

2- سيقوم الطلبة بإعداد صيغة خاصة لإيجاد طول نصف زاوية بمثلث، معلومة أطوال أضلاعه.

التقييم السابق Preassessment

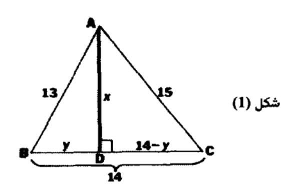
ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا معظم مفردات مساق الهندسة الخاص بالمدارس الثانوية. ولأغراض المراجعة، ليقم الطلبة بالعمل على المسألة الآتية:

في مثلث أطوال أضلاعه 13، 14، 15، ما هو مقدار الارتفاع منسوباً إلى الضلع الذي طوله 14 ؟.

استراتيجية التعليم Teaching Strategies

إن إحدى المهارات المطلوبة لتطوير نظرية ستيوارت هي المعرفة التطبيقية بنظرية فيثاغورث. إن المسألة المذكورة أعلاه تتطلب هذه المهارة.

بعد إكمال الطلبة رسم المخطط المطلوب في هذه المسألة، سوف يلاحظون مباشرة وجود زاويتين قائمتين.



شكل (1)

سنطبق نظرية فيثاغورث على هذا الشكل مرتين، الأولى على المثلث ACD والمرة الثانية على المثلث ABD.

بالنسبة للمثلث ACD: $x^2 + (14 - y)^2 = 225$

بالنسبة للمثلث ΔABD: $x^2 + y^2 = 169$

بالطرح $(14 - y)^2 - y^2 = 56$

$$196 - 28y + y^2 - y^2 = 56$$

$$y = 5$$

ثم بعدئذ $x = 12$

وعليه، سيرى الطلبة مثلثين قائمين وبأطوال أضلاع صحيحة: 5، 12، 13، وكذلك 9، 12، 15.

والآن تحدى طلبتك بإيجاد طول منصف الزاوية من الرأس A في المثلث ABC. بعد فترة قصيرة، ستكون خيبتهم ظاهرة للعيان!. ليتوقف الطلبة عند هذا التخمين، عن العمل، وتناول من خلال مناقشة مفتوحة معهم تفاصيل نظرية ستيوارت.

نظرية ستيوارت Stewarts Theorem

في شكل 2، تنص النظرية على أن:

$$a^2n + b^2m = c\,(d^2 + mn)$$

شكل (2)

يمكن بواسطة هذه النظرية، يمكن إيجاد قيمة d إذا كانت قيم كل من: a، b، m، n معروفة. إن برهان هذه النظرية البالغة الأهمية هو كما يأتي:

البرهان Proof:

في المثلث ABC، افترض $BC = a$، $AC = b$، $CD = d$.

تقسم النقطة D المستقيم $\overline{AB}$ إلى قطعتين، $BD = m$، $DA=n$

ارسم الارتفاع $CE = h$ وافترض $ED = p$.

لغرض الاستمرار في برهان نظرية ستيوارت، سنشتق في البداية صيغتين ضروريتين. تنطبق الصيغة الأولى على المثلث CBD.

طبقنا نظرية فيثاغورث على المثلث CEB للحصول على:

$$(CB)^2 = (CE)^2 + (BE)^2$$

بما أن $BE = m - p$، $a^2 = h^2 + (m - p)^2$ .... (I)

ولكن، بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث CED، سيكون لدينا $(CD)^2 = (CE)^2 + (ED)^2$ أو $h^2 = d^2 - p^2$. بتعويض h^2 في معادلة (I)، سنحصل على:

$$a^2 = d^2 - p^2 + (m - p)^2$$

$$a^2 = d^2 - p^2 + m^2 - 2mp + p^2$$

وعليه،

$a^2 = d^2 + m^2 - 2mp$ ..... (II)

إن قضية مماثلة تنطبق على المثلث ΔCDA. بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ΔCEA، نجد ما يأتي:

$$(CA)^2 = (CE)^2 + (EA)^2$$

بما ان $EA = (n + p)$، $b^2 = h^2 + (n + p)^2$ ... (III)

ولكن، $h^2 = d^2 - p^2$، بتعويض h^2 في المعادلة (III) كما يأتي:

$$b^2 = d^2 - p^2 + (n + p)^2$$

$$b^2 = d^2 - p^2 + n^2 + 2np + p^2$$

إذن،

$b^2 = d^2 + n^2 + 2np$ ... (IV)

وان المعادلتين (II) و (IV) توفر لنا الصيغة التي نحتاجها.

والآن اضرب المعادلة (II) بـ n للحصول على:

$a^2n = d^2n + m^2n - 2mnp$ .... (V)

واضرب المعادلة (IV) بـ m لتحصل على:

$b^2m = d^2m + n^2m + 2mnp$ (VI)

بإضافة المعادلة (V) إلى المعادلة (VI)، يكون لدينا:

$$a^2n+b^2m=d^2n+d^2m+m^2n+n^2m+2mnp-2mnp$$

إذن $a^2n + b^2m = d^2(n + m) + mn(m + n)$

بما أن $m+a=c$ فإن لدينا: $a^2n+b^2m=d^2c+mnc;$

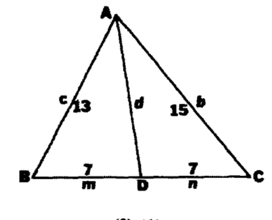
أو $a^2n+b^2m=c(d^2+mn)$

سيكون طلبتك الآن على استعداد تام لإيجاد طول المستقيم المتوسط من الرأس A بالمثلث ABC، حيث $AB = 13$، $BC = 14$، $AC = 15$.

وسيكون كل ما سيحتاجونه للحصول على ذلك هو تطبيق مباشر لنظرية ستيوارت كما يأتي:

$$c^2n + b^2m = a(d^2 + mn)$$

ولكن، بما أن $\overline{AD}$ هو مستقيم متوسط $m = n$.



شكل (3)

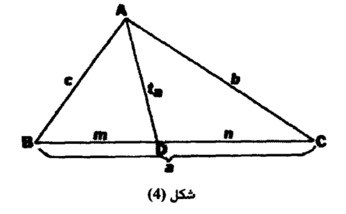
بالتعويض في الصيغة أعلاه، نحصل على:

$$13^2(7) + 15^2(7) = 14(d^2 + 49)$$

وعليه : $d=2\sqrt{37}$

لإيجاد طول منصف زاوية بمثلث،ترشدنا نظرية ستيوارت إلى علاقة مبسطة ومختصرة،وسيجدها الطلبة سهلة الاستخدام.

ليتأمل الطلبة المثلث ΔABC ومنصف الزاوية $\overline{AD}$.



شكل (4)

بواسطة نظرية ستيوارت نحصل على العلاقة الآتية:

$c^2n+b^2m=a(t_a^2+mn)$ ، أو

$$t_a^2+mn=\frac{c^2n+b^2m}{a}$$

أو كما موضح في الشكل 4.

ولكن $\frac{c}{b}=\frac{m}{n}$ (منصف زاوية المثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين يتناسب قياسهما إلى قياس الضلعين الآخرين في المثلث. ويصح العكس أيضاً).

لذا $cn = bm$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه،

$$t_a^2+mn=\frac{cbm+cbn}{m+n}=\frac{cb(m+n)}{m+n}=cb$$

وعليه، $t_a^2 = cb - mn$.

عند هذا التخمين، سيكون طلبتك قادرين على إيجاد طول "أي" سيفيان بمثلث. كمورد للتقوية وتعميق الفهم لديهم، اعرض مسائلا تتضمن منصفات زاوية، ومستقيمات متوسطة قبل أن تتوجه صوب أنواع أخرى من السيفيانات.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقوم الطلبة بإكمال التمارين الآتية:

1. جد طول الارتفاع المرسوم من أطول ضلع بمثلث أضلاعه 10، 12، 14.
2. جد طول المستقيم المتوسط المرسوم إلى أطول ضلع بمثلث أطوال أضلاعه 10، 12، 14.
3. جد طول منصف الزاوية المرسوم باتجاه أطول ضلع بمثلث أطوال أضلاعه 10، 12، 14.
4. في المثلث ΔPQR، إذا كان $PR = 7$، $PQ = 8$، $RS = 4$، $SQ = 5$. جد قيمة PS عندما تكون S على $\overline{RQ}$.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.



تحدي مدهش

A Surprising Challenge

إن هذه الوحدة سوف تفتح أذهان الطلبة على الحقيقة القائلة: بأن ما قد يبدو سهلا قد يكون في الواقع بالغ الصعوبة.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مسألة هندسية من النوع المعروض هنا، سيباشر الطلبة عملية تحليلها، وحلها بصورة صحيحة.

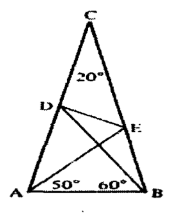
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على معالجة البراهين الهندسية بسهولة نسبية قبل مباشرة هذه الوحدة. إن المسألة المطروحة هنا تمتاز بصعوبة البرهنة عليها، ولكنها سهلة البيان. ستكون المسألة بمستوى يزيد قليلا على المستوى المتوسط لهندسة المدارس الثانوية.

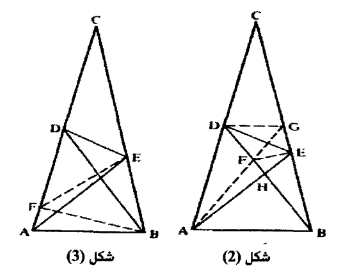
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن المسألة الهندسية التي ستقوم بعرضها على طلبتك، بعد قليل. تبدو واضحة وسهلة، وساذجة إلى حد كبير.

مسألة Problem: المثلث ΔABC متساوي الساقين: $(CA = CB)$، $m\angle ABD = 60°$، $m\angle ABE = 50°$، $m\angle C = 20°$. جد قياس زاوية $\angle EDB$.



شكل (1)



شكل (2) شكل (3)

ينبغي أن يعطى وقت مناسب للطلبة، لكي يستطيعوا التعامل مع هذه المسألة من جميع جوانبها. وبعد فترة وجيزة، سيجد الطلبة قياسات معظم الزوايا الموجودة في المخطط. ولكنهم، سيدركون بعد ذلك، بأن هذه المسألة ليست سهلة كما تصوروها منذ النظرة الأولى، نظرا لأن هناك احتمال كبير بعدم قدرتهم على حل هذه المسألة! . عند هذه النقطة تستطيع البدء بمناقشتك للحل الملائم لهذه المسألة.

وسيدرك الطلبة فورا بأن هناك حاجة إلى مستقيمات إضافية لغرض حل هذه المسألة. اقترح قيامهم برسم $\overline{DG} // \overline{AB}$، حيث تقع G على $\overline{CB}$. بعدئذ ارسم $\overline{AG}$ قاطعا $\overline{BD}$ في النقطة F. إن القطعة المستقيمة الأخيرة التي يتوجب رسمها هي $\overline{EF}$ (انظر شكل 2).

سيكون الطلبة قادرين على برهنة أن $\angle BAG \cong \angle ABD$. بعدئذ، $m\angle AGD = m\angle BAG = 60°$ (زوايا داخلية متناظرة بخطوط متوازية). وعليه فإن قياس $m\angle AFB$ يجب أن تساوي $60°$ والمثلث AFB متساوي الأضلاع، وكذلك $AB = FB$.

بما أن $m\angle EAB = 50°$ وان قياس $m\angle ABE = 80°$ .m

$m\angle AEB = 50°$ فإن المثلث ΔABE سيكون مثلثا متساوي

الساقين، وان $AB = EB$. وعليه $FB = EB$ (انتقالية)، وان المثلث ΔEFB متساوي الساقين.

بما أن $m\angle EBF=20°$، $m\angle BEF = m\angle BFE = 80°$.

كما أن $m\angle DFG=60°$، $m\angle GFE = 40°$. بما أن $GE= EF$ (ضلعا مثلث متساوي الساقين)، وكذلك $DF = DG$ (أضلاع مثلث متساوي الأضلاع).

إذن DFEG هو من نوع Kite، يعني، إن مثلثين متساوي الساقين يشتركان خارجيا بقاعدة مشتركة. $\overline{DE}$ ينصف الزاوية $\angle GDF$ (من خصائص الـ Kite)، لذا فإن قياس $m\angle EDB = 30°$.

إن طريقة أخرى لحل المسألة ستكون كما يأتي: في المثلث متساوي الساقين ΔABC، $m\angle ACB=20°$، $\angle CAB=80°$، $m\angle ABD = 60°$، $m\angle EAB = 50°$.

ارسم $\overline{BF}$ بحيث يكون $m\angle ABF = 20°$، بعدئذ ارسم $\overline{FE}$ (شكل 3).

في المثلث ABE، $m\angle AEB = 50°$ (مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي $180°$) وعليه ΔABE مثلث متساوي الساقين، وان $AB = FB$ ....(I)

بنفس الأسلوب، FAB مثلث متساوي الساقين، بما أن $m\angle AFB = m\angle FAB = 80°$

إذن $AB = EB$ .... (II)

من المعادلتين (I)، (II)، $EB = FB$. بما أن $m\angle FBE= 60°$ فإن المثلث FBE متساوي الأضلاع وأن

$EB = FB = FE$ .... (III)

والآن في المثلث DFB، $m\angle FDB = 40°$،

$m\angle FBD = m\angle ABD - m\angle ABF = 60° - 20° = 40°$

إذن المثلث DFB هو مثلث متساوي الساقين،

$FD = FB$ .... (IV)

بعد ذلك، من المعادلتين (III)، و (IV) نحصل على $FE=FD$، مما يجعل المثلث FDE متساوي الساقين وكذلك: $m\angle FDE = m\angle FED$.

بما أن $m\angle AFB = 80°$ وكذلك $m\angle EFB = 60°$، بعدئذ سيكون قياس الزاوية $m\angle AFE$، الزاوية الخارجية بالمثلث متساوي الساقين FDE، مساويا $140°$، بالإضافة. وسيتبع ذلك $m\angle ADE = 70°$. وعليه،

$m\angle EDB = m\angle ADE - m\angle FDB = 70° - 40° = 30°$.

هناك طرق متنوعة أخرى لحل هذه المسألة، إن مرجعا لسبعة حلول تخص هذه المسألة هو:

Challenging Problems in Geometry, by A. S. Posamentier, and C. T. Salkind, pp. 149 – 154 (Dove, 1996).

التقييم اللاحق Postassessment

ليكتشف الطلبة حلاً آخر لهذه المسألة.

49 عمل اكتشافات في الرياضيات Making Discoveries in Mathematics

يقصد من هذا النشاط السماح للطلبة بعمل اكتشافات مبنية على الملاحظة، ثم اقتراح استنتاج ما.

هدف الأداء Performance Objective

بمواجهة مجموعة من الأنماط الرياضية، سيبدي الطلبة اكتشافهم، وبيان استنتاجهم.

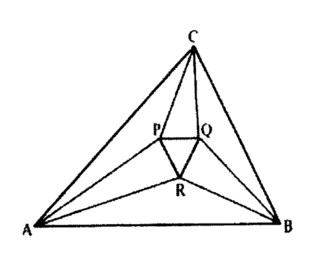
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيتألف هذا النشاط من سلسلة من الأنشطة الرياضية – والمصغرة، والتي يتطلب كل منها أن يمارس الطالب اكتشافا لنمط، أو علاقة، ثم بيان استنتاجه / أو استنتاجها بخصوص ذلك.

1. اختر أي عددين متتالين من الأعداد التربيعية (مثال، 4، 9). أعط أي عدد أولي بين هذين العددين. كرر ذلك بالنسبة لعشرة أزواج من الأعداد التربيعية المتتالية. والآن حاول إيجاد زوج من الأعداد التربيعية المتتالية التي لا تحوي على عدد أولي بينهما. بأي استنتاج ستخرج من هذه التجربة؟

2. اختر أي عدد صحيح اكبر من 2. والآن صف هذا العدد الصحيح الزوجي بوصفه مجموعة لعددين أوليين. على سبيل المثال 5 + 3 = 8 وكذلك 7 + 11 = 18. كرر هذه العملية مع 25 عدد صحيح زوجي على الأقل قبل إصدار أي استنتاج.

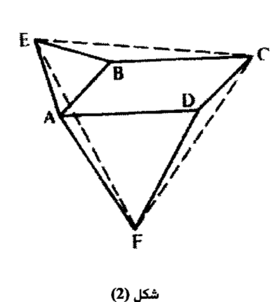
3 ارسم "أي" مثلث، استخدم المنقلة بعناية في تقسيم كل زاوية من زوايا المثلث إلى ثلاثة أقسام متساوية. حدد مواقع نقاط التقاطع المقسمات الثلاثة للزوايا – المتجاورة كما موضح في الشكل الآتي.



شكل (1)

صل بين هذه النقاط الثلاثة، وتفحص المثلث الناتج عنه. اعد هذا. الإنشاء ستة مرات، على الأقل، مع مثلثات أخرى قبل أن تخرج بأي استنتاج.

4 ارسم "أي" متوازي أضلاع، أنشئ مثلثا متساوي الأضلاع – خارجيا على اثنين من الأضلاع المتجاورة، كما مبين أدناه. ثم صل بين الرأسين البعيدين بالمثلثين متساوي الأضلاع، وكذلك الرأس الأبعد لمتوازي الأضلاع. أي نوع من المثلثات تنتج عن هذا الإنشاء ؟ قبل أن تخرج باستنتاج محدد، حاول تكرار هذه التجربة مع ستة متوازيات أضلاع مختلفة.



شكل (2)

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على برهنة المثال الأخير. شريطة أن يتركوا الأمثلة الثلاثة الأخرى دون محاولة، لان المثالين 1، 2 لم يبرهن عليهما أبدا، بينما يمتاز برهان 3 بصعوبة كبيرة جدا(*)

قد تحاول تكرار هذه التجارب مع أمثلة مشابهة لما ورد آنفا. إن من الضروري، بالسبة للطلبة، تعلم كيف يثقون بجهدهم، وبديهيتهم في الرياضيات، وان يكونوا قادرين على إصدار استنتاجات استقرائية صحيحة.

التقييم اللاحق Postassessment

اطلب من الطلبة إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة الفردية الأولى 1، 2، 3، 4، 5، 6 ...، 15 وعمل قائمة بـ 15 مجاميع مختلفة بعدئذ ليعمد الطلبة إلى بيان استنتاج منطقي حول ذلك.

(*) يمكن إيجاد حلين لهذه النظرية في كتاب:
Challenging Problems in Geometry, by A. S Posamentier, and C T. Salkind, (New York: Dove, 1996)



مرصعات الفسيفساء
Tessellations

أهداف الأداء Performance Objectives

1. لديك متعدد الأضلاع منتظم، وسيقوم كل طالب بتحديد فيما إذا سيرصع مستوياً.
2. لديك مجموعة من متعددات أضلاع منتظمة، وسيقوم كل طالب بتحديد فيما إذا سترصع هذه المتعددات مستويا.

التقييم السابق Preassessment

قبل البدء بهذا الدرس حاول أن توضح للطلبة بأنه عندما يتم ترتيب متعددات الأضلاع سوية لتغطية مستوي من المستويات دون ترك فراغات فيما بينها، أو تراكب بعضها على بعض يطلق على هذا النمط مرصعات الفسيفساء. (أذكر للطلبة بأن نمط تركيب بلاط أرضية الحمام Bathroom يعد من أكثر الأمثلة شيوعا عن مرصعات الفسيفساء). إن الترصيع بالفسيفساء الذي يصنع بصورة كلية من متعددات أضلاع – منتظمة ومتلائمة، والتي تتلاقى مع بعضها دون أن يقع رأس أحدهما على ضلع من أضلاع متعدد آخر، يطلق عليه ترصيع الفسيفساء المنتظم Regular Tessellation.

وضح إلى مدى أبعد بأن شبكة من المثلثات متساوية الأضلاع، ونمط رقعة الداما المؤلف من مجموعة مربعات، ونمط الأشكال السداسية هي الأمثلة الفريدة المتوفرة عن ترصيع الفسيفساء بالأشكال متعددة الأضلاع المنتظمة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لبيان مبررات اقتصار الترصيع بالفسيفساء على الأنماط الثلاثة السابقة، بأسلوب رياضي، أطلب من الصف اقتراح وجود حاجة إلى m من متعددات الأضلاع المنتظمة لملء الفراغ حول نقطة ما (حيث يوجد رأس زوايا متعدد الأضلاع). وإذا افترض الطلبة بأن كل متعدد أضلاع يحتوي على n من الأضلاع، ستكون الزاوية الداخلية لكل متعدد أضلاع تساوي $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$. وعليه $\frac{m(n-2)180^\circ}{n}=360^\circ$ وأن $(m-2)(n-2)=4$.

عند أخذ طبيعة المسألة بعين الاعتبار، فإن العددين الصحيحين m، n، سيكونان أكبر من 2. إذا كانت $m=3$، بعدئذ $n=6$. إذا كانت $m>3$، بعدئذ $n<6$، وبما أن $n>2$ فإن القيم التي ينبغي اعتبارها هي $n=3$، $n=4$، $n=5$. فإذا كانت $n=3$ بعدئذ $m=6$؛ وإذا كانت $n=4$، بعدئذ $m=4$. وإذا كانت $n=5$، فإن m لن تكون عددا صحيحا؛ لذلك فإن الحلول الوحيدة هي: $m=3$، $n=6$ ؛ $m=4$، $n=4$ ؛ $m=6$، $n=3$. ليقم الطلبة باقتراح طرق أخرى مناسبة لتمييز هذه الترصيعات الفسيفسائية $(6^3, 4^4, 3^6)$. استخدم المخططات التوضيحية الآتية لبيان عدم وجود متعدد أضلاع – منتظم آخر يمتلك زاوية داخلية والتي تقسم 360° (شكل 1 و 2).

سيزداد مدى الترصيع بالفسيفساء من خلال التحريات الإضافية الذي ستقوم بإجرائها. ويمكن أن تعد عملية الترصيع، أيضاً، بتثبيت نوعين أو اكثر من متعددات الأضلاع المنتظمة سوية، الرأس مع الرأس، وبطريقة ما بحيث أن نفس متعددات الأضلاع، وبنفس الترتيب الحلقي، تحيط بكل رأس. يطلق على هذه الأنواع من الترصيعات صفة "الترصيع الفسيفسائي – شبه المنتظم Semi – Regular Tessellations " والتي لا يزيد فيها على ثلاثة إلى ستة متعددات أضلاع عند كل رأس.

اسأل الطلبة تأمل الترتيب الثلاثي Ternary Arrangement (ثلاثة متعددات أضلاع تشترك بنقطة واحدة كرأس). ونتيجة لكون مجموع الزوايا المحيطة بأي رأس ينبغي أن تكون 360°، فإن ترتيبا ثلاثيا من متعددات الأضلاع التي أضلاعها n_1، n_2، n_3، على التوالي، سيكون ممكنا فقط إذا كان:

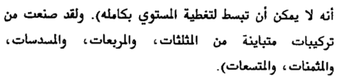
$$\left(\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\frac{n_3-2}{n_3}\right)180^\circ=360^\circ$$

ومن هذه العلاقة نحصل على:

$$\left(\frac{n_1}{n_1}-\frac{2}{n_1}+\frac{n_2}{n_2}-\frac{2}{n_2}+\frac{n_3}{n_3}-\frac{2}{n_3}\right)180^\circ=360^\circ$$

$$1+1+1-2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}\right)=2$$

وعليه سيكون،



$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=\frac{1}{2}$$

وبنفس الطريقة يستطيع الطلبة إيجاد الشروط الآتية بالنسبة للتراتيب المحتملة الأخرى.

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}+\frac{1}{n_5}+\frac{1}{n_6}=2$$

يظهر في الجدول الآتي حلول الأعداد الصحيحة الـ 17 المكنة والتي ينبغي أن تؤخذ بعين الاعتبار (جدول 1).

العدد	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
1	3	7	42			
2	3	8	24			
3	3	9	18			
4	3	10	15			
5	3	12	12			
6	4	5	20			
7	4	6	12			
8	4	8	8			
9	5	5	10			
10	6	6	6			
11	3	3	4	12		
12	3	3	6	6		
13	3	4	4	6		
14	4	4	4	4		
15	3	3	3	4	4	
16	3	3	3	3	6	
17	3	3	3	3	3	3

جدول (1)

(الحلول 10، 14، 17) قد تمت مناقشتها. أما الحلول 1، 2، 3، 4، 5، 6، 9 يمكن إنشاء كل منها عند رأس منفرد بيد أنه لا يمكن أن تبسط لتغطية المستوي بكامله). ولقد صنعت من تركيبات متباينة من المثلثات، والمربعات، والمسدسات، والمثمنات، والمتسعات).

إن أياً من الحلول المتبقية يمكن أن تستخدم بوصفها النوع الوحيد من الترتيب في تصميم يغطي مستويا كاملا باستثناء 11#، والذي يجب استخدامه مقرونا مع أشكال أخرى مثل 5 # أو 15 #.

ليقم الطلبة بتأمل ماذا سيحدث في حل 5 #. في هذه الحالة يلتقي شكلان تساعيان، ومثلث عند رأس واحد. إن الشكل المبسوط يمكن أن ينشأ عبر وضع التساعيات بعضها قرب بعضها الآخر juxtaposing كما في شكل 3. وستشكل الفراغات المتبقية المثلثات التي تصاحبها.

يمكن أن يلاحظ بأن 7 #، يتألف من تساعيات، وثمانيات، ومربعات عند كل رأس، فينشأ عن ذلك نمط بالغ التعقيد (شكل 4). إن وضع ثمانيات، بعضها قرب بعضها الآخر (شكل 5) ينشأ عنه # 8. إن المساحات الفارغة توفر المساحات المطلوبة للمربعات.

يمكن الحصول على نمطين مختلفين من 12 # عبر وضع السداسيات بعضها قرب بعضها الآخر. وستكون السداسيات مشتركة بالحافات في إحداها، بينما تكون مشتركة فقط بالرؤوس في الأخرى (شكل 6 وشكل 7). إن المساحات الفارغة ستكون عبارة عن مثلثات، أو أشكال معينية تتكون من أزواج المثلثات. أدع أحد الطلبة إلى تحديد ورسم الحلول المتبقية.

التقييم اللاحق Postassessment

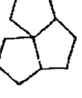
1. أي من الأشكال متعددة الأضلاع – المنتظمة الآتية سوف ترصع مستويا بالفسيفساء: (أ). مربع، (ب). مخمس، (ج) مثمن، (د). مسدس.
2. أي من تراكيب متعددات الأضلاع – المنتظمة الآتية سوف ترصع مستويا بالفسيفساء: (أ). مثمن ومربع، (ب). مخمس ومتسع، (ج). مسدس ومثلث.

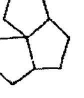
شكل (4)

شكل (3)

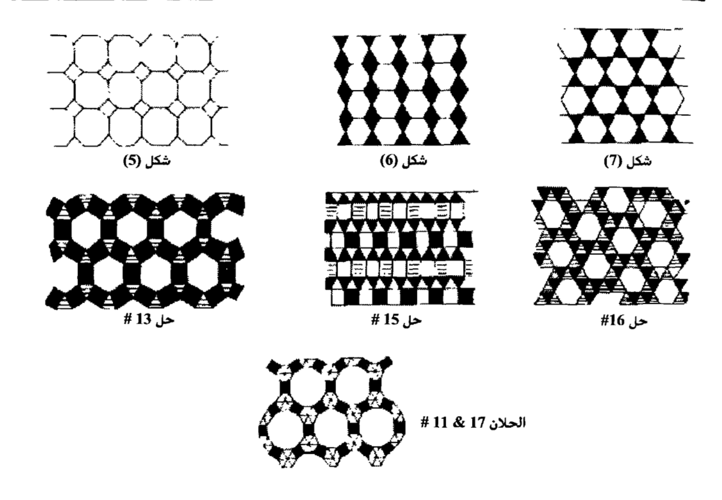


شكل (2)





شكل (1)



شكل (5) شكل (6) شكل (7)

حل 13 # حل 15 # حل 16#

الحلان 17 & 11 #

51 تقديم نظرية فيثاغورث
Introducing The Pythagorean Theorem

أعدت هذه الوحدة للطلبة الذين يتلقون مساق الهندسة المنتظمة.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مقاييس مناسبة، سيستخدم الطلبة نظرية فيثاغورث لحل المسائل الهندسية. وبالإضافة إلى ذلك، يتوقع ازدياد ميل الطلبة نحو نظرية فيثاغورث.

التقييم السابق Preassessment

دع طلبتك الإجابة على السؤال التالي: هل يمكن لسطح طاولة (منضدة) مستديرة بقطر 9 أقدام أن تدخل من باب مستطيل الشكل أبعاده 6 أقدام عرضاً و 8 أقدام طولاً؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيدرك الطلبة، فورا، بأن من الممكن تلاؤم دخول سطح المنضدة خلال الباب فقط إذا تمت إمالة سطحه. ومن أجل هذا، سيكتشف الطلبة حاجتهم إلى تحديد طول وتر المستطيل بضلعيه ´6 و´8.

في هذه النقطة يجب عليك عرض نظرية فيثاغورث. ويتوفر اكثر من 360 برهان لهذه النظرية ،(انظر:

Elisha S. Loomis, The Pythagorean Proposition, National Council of Teachers of Mathematics, Washington D. C. 1968 .

يستطيع المعلم اختيار البرهان الذي يراه مناسبا، ومثيرا للاهتمام بالنسبة لطلبة صفه. ويلاحظ أن بعض البراهين ترتكز في جزء كبير منها إلى الجبر، بينما يستند بعضها الآخر إلى الهندسة بصورة خالصة.

بعد اكتمال رحلة البرهنة على نظرية فيثاغورث، سيكون الطالب مهيئاً لتطبيق معرفته بالنظرية على بعض المسائل التطبيقية. ولا ريب بأنه يستطيع الآن إيجاد مقدار طول وتر الباب (في المسألة الأصلية) وهو 10 أقدام، وعليه سيستنتج بأن سطح المنضدة سيدخل من فتحة الباب دون أدنى شك.

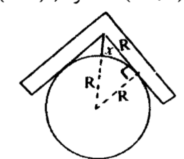
هناك الكثير من المسائل "التطبيقية" والتي يمكن استخدامها لعرض المزيد من تطبيقات نظرية فيثاغورث. فعلى سبيل المثال، افترض أن طلبتك يرغبون بإيجاد قطر أنبوب. وسيكون كل ما سيحتاجون إليه هو وضع مربع قياس النجار Carpenter's Measuring Square كما موضح في الشكل.

بعدئذ يباشرون بقياس طول x، وسيكون القطر مساويا لحوالي $4 \bullet 828x$.

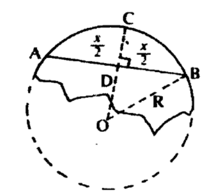
ينبغي أن يطلب من الطلبة، تحليل هذه النتيجة وبيان موردها. إن الخطوط المتكسرة، الظاهرة، في الشكل التوضيحي سوف تساعد على تبرير هذه الحالة.

عند تطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم الزاوية، سيظهر:

$R^2 + R^2 = (R + x)^2$, أو $R = x\ (1+ \sqrt{2}\,)$



إن المسألة الأخرى التي يمكن أن تكلف طلبتك بحلها هي إيجاد القطر الأصلي لصفيحة مكسورة، حيث يتوفر مقطع من الدائرة فحسب. مرة ثانية، فإن الشكل التوضيحي الآتي سيصف الحالة. أطوال كل من AB، CD قابلة للقياس،



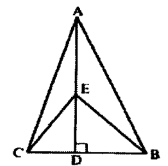
وأن الخطوط المتكسرة قد تم توفيرها لأغراض مناقشة الحلول فحسب.

دع AB = x ، CD = y وأن OB = R (نصف القطر المطلوب إيجاده). إذن OD = R - y ومن خلال تطبيق نظرية فيثاغورث على (ΔODB)

$(R - Y)^2 + \frac{x2}{4} = R^2$, ومنها $R = \frac{y}{2} + \frac{x^2}{8y}$ بحيث أن القطر سيكون بدلالة قياس المتغيرين x , y هو $y + \frac{x^2}{4y}$.

ومن خلال نظرة هندسية صارمة، ودقيقة هناك بضعة علاقات مثيرة للاهتمام والتي يمكن البرهنة عليها بتطبيق نظرية فيثاغورث. وقد ترغب بعرض بعضا من هذه العلاقات على طلبة الصف بوصفها تطبيقات إضافية لهذه النظرية.

1. إذا كانت E هي أية نقطة على الارتفاع $\overline{AD}$ ، بعدئذ $(AC)^2 - (CE)^2 = (AB)^2 - (EB)^2$

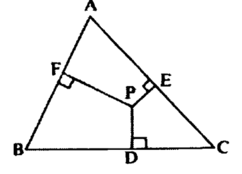


2. إذا كان المستقيمان المتوسطان $\overline{AD}$ و $\overline{BE}$ بالمثلث ABC متعامدان، بعدئذ، $AB = \sqrt{\frac{(AC)^2 + (BC)^2}{5}}$

3. إذا رسم عمود من أي نقطة داخل مثلث إلى أحد أضلاعه، فإن مجموع مربعات قياسات أي قطعة أخرى من الأضلاع التي نجمت عنها، يساوي مجموع مربعات القطع الثلاثة المتبقية.

يعني، في المثلث ΔABC أدناه:

$(BD)^2 + (CE)^2 + (AF)^2 = (DC)^2 + (EA)^2 + (FB)^2$



4. إذا كانت كل من $\overline{AD}$ ، $\overline{BE}$ ، $\overline{CF}$ مستقيمات متوسطة بالمثلث ΔABC.

بعدئذ:

(I) $\frac{3}{4}[(AB)^2 + (BC)^2 + (CA)^2] = (AD)^2 + (BE)^2 + (CF)^2$

بعدئذ،

(II) $5(AB)^2 = 4(AE)^2 + (BE)^2$

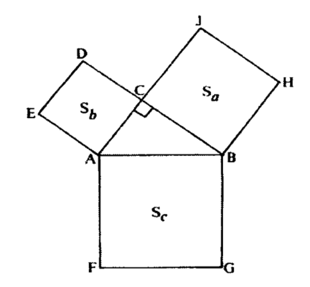
إذا كان قياس $m\angle C = 90°$.

إن الحلول الكاملة لهذه المسائل، ومسائل تحدي من أنواع أخرى يمكن الحصول عليها في:

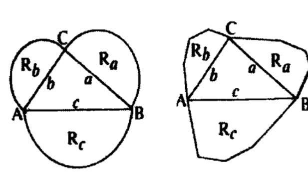
Posamentier, Alfred S. , and Charles T. Salkind; Challenging Problem In Geometry, (Palo Alto, CA: Seymour, 1988)

بعد أن ينال الطلبة معرفة كافية، ويحكمون السيطرة على هذه النظرية المحتفى بها، سيكونون على استعداد تام لتأمل تعميمها.

لغاية هذه المرحلة الحاسمة لقد تعامل الطلبة مع نظرية فيثاغورث بصيغة $a^2 + b^2 = c$، حيث تمثل كل من a و b "طولي" كل من ساقي المثلث قائم الزاوية، وتمثل c طول وتر هذا المثلث. ولكن، يمكن لهذه العبارة أن تفسر لكي تعني ما يأتي "مجموع مساحات المربعات المنشأة على ساقي المثلث قائم الزاوية تساوي مساحة المربع المنشأ على الوتر". بالنسبة للمثلث قائم الزاوية الآتي، $ƠS_a + ƠS_b + ƠS_c$ (تمثل Ơ "مساحة الـ").



والآن ليقم الطلبة باستبدال هذه المربعات بأنصاف دوائر وبأقطار $\overline{BC}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{AB}$، أو ليقوموا باستبدال المربعات بأشكال متعددة الأضلاع مقاربة بحيث تكون الأضلاع المتقابلة على أضلاع المثلث ABC.



من علاقة المساحة الأساسية:

$$\frac{ƠR_a}{Ar_c} = \frac{a^2}{c^2} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{R_b}{R_c} = \frac{b^2}{c^2}$$

بعدئذ ،

$$\frac{Ơra + ƠR_b}{ƠR_c} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$$

ولكن بواسطة نظرية فيثاغورث: $a^2 + b^2 = c^2$

بحيث

$$\frac{Ơra + ƠR_b}{ƠR_c} = 1 ،$$

$$Ơr_a + ƠR_b = ƠR_c$$

إن الدلالة المثيرة للاهتمام، والتي تكمن بهذا التوسع في نظرية فيثاغورث يجب أن تنال مزيدا من الضوء لتصبح اكثر وضوحا. بعدئذ ليجابه الطلبة مزيدا من التوسعات بهذه النظرية.

قبل مغادرة المناقشة الهندسية لنظرية فيثاغورث، قد ترغب بأن تعرض على الطلبة كيفية استخدام نقيضها لتحديد فيما إذا كانت زاوية بمثلث ما حادة، أو قائمة، أو منفرجة، إذا توفرت لديك قياسات أضلاع المثلث.

يعني،

إذا كانت $a^2 + b^2 = c^2$ تكون الزاوية $\angle c$ قائمة.

إذا كانت $a^2 + b^2 > c^2$ تكون الزاوية $\angle c$ حادة.

إذا كانت $a^2 + b^2 < c^2$ تكون الزاوية $\angle c$ منفرجة.

ينبغي أن تبرهن هذه العلاقات على إثارتها، وفائدتها الملموسة للطلبة. وبعد معالجة نظرية فيثاغورث واعتبارها من خلال منظور هندسي محكم، فإن من المتع تأمل هذه النظرية عبر اكثر من منظور، ومعالجة نظرية.

إن ثلاثية فيثاغورث التي تكتب بصيغة (a, b, c)، هي عبارة من مجموعة تتألف من ثلاثة أعداد صحيحة، وموجبة، هي c،b،aحيث يكون a2 + b2 = c2. وبالنسبة لأي ثلاثية فيثاغورية (a,b,c)، وأي أعداد صحيحة موجبة k، (ka, kb, kc) تعد ثلاثية أيضاً. ينبغي أن يكون طلبتك قادرين على برهنة هذا الأمر.

إن "الثلاثية الفيثاغورية البدائية" A Primitive

Pythagorean Triple هي عبارة عن ثلاثية فيثاغورث التي يكون أول عضوين من أعضائها أعداداً أولية نسبية، أحدهما زوجيا والآخر فرديا.

اعرض ما يأتي:

حيث $a^2 + b^2 = c^2$ (وان العددين m، n هما عددان طبيعيان وان $m > n$)، $a = m^2 - n^2$، $b = 2mn$، $c = m^2 + n^2$.

لتطوير هذه العلاقات انظر:

Sierpinski, W., Pythagorean Triangles, New York, Yeshiva University Prees, 962.

بعد إعداد جدول وفق الآتي، سيبدأ الطلبة بتخمين خصائص m و n التي سينشأ عنها أنواع محددة من ثلاثيات فيثاغورث. وسيبدأ الطلبة، أيضاً، بتقسيم ثلاثيات فيثاغورث إلى مجاميع مختلفة.

m	n	$m^2 - n^2$	2mn	$m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	4	9	40	14
3	1	8	6	10
5	2	21	20	20

إن بعض الأسئلة التي يتوقع طرحها هي: ماذا يصح حول m و n لكي تكون (a, b, c) ثلاثية فيثاغورية؟. هل يمكن لـ c في هذه الثلاثية أن يكون زوجيا ؟. لماذا ينبغي على العضو الزوجي في ثلاثية فيثاغورث البدائية أن يقبل القسمة على 4؟. ماذا سيكون صادقا بعدد m وn بحيث إن العضو الثالث في ثلاثية فيثاغورث البدائية يزيد بمقدار 1 على أحد العضوين الآخرين ؟. لماذا يكون أحد أضلاع ثلاثية فيثاغورث البدائية قابلا للقسمة على 5 دائما؟. ولماذا يكون حاصل ضرب الأعضاء الثلاثة في أي ثلاثية من ثلاثية فيثاغورث البدائية قابلا للقسمة على 60؟.

سيبدأ الطلبة، خلال فترة قصيرة، بجسّ تكافؤ الأعداد والعلاقات الخاصة بثلاثيات فيثاغورث. وسينشأ عن هذا الاهتمام الحقيقي والأصيل تقديم أولي، ومتعمق إلى موضع في نظرية العدد، قد يكون نقطة البداية لبعض الطلبة في البحث والتحري بميادين غير مألوفة.

لذا فإن دراسة نظرية فيثاغورث تمتلك اكثر من إمكانية لزيادة مستويات اهتمام الطلبة. ويجب عليك أن تأخذ زمام المبادرة في عرض تقديم لهذه التغييرات على الموضوع. وإذا أحسنت تنفيذ ذلك بدقة، فإن طلبتك سينقلون معهم هذه المحاولة إلى آفاق رحب.

مرجع Reference

Posamentier, A. S., Banks, J. H. , and Bannister, R. L. , Geometry, Its Elements and Structure, 2nd ed., New York: McGraw – hill, 1977.

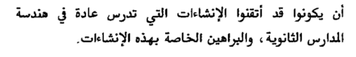
52 عودة إلى التقسيم الثلاثي للزوايا
Trisection Revisited

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتقسيم زاوية محددة إلى ثلاثة أقسام متساوية باستخدام أيا من الطرق الأربعة المعروضة.
2. سيبرهن الطلبة على الطرق الأربعة المستخدمة في تقسيم الزوايا إلى ثلاثة أقسام.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يمتلك الطلبة معرفة عملية بمادة الجبر، كما ينبغي أن يكونوا قد أتقنوا الإنشاءات التي تدرس عادة في هندسة المدارس الثانوية، والبراهين الخاصة بهذه الإنشاءات.

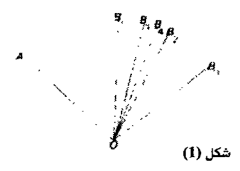


استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد إكمال عرض، والبرهنة على الإنشاء الآتي، ناقش سبب عدم كونه حلاً للمسألة القديمة الخاصة بتقسيم الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية باستخدام الأدوات الاقليدية فحسب.

لديك $\angle AOB_o$ والتي قياسها $m\angle AOB_o = x$.

أنشئ $\angle AOB_n$ بحيث أن قياس $m\angle ABO_n = \frac{2X}{3}$



شكل (1)

الإنشاء والبرهان Construction and Proof

1. أنشئ $\overline{OB1}$ ، منصف الزاوية $\angle AOB_0$

وبعدئذ $m\angle AOB_1 = x - 1/2\ x$

2. أنشئ $\overline{OB_2}$ ، منصف الزاوية $\angle B_1Ob_0$

وبعدئذ $m\angle AOB_2 = x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

3. أنشئ $\overline{OB_3}$ ، منصف الزاوية $\angle B_1OB_2$ ، وبعدئذ

$$m\angle AOB_3 = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x.$$

4. أنشئ $\overline{OB_4}$ ، منصف الزاوية $\angle B_3OB_2$ وبعدئذ

$$m\angle ABO_4 = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x$$

5. بالاستمرار على هذا المنوال سوف نصل إلى

$$m\angle ABO_n = x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x + \ldots \pm (\frac{1}{2})^n\ x$$

بعدها سنضرب في $(\frac{1}{2})$ للحصول على $(\frac{1}{2})\ m\angle AOB_n$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}x + \ldots \pm (\frac{1}{2})^{n+1}\ x$$

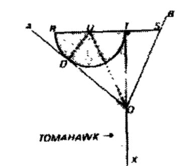
والآن سنقوم بإضافة المعادلة الثانية إلى الأولى لنحصل على:

$$(\frac{3}{2})\ m\angle AOB_n = x \pm (\frac{1}{2})^{n+1}\ x$$

$$m\angle AOB_n = \frac{2x}{3}\ [1 \pm (\frac{1}{2})^{n+1}]$$

6. سنلاحظ الآن بأنه مع ازدياد قيمة n باتجاه اللانهاية (والتي تقابل إجراء عدد غير متناهي من عمليات الإنشاء) فإن الحد $(\frac{1}{2})^{n+1}$ سوف يقترب من الصفر، وبعدئذ سيقترب قياس الزاوية $m\angle AOB_n$ من $\frac{2x}{3}$.

إن الإنشاء الثاني يضيف إلى الأدوات الاقليدية آلة ذات مظهر غريب يطلق عليها فأس التوماهوك Tomahawk (نشرت للمرة الأولى بواسطة Bergery في الطبعة الثالثة من كتاب (Geometrie Appliqee al'Industrie, Metz, 1835).



شكل (2)

لإنشاء فأس التوماهوك، ابدأ بقطعة المستقيم $\overline{RS}$ المقسومة إلى ثلاثة أقسام بالنقطتين U، و T. ارسم نصف دائرة حول U وبنصف قطر مقداره $\overline{UT}$، ثم ارسم $\overline{TX}$ عموديا على RS. أكمل رسم الآلة كما يظهر في الشكل التوضيحي.

لتقسيم أي زاوية $\angle AOB$ إلى ثلاثة أقسام متساوية، ضع الأداة على الزاوية بحيث يقع S على $\overline{OB}$، ويمر $\overline{TX}$ خلال الرأس O، وتكون نصف الدائرة مماسة لقطعة المستقيم $\overline{AO}$ في نقطة، لتكن D. بعدئذ، بما أننا نستطيع أن نعرض بسهولة تطابق المثلثات: $\Delta DOU \cong \Delta TOU \cong \Delta TOS$

ويكون لدينا:

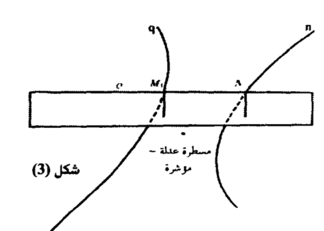
$$m\angle DOU = m\angle TOU = m\angle TOS = \frac{1}{3}\ m\angle AOB$$

إن الإنشاء الثالث يتضمن في النظرية التي اخترعها أرشميدس. ونستخدم فيه المسطرة العدلة، والتي ستؤشر بواسطتها قطعة مستقيم. إن هذا التوسع في أدوات أقليدس سيجعل من التقسيم الثلاثي لمبدأ الإقحام Insertion Principle Trisection أمرا ممكنا.

لعرض مبدأ الإقحام Insertion Principle على الطلبة، دعهم يحاولون المسألة الآتية باستخدام أدوات اقليدس.

لديك $\overline{MN}$ مع المنحنيين q و n (بحيث أن أصغر مسافة بين q و n هي $\geq$ MN) والنقطة O التي لا تقع على q أو n. أنشئ مستقيما يمر خلال O ويقطع المنحنيين q و n في النقطتين M_1، و N_1 على التوالي بحيث أن: $M_1N_1 = MN$.

باستثناء بعض الحالات الخاصة، فإن هذه المسألة ستكون مستحيلة باستخدام أدوات أقليدس بمفردها. والآن دع الطلبة يؤشرون قطعة مستقيم على مساطرهم العدلة والتي يكون قياسها مساويا MN.



شكل (3)

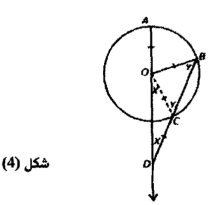
لقد أصبح، الآن، من السهل تثبيت المسطرة العدلة لحين أن ترسم مستقيما خلال النقطة O وبمسافة بين نقطتي التقاطع تساوي MN.

والآن سيكون الطلبة على أهبة الاستعداد بالنسبة للتقسيم الثلاثي لمبدأ الإقحام.

لديك الدائرة O بالزاوية المركزية $\angle AOB$.

أنشئ $\angle ADB$ بحيث يكون قياسها

$$m\angle ADB = \frac{1}{3} m\angle AOB$$



شكل (4)

الإنشاء Construction

1. أرسم $\overrightarrow{OA}$.
2. عين حدود $\overrightarrow{OA}$ على مسطرة عدلة.
3. باستخدام مبدأ الإقحام ارسم $\overline{BD}$ بحيث تكون D على $\overline{OA}$ وأن $\overline{BD}$ يقطع الدائرة O عند النقطة C مع $\overline{AO} \cong \overline{CD}$. بعدئذ، $\frac{1}{3} m\angle AOB = m\angle ADB$.

البرهان Proof

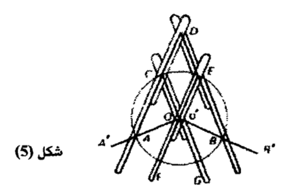
1. ارسم $\overline{OC}$.
2. بواسطة الإنشاء $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO} \cong \overline{DC}$ (نظراً لأن الثلاثة الأولى هي أنصاف أقطار الدائرة O ،وان الأخير قد أنشئ ليكون متطابقا مع $\overline{AO}$).
3. المثلثان ΔOCD، ΔBOC هما مثلثان متساوي الساقين.
4. وعليه، فإن قياس $m\angle DOC = m\angle CDO = x$ وأن $m\angle OCB = m\angle OBC = y$.
5. بما أن $\angle OCB$ هي الزاوية الخارجية بالمثلث ΔOCD، فإن $m\angle OCB = m\angle DOC + m\angle CDO = 2x$ أو $y = 2x$.
6. بنفس الطريقة، بما أن $\angle AOB$ هي الزاوية الخارجية بالمثلث ΔOBD، $m\angle AOB = m\angle ADB + m\angle OBD = x+2x = 3x$.
7. إذاً، $\frac{1}{3} m\angle AOB = m\angle ADB$.

تستثمر طريقة سيفا Ceva Method للتنصيف الثلاثي (الأخيرة في هذه الوحدة) آلة تتألف من أربعة مساطر عدلة متمفصلة مع بعضها Hinged.

وفي الشكل التوضيحي لسلسلة قضبان سيفا، تمثل النقاط C، D، E، O محاور بحيث أن الشكل CDEO سيكون عبارة عن معين.

لتقسيم الزاوية المحددة A' O' B' ثلاثة أقسام متساوية ينبغي على المرء أن يبدأ أولا برسم دائرة حول الرأس O' وبنصف قطر يساوي طول ضلع المعين CDEO. وتوضع بعد ذلك آلة سيفا على الزاوية بحيث أن النقطتين O، O' تكونان متطابقتين. ويتم تعديلها، بعدئذ، لحين مرور $\overrightarrow{DC}$ ،و $\overrightarrow{DE}$ خلال النقاط حيث يقطع المستقيمان $\overline{OA'}$ و $\overline{OB'}$ الدائرة عند النقطتين A، B على التوالي. بعدئذ،

$$m\angle AOF = m\angle FOG = m\angle GOB = (\frac{1}{3})\, m\angle AOB.$$



شكل (5)

يستخدم البرهان المعين CDEO للحصول على:

$$m\angle ACG = m\angle COE = m\angle FEB = m\angle CDE = x$$

بعدئذ، $m\angle FOG = x$. وبملاحظة أن النقطتين C،و E تقعان على الدائرة، سيكون لدينا الزاويتان $\angle ACG$، $\angle FEB$ اللتان تحيط بهما الدائرة. وبعدئذ،

$$m\ \angle ACG = x = \frac{1}{2} m\ \angle AOG$$

وأن

$$m\ \angle FEB = x = \frac{1}{2} m\ \angle FOB$$

والتي ستعطينا $2x = m\ \angle AOG$، وكذلك:

$$2x = m\ \angle FOB.$$

ويبدو واضحا بأن:

$$m\angle AOF = m\ \angle FOG = m\ \angle GOB = \frac{1}{3} m\ \angle AOB.$$

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

1. برهن صلاحية طريقة تثليث فأس التوماهوك.
2. قم بتقسيم أية زاوية اختيارية إلى ثلاثة أقسام متساوية باستخدام أي طريقتين من الطرق التي عرضت في هذه الوحدة.



البرهنة على تلاقي المستقيمات في نقطة واحدة Proving Lines Concurrent

ستعرض هذه اللحظة على الطلبة نظرية، والتي ستكون ذات أهمية بالغة في بعض الحالات عند البرهنة على تلاق المستقيمات في نقطة واحدة.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مسائل مناسبة، سيعمد الطلبة إلى تطبيق نظرية سيفا Ceva Theorem للبرهنة على تلاق المستقيمات في نقطة واحدة.

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة بمحاولة برهنة أي مما يأتي:

1. برهن على أن المستقيمات المتوسطة بمثلث تلتقي في نقطة واحدة.
2. برهن أن منصفات زوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة.
3. برهن أن ارتفاعات المثلث تلتقي في نقطة واحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

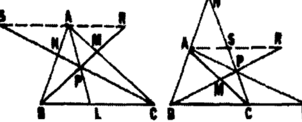
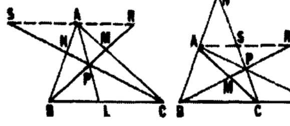
إن طالبا يرتقي مستواه بالهندسة فوق حد الوسط، ويتوفر لديه وقت كاف، ينبغي أن يكون قادرا على برهنة بعض هذه النظريات.

يجب أن يلاحظ بأن البراهين التي يحاول الطلبة عليها (تركيبيا) هي الأكثر صعوبة، وتعقيدا في مساق الهندسة بالمدارس الثانوية. إن تحدي الطلبة بهذه المسائل بالغة الصعوبة سيحدد المرحلة بالنسبة لمقدمة النظرية التي ستوفر فرصة لحل هذه المسائل بصورة بالغة السهولة.

نشرت هذه النظرية للمرة الأولى في عام 1678 بواسطة الرياضي الإيطالي جيوفاني سيفا، وقد نصت على ما يأتي:

رسمت ثلاثة مستقيمات من الرؤوس A، B، C بالمثلث ΔABC، فالتقت الأضلاع المقابلة في النقاط L، M، N، على التوالي، ستلتقي في نقطة واحدة إذا، وفقط إذا:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

ملاحظة Note: هناك حالتان: المستقيمات الثلاثة تلتقي داخل المثلث أو خارجه.

قبل تطبيق هذه النظرية على المسائل المطروحة مبكرا، فإن من الحكمة أن تبرهن النظرية.

المعطى: المثلث ΔABC، والنقطة N على $\overleftrightarrow{AB}$، و M على $\overleftrightarrow{AC}$، و L على $\overleftrightarrow{BC}$، وكذلك يلتقي كل من $\overleftrightarrow{AL}$، و $\overleftrightarrow{BM}$، و $\overleftrightarrow{CN}$ في نقطة واحدة هي P.

برهن **Prove**: $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

البرهان: **Proof**

ارسم مستقيما يمر بالنقطة A، موازيا لـ $\overleftrightarrow{BC}$ ويلتقي $\overleftrightarrow{CP}$ في النقطة S و $\overleftrightarrow{BP}$ بالنقطة R.

DAMR ~ ΔCMB

وعليه،

$$\frac{AM}{MC}=\frac{AR}{CB} \quad (I)...$$

ΔBNC ~ ΔANS

وعليه،

$$\frac{BN}{NA}=\frac{CB}{SA} \quad (II)...$$

ΔCLP ~ ΔSAP

وعليه،

$$\frac{CL}{SA}=\frac{LP}{AP} \quad (III)...$$

ΔBLP ~ ΔRAP

وعليه،

$$\frac{BL}{RA}=\frac{LP}{AP} \quad (IV)...$$

من المعادلتين (III) و (IV) سنحصل على $\frac{CL}{SA}=\frac{BL}{RA}$ أو

$$\frac{CL}{BL}=\frac{SA}{RA} \quad (V)$$

والآن بضرب (I)، و (II)، و (V) ينتج:

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{BN}{NA}\cdot\frac{CL}{BL}=\frac{AR}{CB}\cdot\frac{CB}{SA}\cdot\frac{SA}{RA}=1$$

وبما أن نظرية سيفا تمتاز بكونها ثنائية الشروط Biconditional، فإن من الضروري أن نبرهن نقيض القضية التي أكملنا البرهنة عليها الآن.

المعطى **Given**: المثلث ABC والنقطة N على $\overleftrightarrow{AB}$، وM على $\overleftrightarrow{AC}$، و L على $\overleftrightarrow{BC}$، وكذلك $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$

برهن **Proof**: التقاء $\overleftrightarrow{AL}$، و $\overleftrightarrow{BM}$، و $\overleftrightarrow{CN}$ في نقطة واحدة.

البرهان **Poof**:

لنفترض التقاء كل من $\overleftrightarrow{BM}$ و $\overleftrightarrow{AL}$ في النقطة P. وافترض التقاء $\overleftrightarrow{CP}$ وAB في 'N. بما أن $\overleftrightarrow{AL}$، و $\overleftrightarrow{BM}$، و $\overleftrightarrow{CN}$ هي مستقيمات تلتقي في نقطة واحدة، وباستخدام قسم من نظرية سيفا التي برهنا على صحتها لاحقا حصلنا على:

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN'}{N'B}=1$$

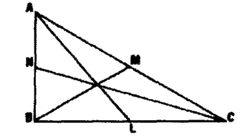
ولكن المعطى هو $\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$

وعليه سيكون، $\frac{AN'}{N'B}=\frac{AN}{NB}$، مما يؤكد تطابق النقطتين N، 'N، وعليه فإن المستقيمات الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة.

ينبغي أن يكون الطلبة، الآن، جاهزين لتطبيق نظرية سيفا على المسائل الثلاثة التي طرحت مبكراً.

1. برهن على أن المستقيمات المتوسطة في مثلث تلتقي فلاى نقطة واحدة.

البرهان **Proof**: في المثلث ΔEBC، $\overline{CN},\overline{BM},\overline{AL}$ هي مستقيمات متوسطة (انظر الشكل التالي).



وعليه فإن AN = NB، و BL = LC،و CM = MA وبضرب هذه العلاقات نحصل:

$$(AN).(BL).(CM)=(NB).(LC).(MA)$$

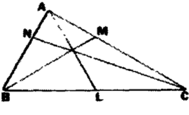
أو $\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$

إذن بواسطة نظرية سيفا كل من $\overleftrightarrow{AL}$،و $\overleftrightarrow{BM}$، و $\overleftrightarrow{CN}$ مستقيمات تلتقي في نقطة واحدة.

2. برهن بأن منصفات زوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة.

البرهان **Proof** :

في المثلث ΔABC، $\overline{CN},\overline{BM},\overline{AL}$ هي منصفات داخلية لزوايا المثلث (انظر الشكل التالي)



بما أن منصف زاوية مثلث يقسم الضلع المقابل إلى قطعتين تتناسب بنسبة الضلعين الآخرين بالمثلث، فإنها ستتبع ما يأتي:

$$\frac{AN}{NB}=\frac{AC}{BC}\ ,\ \frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}\ ,\ \frac{CM}{MA}=\frac{BC}{BA}$$

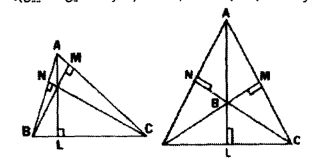
بعدئذ وباستخدام الضرب:

$$\frac{AN}{NB}\cdot\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}=1$$

إذن بواسطة نظرية سيفا فإن منصفات الزوايا الثلاثة في مثلث تلتقي في نقطة واحدة.

3. برهن أن ارتفاعات المثلث تلتقي في نقطة واحدة.

البرهان **Proof**: في المثلث ABC، تمثل $\overline{CN}, \overline{BM}, \overline{AL}$ الارتفاعات بالنسبة الأضلاع الثلاثة (أنظر الشكلين التاليين).



$\Delta ANC \sim \Delta AMB \quad \frac{AN}{MA} = \frac{AC}{AB}$

$\Delta BLA \sim \Delta BNC \quad \frac{BL}{NB} = \frac{AB}{BC}$

$\Delta CMB \sim \Delta CLA \quad \frac{CM}{LC} = \frac{BC}{AC}$

بضرب هذه النسب الثلاثة، نحصل على:

$$\frac{AN}{MA} \cdot \frac{BL}{NB} \cdot \frac{CM}{LC} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = 1$$

إذن بواسطة نظرية سيفا فإن الارتفاعات تلتقي في نقطة واحدة.

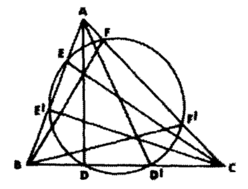
هذه هي بعض التطبيقات الأكثر بساطة حول نظرية سيفا. إن أحد المراجع الذي يمهد الحصول على تطبيقات إضافية لهذه النظرية هو:

Challenging Problems in Geometry, Vol II, by A. S. Posamentier and C. T. Salkind, Macmillan, 1970.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليستخدم الطلبة نظرية سيفا للبرهنة على أنه عندما تكون النقاط P، Q، و R على الأضلاع $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$، على التوالي بالمثلث ABC، وعندما يكون $\frac{AQ}{QC} = \frac{BR}{RC} = 2$ وأن AP = PB سينشأ عن ذلك بأن $\overline{CP}, \overline{BQ}, \overline{AR}$ تلتقي في نقطة واحدة.

2. يقطع المثلث ABC دائرة في النقاط E، E´، D، D'، F، F' (أنظر الشكل الآتي). برهن أنه في حالة التقاء $\overline{CE}, \overline{BF}, \overline{AD}$ في نقطة واحدة، بعدئذ ستلتقي المستقيمات AD'، BF'، CE' في نقطة واحدة أيضاً.

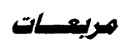


مرجع Reference

Posamentier, A-S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing – 2002.



مربعات



Squares

ستعمل هذه الوحدة على تعميق، وتقوية مهارات الطالب في البرهنة على أن الأشكال الرباعية تكون مربعات، بالإضافة إلى معاودة مراجعة موضوع الالتقاء عند نقطة واحدة.

هدف الأداء Performance Objective

سيوضح الطلبة طريقة للبرهنة على التطابق.

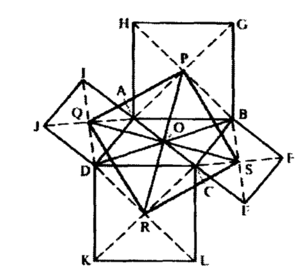
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالخصائص المختلفة للمربع، وان تكون لديهم خبرة مبكرة في البرهنة على أن الأشكال رباعية الأضلاع تكون مربعات.

استراتيجيات التعليم Teaching strategies

ليقم الطلبة بإنشاء مربع خارجي على كل ضلع من أضلاع متوازي أضلاع (انظر الشكل الآتي). وليقوموا بتحديد مركز كل مربع برسم قطريه. اسأل طلبة الصف عن ماهية الشكل الذي يعتقدون الحصول عليه عندما سيعمدون إلى وصل مراكز المربعات

المتجاورة. إن الفضول الفطري الذي يقيم في نفوسهم سيكون دافعا كافيا لتحفيزهم على محاولة البرهنة بأن الشكل PQRS هو مربع.



البرهان **Proof**:

ABCD هو متوازي أضلاع، النقاط P، Q، R، S هي مراكز المربعات الأربعة: ABGH، DAIJ، DCLK، CBFE، على التوالي. PA = DR، AQ = QD (كل منهم هو نصف قطعة قطر مربع).

الزاوية $\angle ADC$ هي زاوية مكملة للزاوية $\angle DAB$، والزاوية $\angle IAH$ هي زاوية مكملة للزاوية $\angle DAB$ (نظرا لان الزاويتين $\angle IAD$ و $\angle HAB$ هما زاويتان قائمتان). وعليه $\angle ADC \cong \angle IAH$.

بما أن:

$m\angle RDC = m\angle QDA = m\angle HAP = m\angle QAI = 45°$،

$\angle RDQ \cong \angle QAP$. إذن $\Delta RDQ \cong \Delta PAQ$ (SAS) وان QR = QP. وبنفس الأسلوب، يمكن البرهنة على أن:

QP = PS ،PS = RS.

وعليه فإن الشكل PQRS هو معين.

بما أن $\Delta RDQ \cong \Delta PAQ$، $\angle DQR \cong \angle AQP$، عليه فإن $\angle PQR \cong \angle DQA$ (بالإضافة).

وبما أن $\angle DQA \cong$ زاوية قائمة، $\angle PQR \cong$ زاوية قائمة، وأن الشكل PQRS هو مربع.

إن رسم الشكل السابق بعناية سوف يظهر بوضوح التقاء قطري المربع PQRS، وقطري متوازي الأضلاع ABCD في نقطة واحدة. إن هذا البرهان يستحق اهتماما من نوع خاص نظرا لأنه يوضح المهارة المنسية على الدوام، وهي الالتقاء عند نقطة واحدة. للبرهنة على أن قطري المربع PQRS تلتقي بنقطة واحدة مع قطري متوازي الأضلاع ABCD، ينبغي أن نبرهن أن قطري المربع، وقطري متوازي الأضلاع ينصف بعضهما الآخر. بعبارة أخرى، سنبرهن بأن قطري المربع، وقطري متوازي الأضلاع يشتركان بنفس نقطة المنتصف (يعني، النقطة O).

$\angle BAC \cong \angle ACD$ ،$m\angle PAB = m\angle RCD = 45°$

وعليه ستكون $\angle RCA \cong \angle PAC$.

بما أن $\angle COR \cong \angle AOP$ وأن AP = CR،

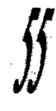
$\Delta AOP \cong \Delta COR$ (SAA).

إذن، AO = CO وكذلك PO = RO.

بما أن $\overline{DB}$ يمر خلال نقطة منتصف $\overline{AC}$ (الأقطار تنصف بعضها الآخر)، وبنفس الطريقة، $\overline{QS}$ يمر خلال نقطة منتصف $\overline{PR}$، وكذلك بما أن $\overline{PR}, \overline{AC}$ يشتركان بنفس النقطة (يعني النقطة O) فقد عرضنا التقاء المستقيمات $\overline{QS}, \overline{DB}, \overline{PR}, \overline{AC}$ تلتقي في نقطة واحدة (يعني، أن جميعها تمر خلال النقطة O).

التقييم اللاحق Postassessment

اسأل الطلبة توضيح طريقة للبرهنة على أن المستقيمات تلتقي في نقطة واحدة. من المتوقع أنهم سيعمدون إلى بيان الطريقة التي استخدمت خلال هذا الدرس.



برهنة تسامت (استقامة) النقاط
Proving Points Collinear



ستعرض هذه الوحدة للطلبة النظرية التي تعد ذات أهمية بالغة في بعض الحالات، عندما يراد البرهنة على تسامت النقاط.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مسائل مناسبة سيعمد الطلبة إلى تطبيق نظرية مينيلاوس Menelaus' Theorem للبرهنة على تسامت النقاط.

التقييم السابق Preassessment

ليحاول الطلبة البرهنة على أن منصفي الزاويتين الداخليتين بمثلث متساوي الساقين، ومنصف الزاوية الخارجية للزاوية الثالثة يلتقون مع الأضلاع المقابلة في ثلاثة نقاط متسامتة (على استقامة واحدة).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن الطالب المتوسط بهندسة المدارس الثانوية لم يتلق تدريبا كافيا، أو لا يكون مجهزا على برهنة تسامت النقاط. إذن، في معظم الحالات سوف تجد أن مسألة التقييم السابق تقع بعيدا عن متناول قابلية الطالب.

ولكن هذه الوحدة سوف تزودك باهتمام كاف من الطالب لكي تعرض له النظرية التي ستوفر حلا سهلا للمسألة.

نسبت هذه النظرية بالأساس إلى مينيلاوس بالإسكندرية (حوالي 100 بعد الميلاد)، وتمتاز بفائدة خاصة في مضمار البرهنة على تسامت النقاط. تنص النظرية على: أن النقاط P، وQ، وR على الأضلاع $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$ بالمثلث ΔABC تكون متسامتة إذا وفقط إذا:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

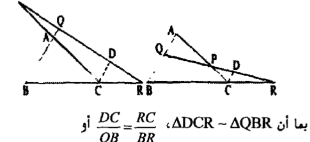
إن هذا البرهان يتألف من قسمين (ثنائي الشرط).

القسم الأول Part I: البرهنة على أن:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

البرهان Proof:

النقاط P، و Q، و R هي نقاط متسامتة. تأمل المستقيم المار بالنقطة C، موازيا لـ $\overline{AB}$، ويلتقي $\overline{PQR}$ عند النقطة D.



بما أن ΔDCR ~ ΔQBR، $\frac{DC}{QB} = \frac{RC}{BR}$ أو

$$(a)\ldots \quad DC = \frac{(QB)(RC)}{BR}$$

بنفس الطريقة، بما أن ΔPDC ~ ΔPQA، $\frac{DC}{AQ} = \frac{CP}{PA}$، أو:

$$(b)\ldots \quad DC = \frac{(AQ)(CP)}{PA}$$

من المعادلتين (a)، (b) نحصل على:

$$\frac{(QB)(RC)}{BR} = \frac{(AQ)(CP)}{PA}$$

وعليه فإن، $(QB).(RC).(PA) = (AQ).(CP).(BR)$

والذي يؤشر بأن $\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$

القسم الثاني Part II: يتضمن برهنة نقيض القضية التي برهنت في القسم الأول نظرا لان هذه النظرية ثنائية الشرط.

البرهان Proof: في الأشكال السابقة، ليلتق المستقيم المار بالنقطتين R، Q المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ في P'. بعدئذ وبواسطة النظرية التي تمت النظرية عليها قبل قليل:

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP'}{P'A} = 1$$

ولكن بالفرضية،

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

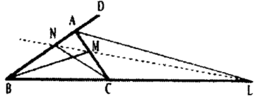
وعليه فإن $\frac{CP'}{P'A} = \frac{CP}{PA}$ وينبغي أن تتطابق النقطتان P، P'.

في هذه النقطة، يجب أن يكون الطالب متأهبا لتطبيق نظرية مينيلاوس على المسألة التي عرضت في التقييم السابق.

المعطى: المثلث ΔABC، حيث أن كل من $\overline{CN}, \overline{BM}$ هما المنصفان الداخليان للزاويتين، وأن $\overline{AL}$ ينصف الزاوية الخارجية بالنقطة A.

برهن: النقاط N، و M، و L هي نقاط متسامتة (على استقامة واحدة).

ليعمد الطلبة إلى استذكار نظرية التناسب المهمة حول منصفات زوايا المثلث.



البرهان Proof: بما أن $\overline{BM}$ ينصف الزاوية $\angle ABC$، $\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{BC}$ وبما أن $\overline{CN}$ ينصف الزاوية $\angle ACB$، $\frac{BN}{NA}=\frac{BC}{AC}$.

وبما أن AL ينصف الزاوية الخارجية عند النقطة A، $\frac{CL}{BL}=\frac{AC}{AB}$.

وعليه بالضرب نحصل على:

$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{BN}{NA}\cdot\frac{CL}{BL}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC}{AB}=1$$

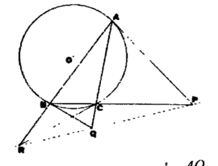
إذن. باستخدام نظرية مينيلاوس فإن النقاط N، و M، و L يجب أن تكون متسامتة (على استقامة واحدة).

لتوفير تدريب كاف على تطبيق هذه النظرية المفيدة ليتأمل الطلبة المسألة الآتية:

برهن أن الماسات للدائرة المحيطة بالمثلث ΔABC عند النقاط A، و B، و C تلتقي الأضلاع $\overleftrightarrow{BC}$، و $\overleftrightarrow{AC}$، و $\overleftrightarrow{AB}$ في النقاط P، و Q، و R. على التوالي، فإن النقاط P، و Q، و R ستكون متسامتة (على استقامة واحدة).

البرهان Proof: بما أن:

$$m\angle BAC=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BC}=m\angle QBC\ .\Delta ABQ\sim\Delta BCQ$$



وأن $\frac{AQ}{BQ}=\frac{BA}{BC}$، أو

$$(I)\ldots.\quad \frac{(AQ)^2}{(BQ)^2}=\frac{(BA)^2}{(BC)^2}$$

ولكن :

$$(II)\ldots\ldots\quad (BQ)^2=(AQ)(CQ)$$

بتعويض (II) في (I) ينتج :

$$(III)\ldots\ldots\ \frac{AQ}{CQ}=\frac{(BA)^2}{(BC)^2}$$

بنفس الطريقة،

$$m\angle BCR=\frac{1}{2}m\overset{\frown}{BC}=m\angle BAC$$

وعليه، $\Delta ARC\sim\Delta CRB$ وان $\frac{CR}{AR}=\frac{BC}{AC}$، أو

$$(IV)\ldots\ldots\ \frac{(CR)^2}{(AR)^2}=\frac{(BC)^2}{(AC)^2}$$

ولكن :

$$(V)\ldots.\ (CR)^2=(AR)(RB)$$

بتعويض (V) في (IV) ينتج:

$$(VI)\ldots\ \frac{RB}{AR}=\frac{(BC)^2}{(AC)^2}$$

ينبغي أن يكلف الطلبة الآن باستخدام نفس الاسلوب للبرهنة ان $\Delta ABP\sim\Delta CAP$، واننا بنفس الطريقة سنحصل على :

$$(VII)\ldots\ \frac{PC}{BP}=\frac{(AC)^2}{(BA)^2}$$

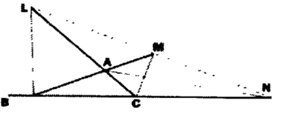
والآن بضرب هذه النسب (يعني، (III)، و (VI)، و (VII)، سينتج:

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{RB}{AR}\cdot\frac{PC}{BP}=\frac{(BA)^2}{(BC)^2}\cdot\frac{(BC)^2}{(AC)^2}\cdot\frac{(AC)^2}{(BA)^2}=1$$

إذن، بواسطة نظرية مينيلاوس، فإن النقاط P، و Q، و R هي نقاط متسامتة (على استقامة واحدة).

التقييم اللاحق Postassessment

ليستخدم الطلبة نظرية مينيلاوس في البرهنة على أن المنصفات الخارجية للزاوية بأي مثلث غير متساوي الساقين تلتقي الأضلاع المقابلة في ثلاثة نقاط متسامتة. إن الشكل الآتي سيكون مفيدا لحل المسألة.



مرجع Referemce

Posamentier,A. S., and C.T.Salkind, Challenging Problems in Geometry, New York: Dove, 1996

Posamentier, A. S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

56 قياس الزاوية بواسطة دائرة
Angle Measurement with a Circle

ستعرض هذه الوحدة طريقة غير تقليدية، لحد ما، لتطوير النظريات حول قياس الزاوية بواسطة دائرة، والتي تعالج عامة في المرحلة العاشرة من منهج الهندسة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء مواد مناسبة، سيقوم الطلبة بتوليد نظريات متعددة لقياس الزاوية بالأسلوب الذي عرض في هذه الوحدة.
2. إعطاء مسائل تتطلب استخدام النظريات التي نوقشت في هذه الوحدة. وسيصبح الطلبة قادرين على حل هذه المسائل بنجاح.

التقييم السابق Preassessment

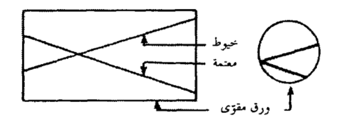
ينبغي أن يمتلك الطلبة معرفة كافية بالزاوية المحاطة وعلاقة قياسها بقوسها المتقاطع.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بالإضافة إلى استخدام مواد الصف التقليدية، ينبغي أن تهيئ ما يأتي:

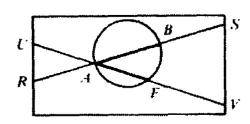
أ قطعة ورق مقوى بقطعتين ملونتين بلون غامق وبسلك مثبت، مكونا زاوية بمقاس مناسب.

ب .بدائرة من ورق مقوى وبزاوية محاطة متطابقة "بزاوية السلك "Strings Angle".



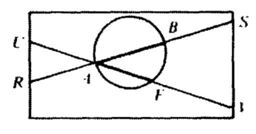
إن من الأفضل بالنسبة لكل طالب أن يقوم بإعداد مجموعته الخاصة من هذه المواد لكي ينجز الأنشطة الآتية بمفرده.

حاول أن تنشط ذاكرة طلبتك ليسترجعوا ما يستقر بها من معلومات حول علاقة الزاوية المحاطة بدائرة مع قوسها المتقاطع. وليقم الطلبة بوضع الدائرة تحت الأسلاك بحيث إن الزاويتين تتطابقان.



$m\angle BFA = \frac{1}{2} m\widehat{BF}$

والآن ليعمل الطلبة على انزلاق الدائرة إلى الموقع المبين أدناه، حيث يكون شعاعي الزاوية $\angle BAF$ موازيين، على التوالي، لشعاعي "سلك الزاوية"، $\angle NMQ$، وحيث تكون الزاوية مماسة لـ $\overleftrightarrow{UQV}$ عند النقطة M.



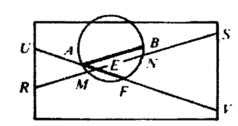
ينبغي أن يدرك الطلبة بأن $m\widehat{FM} = m\widehat{AM}$، وأن $m\widehat{AM} = m\widehat{BN}$ (بسبب المستقيمات المتوازية). وعليه $m\widehat{FM} = m\widehat{BN}$.

بما أن $m\angle NMQ = m\angle BAF$ وان:

$$m\angle BAF=\frac{1}{2}\, m\widehat{BF}=\frac{1}{2}\,(m\widehat{BN}+m\widehat{NF})$$
$$=\frac{1}{2}\,(m\widehat{FM}+m\widehat{NF}) = \frac{1}{2}\, m\widehat{MN}\ ,$$
$$m\angle NMQ = \frac{1}{2}\ m\widehat{MN}.$$

إن هذا يبرهن على أن نظرية "قياس الزاوية التي تنشأ بالمماس ووتر زاوية يساوي نصف قياس قوسها المتقاطع".

والآن ليعمل الطلبة على انزلاق الدائرة إلى الموقع حيث يقع رأس زاوية السلك على $\overline{AF}$، وحيث يكون $\overline{AB} // \overline{RS}$.



ومرة ثانية بسبب وجود الخطوط المتوازية في هذا المكان ($\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{MN}$)، $m\,\widehat{AM} = m\,\widehat{BN}$، وأن $m\angle BAF =$ $m\angle NEF$. والآن، ينبغي أن يلاحظ الطالب بأن:

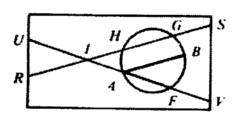
$$m\angle BAF = \frac{1}{2}\,m\widehat{BF} = \frac{1}{2}(m\widehat{BN} + m\widehat{NF}) = \frac{1}{2}(m\widehat{AM} + m\,\widehat{NF})$$

ويستطيع الطلبة استنتاج بأن:

$$m\angle NEF = \frac{1}{2}\,(m\,\widehat{AM} + m\,\widehat{NF}).$$

إن هذا الأمر يبرهن النظرية التي تنص على "أن قياس الزاوية الناتجة عن وترين يلتقيان عند نقطة داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياس الأوتار المتقاطعة بالزاوية وزاويتها العمودية".

ولتأمل النوع الثاني من الزاوية، ادع الطلبة إلى انزلاق الدائرة للموقع الموضح أدناه، حيث تبدو زاوية السلك، الآن، بوصفها تلك الزاوية التي نشأت عن قاطعين.



في هذا الموضع الجديد، $\overleftrightarrow{GT} // \overline{AB}$ وأن $\overline{AF}$ في $\overrightarrow{IF}$. ونتيجة لكون $\overleftrightarrow{GT} // \overline{AB}$ ، $m\,\widehat{BG} = m\,\widehat{HA}$، وأن:

$$m\angle BAF = m\angle GIF.$$

ليتبع الطلبة للمرة الثانية الاستدلال القائل بأن:

$$m\angle BAF = \frac{1}{2}\,m\widehat{BF}$$

$$m\angle BAF = \frac{1}{2}(m\widehat{BF} + m\widehat{BG} - m\widehat{BG})$$

$$= \frac{1}{2}(m\widehat{BF} + m\widehat{BG} - m\widehat{HA})$$

$$= \frac{1}{2}(m\widehat{GBF} - m\widehat{HA})$$

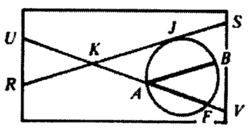
والآن يستطيع الطلبة استنتاج بأن:

$$m\angle GIF = \frac{1}{2}(m\,\widehat{GBF} - m\,\widehat{HA})$$

والذي يبرهن النظرية التي تنص على أن "قياس الزاوية التي نشأت عن قاطعين يتقاطعان في نقطة خارج دائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المتقاطعين".

إن الموقع التالي للدائرة سوف يمكن الطلبة من تأمل الزاوية التي نشأت عن مماس، وقاطع يتقاطعان خارج دائرة.

ليعمل الطلبة على انزلاق الدائرة إلى الموقع المبين في الشكل التوضيحي الآتي.



هنا $\overline{AB} // \overleftrightarrow{KJS}$ وأن $\overline{AF}$ في $\overleftrightarrow{KV}$ وأن الدائرة تمس $\overline{KS}$ في J.

نظراً لأن $\overline{AB} // \overleftrightarrow{KJS}$ ، $m\,\widehat{JA} = m\,\widehat{JB}$ وأن:

$$m\angle BAF = m\angle JKF.$$

ومنذ الآن سيكون الطلبة قادرين على إصدار ما يأتي، وبدون صعوبة كبيرة:

$$m\angle BAF = \frac{1}{2}\,m\widehat{BF} = \frac{1}{2}(m\widehat{BF} + m\,\widehat{JB} - m\widehat{JB})$$

$$= \frac{1}{2}(m\,\widehat{BF} + m\,\widehat{JB} - m\widehat{JA})$$

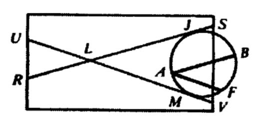
$$= \frac{1}{2}(m\,\widehat{JBF} - m\,\widehat{JA}).$$

بعدها ينبغي أن يستنتجوا بأن:

$$m\angle JKF = \frac{1}{2}(m\,\widehat{JBF} - m\,\widehat{JA})$$

والذي يبرهن النظرية التي تنص على أن "قياس الزاوية التي نشأت عن قاطع، ومماس لدائرة، بحيث يتقاطعان في نقطة خارج الدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المتقاطعين".

إن النوع الأخير من الزاوية التي ستؤخذ بعين الاعتبار هي تلك التي تنشأ من مماسين. ولغرض إنشاء هذه الزاوية ينبغي أن توضع الدائرة بتماس مع كل من السلكين، وبحيث أن كلا منهما يوازي أحد شعاعي الزاوية في الدائرة.



بوجود الدائرة في الموقع أعلاه سيكون $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{LJS}$ ، وأن $\overline{AF} \parallel \overleftrightarrow{LMV}$. والآن لن يكون الطلبة قادرين على إكمال هذا البرهان بصورة مستقلة. وينبغي أن يستدلون على أن $m\overset{\frown}{JB} = m\overset{\frown}{JA}$، وكذلك $m\overset{\frown}{MF} = m\overset{\frown}{MA}$، وكذلك $m\angle \overset{\frown}{BAF} = m\overset{\frown}{JLM}$. وعليه فإن :

$$m\angle \overset{\frown}{BAF} = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BF}$$
$$= \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BF} + m\overset{\frown}{JB} + m\overset{\frown}{MF} - m\overset{\frown}{JB} - m\overset{\frown}{MF})$$
$$= \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BF} + m\overset{\frown}{JB} + m\overset{\frown}{MF} - m\overset{\frown}{JA} - m\overset{\frown}{MA})$$
$$= \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{JMB} - m\overset{\frown}{JAM}) .$$

إذن :

$$m\angle JLM = \frac{1}{2}(m\,\overset{\frown}{JBM} - m\,\overset{\frown}{JAM})$$

والذي يبرهن النظرية التي تنص على أن "قياس الزاوية التي نشأت عن مماسين، تساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المتقاطعين".

لاختصار هذا العرض اجعل الطلبة يدركون بأن :

(1) قياس الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة يساوي نصف قياس القوس المتقاطع.

(2) قياس الزاوية التي يقع رأسها داخل الدائرة يساوي نصف مجموع قياس القوسين المتقاطعين.

(3) قياس الزاوية التي يقع رأسها خارج الدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين المتقاطعين.

انظر إلى الكتاب الآتي بوصفه طريقة بديلة لاستخدام هذه التقانة مع طلبة صفوفك:

Geometry, Its Elements and Structure,: 2nd ed., by A. S. Posamentier, J. H. Banks, and R. L. Bannister, (McGraw Hill, 1977), PP. 396 – 402

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

ليقم الطلبة بإعادة تطوير بعض النظريات الواردة أعلاه باستخدام الطرق المعروضة في هذه الوحدة.

57 التقسيم الثلاثي للدائرة
Trisecting a Circle

تعد مسألة تجزئة دائرة إلى منطقتين متساويتين المساحة، مسألة بالغة البساطة. ولكن، مسألة تقسيم الدائرة إلى ثلاثة مناطق متساوية المساحة تعد مثيرة للاهتمام. وسيعمل الطلبة في هذه الوحدة على بحث جملة من الطرق التي تحقق ذلك.

هدف الأداء Performance objective

سيصبح الطلبة قادرين على تقسيم الدائرة إلى ثلاثة مناطق متساوية بالمساحة.

التقييم السابق Preassessment

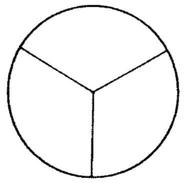
ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على إنجاز بعض الإنشاءات الهندسية البسيطة باستخدام المسطرة العدلة والفرجار. كذلك ينبغي أن يكونوا على معرفة كافية بنظرية فيثاغورس وصيغة حساب مساحة الدائرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اسأل الطلبة تقسيم دائرة إلى منطقتين متساويتين بالمساحة. ويبدو بأن الحل الذي سيبدو واضحا لديهم، سيشمل رسم قطر الدائرة الذي يقسمها وفق ما أردت منهم. والآن اسأل الطلبة تقسيم الدائرة إلى ثلاثة مناطق متساوية المساحة (يشار إليها منذ الآن بالتقسيم الثلاثي للدائرة "Trisecting a Circle").

ينبغي أن لا تثير هذه المسألة أية عقبة لان الطلبة سوف يدركون بأنه يتوجب عليهم إنشاء (باستخدام المسطرة العدلة

والفرجار) ثلاثة زوايا متجاورة بقياس $120°$ لكل منها.



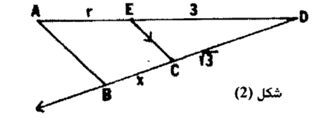
شكل (1)

ولإنشاء هذا التقسيم الثلاثي، سيعمدون ببساطة إلى تأشير ستة أقواس متساوية على طول الدائرة مع استخدام الفرجار مفتوحا على نصف قطر الدائرة. قد ترغب في تبرير هذا الإنشاء بالإشارة إلى المسدس المحاط بدائرة، والمنشأ بطريقة مشابهة.

وإذا عمدت الآن إلى سؤال الطلبة عن عرض طريقة أخرى لتقسيم الدائرة إلى ثلاثة أقسام مختلفة، ستلاحظ بأنهم سيجربون تناظرا آخر حول المركز. وفي النهاية، ستؤدي عملة التجريب إلى الأخذ بعين الاعتبار دائرتين متحدتي المركز، كل منها تتحد بمركزها مع مركز الدائرة الأصلية. وستكون المسألة عبارة عن تحديد طول أنصاف أقطار هاتين الدائرتين.

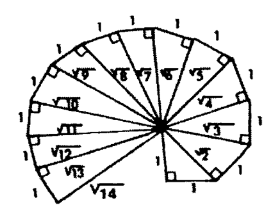
افترض بأن الطلبة سيحتسبون في البداية نصف القطر، x، للدائرة التي تبلغ مساحتها $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية، والتي نصف قطرها r. بعدئذ، $\pi x^2 = \frac{1}{3}\pi r^2$ ، والذي سينتج عنها $x = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3}$. بنفس الطريقة يمكنهم إيجاد نصف القطر، y، للدائرة التي تساوي مساحتها 2/3 مساحة الدائرة الأصلية مساحة الدائرة الأصلية، وبنصف قطر r. يعني، $\pi y^2 = \frac{2}{3}\pi r^2$ والتي سينتج عنها $y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{6}}{3}$.

والآن تم تهيئة الأطوال. وتبقى المسألة الوحيدة المتبقية هي كيفية إكمال الإنشاء. ليبدأ الطلبة بدائرة نصف قطرها r. لإنشاء x. أعد كتابة $x = \frac{r\sqrt{3}}{3}$ بصيغة $\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{r}{3}$. بعدئذ، حدد الطولين r، 3 على قطعة المستقيم المناسبة.



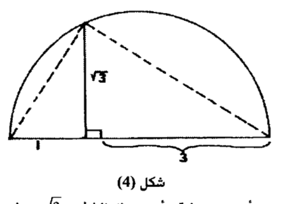
شكل (2)

وباستخدام أية زاوية مناسبة، ليعمل الطلبة على تأشير الطول $\sqrt{3}$ وعلى طول الشعاع الجديد. ولغرض إنشاء قطعة مستقيم بطول $\sqrt{3}$ قد يستخدم الطلبة أية طريقة مناسبة. على سبيل المثال، يمكن استخدام الحلزون الجذري (شكل 3).



شكل (3)

تتضمن الطريقة الأخرى التي تستخدم لإنشاء قطعة مستقيم بطول $\sqrt{3}$ إعداد مخطط توضيحي كما يظهر في شكل 4.



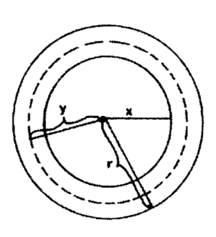
شكل (4)

ومتى أنجزت عملية تأشير هذا الطول ($\sqrt{3}$) على طول $\overline{DCB}$ (انظر شكل 2)، يستطيع الطلبة إنشاء مستقيم يمر خلال A موازيا للمستقيم $\overline{EC}$ للالتقاء مع $\overrightarrow{DC}$ في نقطة B. وباستخدام التناسب، يستطيع الطلبة إنشاء العلاقة التي تنص على أن $X = BC = \frac{r\sqrt{3}}{3}$ إذن، اسأل الطلبة رسم دائرة نصف قطرها x متحدة المركز مع دائرة معلومة، (شكل 5).

إن مساحة الدائرة الصغيرة تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الكبيرة. لإكمال عملية التقسيم الثلاثي للدائرة ينبغي على الطلبة إنشاء دائرة بنصف قطر مقداره y، متحدة المركز مع الدائرة الأصلية.

إن مساحة الدائرة التي قطرها y يجب أن تساوي $\frac{2}{3}$

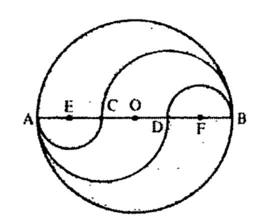
مساحة الدائرة التي نصف قطرها r. وعليه فإن، $\pi y^2 = \frac{2}{3}\pi r^2$، وان $y = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{6}}{3}$. ليقم الطلبة بإنشاء y بأسلوب يماثل إنشاء x. ثم رسم دائرة متحدة المركز مع البقية (انظر الدائرة بالخط المنقط في شكل 5).



شكل (5)

إن الشكل الناتج يظهر دائرة مقسمة إلى ثلاثة أقسام متساوية.

إن تقسيما ثلاثيا اكثر إثارة للاهتمام لدائرة ما يتضمن أسلوب تقسيم غير مألوف.



شكل (6)

في شكل 6 تم تقسيم قطر الدائرة الأصلية إلى ثلاثة أقسام متساوية عند النقطتين C، وD. بعد ذلك ترسم أربعة أنصاف دوائر كما يظهر في الشكل. تمثل كل من المساحتين المظللتين $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية. وعليه فإن المساحة غير المظللة يجب أن تساوي مساحتها $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية. وبذلك تكون الدائرة قد تم تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية.

للبرهنة على صلاحية هذا التقسيم، يجب على الطلبة بيان إن مساحة إحدى المنطقتين المظللتين تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية.

مساحة المنطقة المظللة "العليا" = مساحة نصف الدائرة AB – مساحة نصف الدائرة BC + مساحة نصف الدائرة AC. إذا كان AE = r، AO = 3r و BD = 2r. من اجلها فإن مساحة المنطقة المظللة "العليا" ستساوي:

$$= \frac{1}{2}\pi(3r)^2 - \frac{1}{2}\pi(2r)^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$= \frac{9\pi r^2}{2} - \frac{4\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2} = 3\pi r^2$$

ولكن مساحة الدائرة الأصلية، والتي يراد تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية تساوي $\pi(3r)^2 = 9\pi r^2$. إذن، مساحة كل منطقة من المناطق المظللة تساوي $\frac{1}{3}$ مساحة الدائرة الأصلية، والتي تم تقسيمها بعدئذ.

التقييم اللاحق Postassessment

قدم للطلبة دائرة محددة، واطلب منهم تقسيمها إلى ثلاثة مناطق بمساحات متساوية.



نظرية بطليموس
Ptolemy's Theorem

ستعرض هذه الوحدة للطلبة نظرية ذات إمكانيات متميزة حول الأشكال الرباعية المحاطة بدائرة.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مسائل مناسبة، سيباشر الطلبة تطبيق نظرية بطليموس لحل المسألة بصورة ناجحة.

التقييم السابق Preassessment

اعرض للطلبة شبه منحرف متساوي الساقين، Isosceles oidTrapez طول قاعدتيه 6، 8 وكل من ساقيه 5.
اسأل الطلبة إيجاد طول قطر شبه المنحرف.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

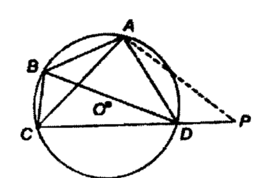
إن الطلبة الذين يمتلكون معرفة كافية بنظرية فيثاغورث سيكونون قادرين على حل هذه المسألة من خلال ممارسة تطبيقين عليها ولكن معظم الطلبة، بعد أن تعرض عليهم هذه الطريقة، سوف يرحبون بلا شك بالطريقة الأقل إثارة للضجر عند ممارسة الحل وسيحصل هذا عندما ستقوم بعض نظرية بطليموس.

نظرية بطليموس ***Ptolemy's Theorem***: في الشكل الرباعي الحلقي (محاط بدائرة مماسة)، يكون حاصل ضرب طول قطريه مساويا لحاصل ضرب طول زوجي الضلعين المقابلين.

قبل البرهنة على هذه النظرية تأكد من فهم الطلبة عبارة النظرية. وفهم المقصود من الشكل الرباعي الحلقي. وسيتم استعراض بعض النظريات الأكثر شيوعا حول الشكل الرباعي الحلقي خلال هذه الوحدة. يجب أن تعطى أمثلة عن الأشكال الرباعية – غير الحلقية quadrilaterals Non Cyclic، بحيث يقبل الطلبة على الأشكال الرباعية – الحلقية بصورة أفضل.

البرهان Proof:

تأمل الشكل الرباعي ABCD المحاط بالدائرة O. ارسم مستقيما يمر بالنقطة A ويلتقي مع $\overleftrightarrow{CD}$ عند النقطة P، بحيث يكون $m\angle BAC = m\angle DAP$.



بما أن الشكل الرباعي ABCD دائري، فإن الزاوية $\angle ABC$ مكملة للزاوية $\angle ADC$. ولكن الزاوية $\angle ADP$ هي زاوية مكملة للزاوية $\angle ADC$. وعليه فإن:

$m\angle ABC = m\angle DAP$.

بعدئذ يمكننا البرهنة على أن $\Delta ABC \sim \Delta DAP$، وأن $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DP}$ أو $DP=\frac{(AD)(BC)}{AB}$.

وبما أن $m\angle ABC = m\angle DAP$ و $m\angle BAD = m\angle CAP$

وبما أن $\Delta BAC \sim \Delta DAP$ و $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AP}$

فإن $\Delta ABD \sim \Delta ACP$

إذن $\frac{BP}{CP}=\frac{AB}{AC}$ أو $CP=\frac{(AC)(BD)}{AB}$

ولكن $CP = CD + DP$

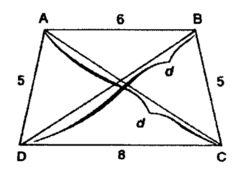
بالتعويض $\frac{(AC)(BD)}{AB}=CD+\frac{(AD)(BC)}{AB}$.

والآن بتبسيط هذه الصيغة سنحصل على النتيجة المطلوبة.

$(AC)(BD) = (AB)(CD) + (AD)(BC)$

والتي تعكس بجلاء نظرية بطليموس.

أعرض للطلبة كيفية استخدام نظرية بطليموس في حل مسألة التقييم السابق. وبما أن شبه المنحرف متساوي الساقين يعد شكلا رباعيا حلقيا، يمكن استخدام نظرية بطليموس للحصول على $d^2 = (6)(8) + (5)(5) = 73$

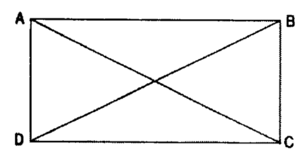


وعليه فإن طول قطر شبه المنحرف (d) هو $\sqrt{73}$.

غالبا ما يرغب الطلبة بمعرفة إذا كانت هناك ثمة نظرية "جديدة" متوافقة مع النظرية التي درسوها سابقا. ليقم الطلبة بتطبيق نظرية بطليموس على مستطيل (والذي لا يختلف في عده شكلا رباعيا حلقيا).

بالنسبة للمستطيل ABCD تبدو نظرية بطليموس كما يأتي

$(AC)(BD) = (AD)(BC) + (AB)(DC)$



ولكن، في المستطيل AB=CD، AD=BC، AC=BD، وعليه، بالتعويض سنحصل على :

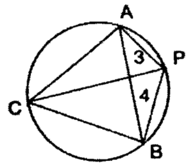
$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$

والتي تمثل نظرية فيثاغورث.

والآن دع الطلبة يتأملون تطبيقا أكثر سهولة لهذه النظرية المحتفى بها.

مسألة Problem:

إذا وقعت النقطة P على القوس AB الدائرة المحيطة بالشكل الرباعي ABCP، وكانت AP = 3 بينما BP = 4. جد طول $\overline{CP}$.



الحل Solution: دع t تمثل طول ضلع في الشكل الرباعي ABCP. بما أن الشكل الرباعي ABCP هو شكل دائري، تستطيع تطبيق نظرية بطليموس عليه، فينجم عن تطبيقها ما يأتي:

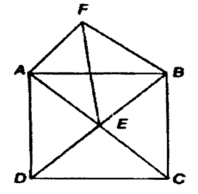
$(CP)(t) = (AP)(t) + (BP)(t)$

وعليه سيكون: $CP = AP + BP = 3 + 4 = 7$

ينبغي أن يشجع الطلبة على تحري مسائل مشابهة حيث يستبدل المثلث متساوي الأضلاع مع متعددات أضلاع أخرى - منتظمة.

غالبا ما تبدو المسائل أسهل بكثير مما هي عليه في الواقع. إن المسألة التالية التي سنشبعها بالدراسة هي تلك التي تبدو سهلة الحل بواسطة تطبيق نظرية فيثاغورث. ولكن، أثناء الحل سيبدو واضحا بأن من الأفضل توظيف نظرية بطليموس.

مسألة Problem: على الضلع $\overline{AB}$ في المربع ABCD، تم رسم المثلث قائم الزاوية ΔABF، والذي وتره $\overline{AB}$ بصورة خارجية على المربع. إذا كان AF = 6، BF = 8، جد EF، حيث تمثل E نقطة تقاطع وتري المربع.



الحل Solution

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث قائم الزاوية ΔAFB، سنحصل على AB = 10، وبالنسبة للمثلث قائم الزاوية ΔAEB، سنحصل على $AE = BE = 5\sqrt{2}$. وبما أن:

$m\angle AFB = m\angle AEB = 90°$

فإن الشكل الرباعي AFBE هو شكل دائري. والآن تستطيع تطبيق نظرية بطليموس على الشكل الرباعي AFBE، لنحصل على $(AB)(EF) = (AF)(BE) + (AE)(BF)$.

بتعويض القيم المناسبة سنحصل على:

$$(10)(EF) = (6)(5\sqrt{2}) + (5\sqrt{2})(8)$$

أو $EF = 7\sqrt{2}$.

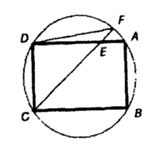
ينبغي أن يشجع الطلبة على تأمل هذه المسألة بالمثلث قائم

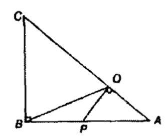
الزاوية ΔABF مرسوما من داخل المربع. في تلك الحالة سيكون $EF = \sqrt{2}$

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بحل لكل من المسائل الآتية:

1. تقع النقطة E على الضلع $\overline{AD}$ في المستطيل ABCD، بحيث أن $DE = 6$. بينما $DA = 8$، $DC = 6$. إذا كان امتداد $\overline{CE}$ يلتقي الدائرة المحيطة بالمستطيل في النقطة F، جد قياس الوتر $\overline{DF}$.
2. تقع النقطة P على الضلع $\overline{AB}$ في المثلث القائم الزاوية ΔABC الذي وضع بحيث أن $BP = AP = 2$. النقطة Q على الوتر AC بحيث أصبح $\overline{PQ}$ عموديا على $\overline{AC}$. إذا كان $CB = 3$. جد قياس $\overline{BQ}$ باستخدام نظرية بطليموس





مرجع Reference

Posamentier, A. S., and Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, New York: Dove, 1996.

Posamentier, A. S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.



59 إنشاء π

Constructing π

هدف الأداء Performance Objective

1. سيظهر الطلبة معرفة واضحة بالنسبة π والعلاقات التي نربطها مع الدائرة.
2. سيقوم الطلبة بإنشاء π بأكثر من طريقة.

التقييم السابق Pressessment

قبل بدء بمناقشة π، استعرض مع الطلبة معنى القطر، والمحيط ثم ليقوموا بقياس قطر ومحيط قطعة نقود فئة 25 سنتا. كذلك اسألهم الحصول على قياسات مماثلة لأشياء دائرية، وحاول أن تؤكد على أهمية دقة القياس.

استراتيجية التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بكتابة الجدول الآتي على السبورة.

الشيء	C	D	C+D	C-D	C.D	C/D

قم بتسجيل بعض القياسات التي حصل عليها الطلبة. ينبغي أن يكون الجميع قد وجدوا بأن قطر فئة الـ 25سنتا يبلغ 2.4 ملم وان محيطها يبلغ حوالي 7.8ملم. بعد ذلك دع الطلبة يملئون بقية الجدول بالنسبة للأشياء التي قاموا بقياسها. اطلب منهم أن يلاحظوا فيما إذا ظهر بأن أي عمود ينتج فيه قيمة مقاربة بالنسبة لكل شيء تمت عملية قياسه، آنذاك عليهم أن يأخذوا متوسط الأعداد الموجودة في ذلك العمود. كما ينبغي أن تقارب متوسطات الأعداد لديهم 3.14 (يعني $\frac{C}{D} = 3.14$). ينبغي أن يؤكد على أن جميع الأعمدة الأخرى سينتج عنها نتائج متباينة. باستثناء عمود C/D الذي قد ثبتت قيمته مهما كان مقدار الشيء المقاس.

في عام 1737م، تم إطلاق تسمية خاصة على هذه النسبة هي "π" بواسطة ليونارد ايولر Leonard Euler، وهو رياضي سويسري ذائع الصيت.

إن القيمة الدقيقة لهذه النسبة لا يمكن حسابها، ويمكن تقريبها فقط.

وندرج أدناه قيمة π مقربة إلى 50 مرتبة عشرية:

π = 3.14159265358979323824626433832795028841971693993751 ....

أجريت محاولات عديدة ،عبر سنين عدة، لحساب قيمة π، بالأسلوبين الجبري والهندسي، وستعرض هذه الوحدة بعضاً منها في الإنشاءات الهندسية التي تتضمن π.

إن إحدى أولى المحاولات الجادة لاحتساب π بمستوى محدد من الدقة الموضوعية تعود بنا إلى الوراء إلى عصر ارخميدس، الذي حاول احتسابها بدقة كبيرة. استندت طريقته إلى حقيقة أن محيط الشكل متعدد الأضلاع المنتظم الذي يحوي على n من الأضلاع يكون اصغر من محيط الدائرة التي تحيط به، بينما يكون محيط متعدد الأضلاع المنتظم اكبر من محيط الدائرة التي يحتويها. وبإعادة هذه الحالة، على التعاقب، لقيم n اكبر، سيصل المحيطين إلى قيمة محيط الدائرة من الجهتين.

ابتدأ ارخميدس بمسدس منتظم، وحاول في كل مرة مضاعفة عدد أضلاعه لحين حصوله على متعدد أضلاع بـ 96 ضلعا. بعدئذ كان ارخميدس قادرا على تحديد أن نسبة محيط الدائرة إلى قطرها، أو π، يكون أقل من $3\frac{10}{70}$ ولكنه اكبر من $3\frac{10}{71}$. تستطيع كتابة هذا الرقم برموز عشرية كما يأتي $3.14085 < \pi < 3.142857$.

ولمساعدة الطلبة على فهم هذه الطريقة، فإن من المفيد قيامك بتوضيحها عبر مجموعة من الأشكال. وسيساعد الجدول الآتي، أيضاً، في توضيح هذا المفهوم، حيث سيرى الطلبة بوضوح بأنه مع ازدياد عدد الأضلاع، سوف تصبح قيمة π أكثر دقة في قمتها التقريبية.

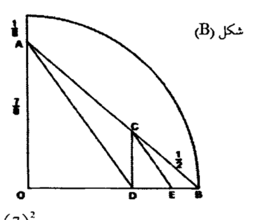
عدد الأضلاع	محيط متعدد الأضلاع المطوق	محيط متعدد الأضلاع المحاط بدائرة
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914

شكل A

سيرى الطلبة الآن بأنهم قادرين على إنشاء قطعة مستقيمة الذي يقترب طولها من π، وطور الإنشاء في منتصف الـ 1800 ويحتوي على النسبة $\frac{355}{113}$ (والتي سبق أن اكتشف بواسطة فلكي صيني في القرن الخامس الميلادي) $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3.1415929....$ الذي هو تقريب لقيمة π إلى ستة خانات عشرية.

يبدأ الإنشاء بربع دائرة Quadrant نصف قطرها وحدة واحدة. يبلغ طول AO حوالي $\frac{7}{8}$ نصف القطر، رسم $\overline{AB}$ وتم تأشير النقطة C بحيث $CB = \frac{1}{2}$ نصف القطر. رسم $\overline{CD}$ موازيا للمستقيم $\overline{AO}$، ورسم $\overline{CE}$ موازيا للمستقيم $\overline{AD}$.

شكل (B)



لقيم الطلبة بإيجاد AB: $\left(\frac{7}{8}\right)^2 + 1^2 = (AB)^2$، إذن $AB = \frac{\sqrt{113}}{8}$. باستخدام نفس المثلثات، يمكن الحصول بسهولة على العلاقات الآتية (ليوضح الطلبة لماذا $\Delta CDB \sim \Delta AOB$ و $\Delta CEB \sim \Delta ADB$).

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DB}{OB} \text{ وكذلك } \frac{CB}{AB} = \frac{EB}{DB}$$

بضرب هذه الصيغ، نحصل على:

$$\frac{EB}{OB} = \frac{CB^2}{AB^2} = \frac{1/4}{113/64} = \frac{16}{113}$$

ولكن، بما أن OB = 1، سنحصل على:

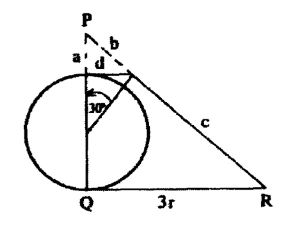
$\frac{EB}{1} = \frac{16}{113}$ أو $E = \frac{16}{113} \approx .141592904.....$

وبما أن $3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}$، يمكن أن نرسم، الآن، قطعة مستقيم يبلغ طولها ثلاثة أضعاف نصف القطر وممتدا بالمسافة EB. إن هذا سيعطينا قطعة مستقيم تختلف عن π بأقل من

واحد بالمليون من الوحدة. إن تقريبا هندسيا، اكثر صعوبة، لـ π قد طور عام 1685 بواسطة القسيس آدم كوخانيسكي Father Adam Kochansky، وهو أمين مكتبة الملك جون الثالث ببولندة.

ارسم دائرة بنصف قطر مقداره وحدة واحدة، بعدئذ ارسم قطعة مستقيمة مماسة $\overline{QR}$ يساوي ثلاثة أمثال القطر. ارسم قطرا عموديا على $\overline{QR}$ عند النقطة Q، نقطة التماس. والآن ارسم مستقيما، d، مماسا للجهة الثانية من القطر بحيث أن قياس الزاوية المركزية يساوي 30°. صل بين النقاط ومد قطعة المستقيم لكي تكون الشكل الآتي.

وسيصبح الطلبة جاهزين لحساب قيمة π. (سوف يعرض انه في حالة كون طول نصف القطر يساوي 1، فإن المستقيم C يقارب π).



شكل (C)

إذا كان r=1، في المثلث Δ PGR،

$$(a+2)^2 + (3)^2 = (b+c)^2 \;....\quad (1)$$

كذلك، باستخدام مثلثات مماثلة، سيكون لدينا

$$\frac{d}{3}=\frac{a}{a+2}\;.................\quad (2)$$

وكذلك،

$$\frac{b}{b+c}=\frac{d}{3}\;.................\quad (3)$$

من معادلة (2) نحصل على 3a = ad+2d أو $a=\frac{2d}{3-d}$،

ولكن $\tan 30=\frac{d}{1}=d=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

وعليه

$$a=\frac{2\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} \quad \text{أو} \quad a=\frac{2\sqrt{3}/3}{3-\sqrt{3}/3}\;........\quad (4)$$

وبنفس الطريقة، من معادلة (3) نحصل على،

$$b=\frac{cd}{3-d}=\frac{c\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}}\;..............\quad (5)$$

بتعويض معادلة (4) ومعادلة (5) في معادلة (1) نحصل الآن على $\left(\frac{2\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}}+2\right)^2+9=\left(\frac{c\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}}+c\right)^2$.

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل هذه المعادلة بالنسبة للمتغير c، وسيحصلون على الناتج $c=\sqrt{\frac{40}{3}-2\sqrt{3}}$.

ليقم الطلبة بتبسيط هذا الجذر للحصول على 3.141533 كقيمة مقربة للمتغير c. ينبغي أن يؤكد خلال هذا الدرس بأن جميع القيم المستحصلة هي عبارة عن "تقريبات" لقيمة π، نظرا لاستحالة إنشاء π بواسطة مسطرة عدلة وفرجار.

Posamentier, A.S., and Gordon, Naom, "An Astounding Revelation On The History of π", the Mathematics Teaches Vol.77, No.1, Jan. 1984, NCTM.

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد قطر الدائرة التي يبلغ محيطها 471 قدما.
2. أنشئ تقريبا هندسيا لـ π بأكثر من طريقة.



60 الاربيلوس The Arbelos

تمتاز المنطقة التي تحيط بها ثلاثة أنصاف دوائر (بطريقة تشابه سكين صانع الأحذية Shoemaker) بخصائص مثيرة للاهتمام. وغالباً ما يطلق على هذه المنطقة اسم ***الاربيلوس Arbelos***، وهي موضوع هذه الوحدة.

سنقدم للطالب في هذه الوحدة، هذا الشكل الهندسي مع قصد متابعة خواصه بصورة اكثر شمولا.

أهداف الأداء Performance Objective

1. سيميز الطلبة الاربيلوس.
2. سيعمد الطلبة إلى حل مسائل تتضمن الاربيلوس.

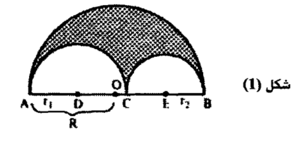
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن تعرض هذه الوحدة على الطلبة الذين اكملوا دراسة الهندسة (أو قد سجلوا بالوقت الحالي في الفصل الأخير لمساق الهندسة الدراسي). وينبغي أن يكونوا قادرين على حساب أطوال الأقواس، ومساحات المثلثات، والدوائر.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليرسم الطلبة نصف دائرة مركزها O، وقطرها $\overline{AB}$. دع $AB = 2R$. ليقوموا بعد ذلك بتأشير النقطة C بين النقطتين A و B. بعدئذ ليقوموا بجعل $\overline{AC}$، و $\overline{CB}$ أقطارا للدائرتين D، E. على التوالي. (انظر شكل 1).

دع $AC = 2r_1$ وكذلك $BC = 2r_2$. إن الجزء المؤشر في الشكل يعرف بالاربيلوس، أو سكين صانع الأحذية. يمتلك هذا الجزء بعضا من الخصائص المثيرة والتي عالجها العالم الرياضي الشهير ارخميدس.



شكل (1)

والآن يجب أن توجه انتباه الطلبة نحو الشكل التوضيحي. حاول أن تستخرج من طلبتك الخاصية الآتية للاربيلوس: والتي $\ell\widehat{AB}=\ell\widehat{AC}+\ell\widehat{CB}$ وعندما يفهم الطلبة هذه الخاصية، ينبغي أن يعد برهان عليها.

في دائرة ما، فإن طول القوس = $2\pi r\times\frac{n}{360}$ (حيث n عدد درجات القوس، r طول نصف القوس)، وسيكون لدينا:

$$\ell\widehat{AB}=\frac{180}{360}\times 2\pi R=\pi R$$

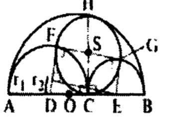
$$\ell\widehat{AC}=\frac{1}{2}\times 2\pi r_1=\pi r_1$$

$$\ell\widehat{CB}=\frac{1}{2}\times 2\pi r_2=\pi r_2$$

كذلك $R = r_1 + r_2$، وعليه عند ضرب هذه المعادلة بـ π، نحصل على $\pi R = \pi r_1 + \pi r_2$ أو $\ell\widehat{AB}=\ell\widehat{AC}+\ell\widehat{CB}$.

ليتأمل الطلبة الحالة حيث تستقر ثلاثة أنصاف دوائر على المستقيم $\overline{AB}$ (بدلا من اثنين). فهل ستصح نفس العلاقة؟

ينبغي أن يرسم الطلبة ، الآن، عمودا على المستقيم $\overline{AB}$ في النقطة C، والذي يلتقي مع الدائرة عند النقطة H. كذلك ارسم المماس المشترك Common Tangent للدائرتين D، E وأطلق على نقطتي التماس F، G، على التوالي. ارمز إلى نقطة تقاطع



شكل (2)

قطعتي المستقيم بالرمز S (انظر الشكل 2).

بما أن قطعة المستقيم المرسومة عموديا على القطر هي المتوسط الهندسي بين قطعتي القطر، سيكون لدينا $(HC)^2=2r_1.2r_2=4r_1r_2$. كذلك $FG = JE$ (ليوضح الطلبة ذلك سبب ذلك على الشكل التوضيحي).

بما أن JD=r1-r2 وكذلك DE=r1+r2، بعدئذ

$$(JE)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$$
$$= r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2 = 4r_1r_2$$

وعليه فإن $(FG)^2 = 4r_1r_2$ أو $(HC)^2 = (FG)^2 = 4r_1r_2$.

اسأل طلبتك إذا كانوا قادرين على اقتراح علاقة أخرى قد تكون قائمة بين $\overline{HC}$ وكذلك $\overline{FG}$. ومتى اظهر احدهم استجابة بأن $\overline{HC}$ و $\overline{FG}$ ينصف أحدهما الآخر عند النقطة S، حاول أن نجعل الطلبة يحاولون البرهنة عليها بأنفسهم. $\overline{SC}$ هو المماس الداخلي – المشترك لكل من الدائرتين، وعليه فإن FS = SC، SC = SG والذي سيمنحنا FS = SG. ولكن، بما أن HC = FG (ليقم الطلبة بيان سبب ذلك)، ونحن نعلم كذلك بأن HS = SC كذلك بما أن FS = SG = HS = SC، فإن النقاط C, G, H, F تحدد دائرة مركزها S.

إن إحدى الخصائص المثيرة للاهتمام في الاربيلوس هي تلك التي تتضمن هذه الدائرة التي تحوي $\overline{HC}$ و $\overline{FG}$ كأقطار لها. ليحاول الطلبة وصف مساحة الاربيلوس بدلالة r_1، r_2. مساحة الاربيلوس = مساحة نصف الدائرة AHB – (مساحة نصف الدائرة AFC + مساحة نصف الدائرة CGB).

بما أن مساحة نصف الدائرة $\frac{\pi r^2}{2}$، سيكون لدينا مساحة

الاربيلوس= $\frac{\pi R^2}{2}-(\frac{\pi r_1^2}{2}-\frac{\pi r_2^2}{2}) = \frac{\pi}{2}(R^2 - r_1^2 - r_2^2)$

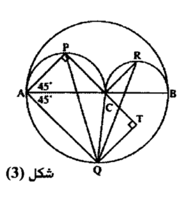
ونحن على علم بأن $R = r_1 + r_2$. وبالتعويض سنحصل على:

$$\text{مساحة الاربيلوس} = \frac{\pi}{2}((r_1+r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2)$$
$$= \frac{\pi}{2}(r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 - r_2^2)$$
$$= \frac{\pi}{2}(2r_1r_2) = \pi r_1 r_2$$

ليقم الطلبة الآن بإيجاد مساحة الدائرة S. القطر $HC = 2\sqrt{r_1r_2}$، لذا فإن نصف القطر = $\sqrt{r_1r_2}$. بعدئذ ستكون مساحة الدائرة تساوي $\pi(\sqrt{r_1r_2})^2 = \pi r_1r_2$.

يبدو واضحا الآن بأن على الطلبة أن يبرهنوا بأن مساحة الاربيلوس تساوي مساحة الدائرة S.

قد ترغب بتقديم اربيلوس آخر يثير الاهتمام افترض النقطتين P، R نقطتا منتصف القوسين $\overset{\frown}{AC}$، $\overset{\frown}{CB}$ على التوالي. لتكن Q نقطة منتصف نصف الدائرة $\overset{\frown}{AB}$. صل كل من النقاط P، R إلى C وإلى Q. وسينشأ الشكل الرباعي المحدب PQRC (انظر شكل 3).



شكل (3)

إن مساحة هذا الشكل الرباعي تساوي مجموع مربعات أنصاف الأقطار r_1، r_2 لنصفي الدائرة الصغيرين.

سيتبع البرهان كما يأتي: يمكن تقسيم الشكل الرباعي إلى مثلثين برسم $\overline{CQ}$. ويمكن أن تعرض مساحة ΔQCP بأن تكون مساوية لمساحة المثلث قائم الزاوية ΔAPC. ويشترك المثلثان بقاعدة مشتركة $\overline{CP}$، لذا ينبغي البرهنة على تساوي ارتفاعيهما.

لتحقيق ذلك، ارسم $\overline{AP}$، $\overline{AQ}$، وارسم $\overline{QT}$ عموديا على امتداد $\overline{PC}$. (انظر شكل 3). بما أن Q هي نقطة منتصف الدائرة AB، $m\overset{\frown}{QB} = 90°$. وعليه فإن: $m\angle QAB = 45°$. كذلك بما أن المثلث ΔAPC هو مثلث قائم الزاوية – متساوي الساقين. $m\angle PAB = 45°$، والتي ستمنحنا بأن $m\angle PAQ = 90°$. ولكن بما أن: $m\angle APC = 90°$ وأن قياس $m\angle PTQ = 90°$ أيضا، فإن الشكل الرباعي APTQ هو مستطيل وأن AP = QT.

وعليه، فإن مساحة المثلث ΔQCP = $\frac{CP.PA}{2}$

بما أنه في المثلث القائم الزاوية – متساوي الساقين APC،

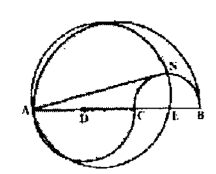
$(CP)^2 + (PA)^2 = (2r_1)^2$ أو $2(CP)^2 = (2r_1)^2$.

وعليه فإن $(CP)^2 = 2r_1^2$ أو $\frac{CP.PA}{2} = r_1^2$

وعليه سيكون لدينا بأن مساحة المثلث $\Delta QCP = r_1^2$. وبنفس الطريقة، يمكن أن يعرض بأن مساحة $\Delta QCR = \frac{CR.RB}{2} = r_2^2$. وعليه فإن، مساحة الشكل الرباعي = $r_2^2 + r_1^2$.

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا كان $r_1=16$، $r_2=4$. برهن على أن $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB}$، ثم جد نصف قطر الدائرة S، وجد مساحة الاربيلوس.
2. صف نصف الدائرة D تحت $\overline{AB}$ (شكل 4). اجعل $\overline{AN}$ مماسا للدائرة E. بين أن مساحة المنطقة المظللة تساوي مساحة الدائرة التي قطرها $\overline{AN}$.



شكل (4)

3. جد مساحة الشكل الرباعي PQRC (انظر شكل 3)، إذا كانت $r_1 = 8$ ، $r_2 = 5$.

4. ما هي العلاقة بين الاربيلوس في شكل 3 وأعداد فايبوناشي. (انظر الدرس الإثرائي 53)

مرجع Reference

Gardner, Martin, “The Diverse Pleasures of Circles that Are Tangent to One Another”, Scientific American, 240 (1), January, 1979



دائرة بتسعة نقاط

The Nine-Point Circle

غالبا ما يهمل مفهوم إنشاء نقاط متحدة دائريا (على نفس الدائرة) في المنهج الدراسي للهندسة بالمدارس الثانوية. وتعرض هذه الوحدة اكثر مجاميع النقاط المتحدة دائريا.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيعرف الطلبة وينشئوا دائرة بتسعة نقاط.
2. سيحدد الطلبة مركز دائرة بتسعة نقاط.

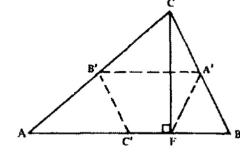
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على دراية كافية بالطرق الأولية للبرهنة على أن نقاطا أربعة متحدة دائريا. على سبيل المثال، يجب أن يكونوا مطلعين على هاتين النظريتين، كحد ادنى:

1. إذا مر ضلع من أضلاع شكل رباعي بزاويتين في الرأسين غير المتجاورين، بعدئذ يعد الشكل الرباعي دائرياً (قد يكون محاطا بدائرة).
2. إذا كان زوج الزاويتين المتقابلتين متكاملتين، بعدئذ يعد الشكل الرباعي دائرياً.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

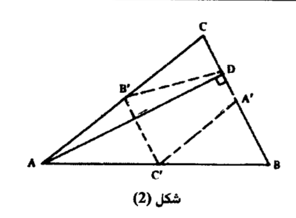
اعرض للطلبة المثلث ΔABC، ونقاط منتصف أضلاعه A'، B'، C' (انظر شكل 1). ارسم الارتفاع $\overline{CF}$. ثم اطلب من الطلبة البرهنة على أن:



شكل (1)

الشكل الرباعي $A'B'C'F$ هو شبه منحرف متساوي الساقين. لتحقيق ذلك ينبغي على الطلبة إدراك أن كون $\overline{A'B'}$ قطعة مستقيم تصل بين نقطتي منتصف ضلعين بمثلث، يجعله موازيا للضلع الثالث بالمثلث. وبما أن $\overline{B'C'}$ يصل بين نقطتي منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ فإن $B'C'=\frac{1}{2}(BC)$. بما أن المستقيم المتوسط لوتر المثلث قائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر، $A'F=\frac{1}{2}(BC)$. وعليه سيكون $B'C'=A'F$ ويعد شبه المنحرف $A'B'C'F$ متساوي الساقين.

وليقم الطلبة الآن بالبرهنة على أن شبه المنحرف متساوي الساقين يكون حلقيا على الدوام (باستخدام النظرية 2، أعلاه). ولتجاوز الارتباك اعد رسم المثلث ΔABC بالارتفاع $\overline{AD}$ كما يظهر في الشكل الآتي.

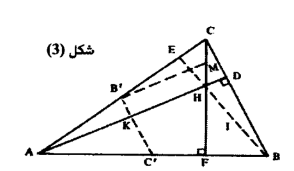


شكل (2)

بنفس الطريقة كما في الارتفاع $\overline{CF}$، ثم ليقم الطلبة بصورة مستقلة في البرهنة على أن النقاط B′، وC′، و A′ وكذلك D متحدة دائريا. يمكن أن ينجز ذلك بالبرهان السابق كدليل يسترشد بخطواته.

ينبغي أن يتهيأ الطلبة الآن لتعميم عبارة حول النقاط B′، وC′، و A′، وكذلك E بالنسبة للارتفاع $\overline{BE}$. إن هذا سيؤدي إلى استنتاج أن كل من النقاط D، و F، و E تقع على الدائرة المنفردة المحددة بالنقاط A′، وB′، وC′.

إذن، يستطيع الطلبة تلخيص بأن قاعدة ارتفاعات المثلث متحدة دائريا مع نقاط منتصفات أضلاعه. وبهذا الأسلوب يكونوا قد انشأوا "دائرة بستة نقاط Six-point Circle". خلال هذا الوقت، ينبغي أن يكون الطلبة قد برهنوا على أن ارتفاعات المثلث تلتقي بنقطة واحدة. تدعى هذه النقطة "المركز التعامد



شكل (3)

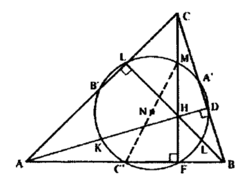
Orthocenter". ليتأمل الطلبة المركز المتعامد H بالمثلث ΔABC، ونقطة منتصف $\overline{CH}$، M.

$\overline{B'M}$ هي قطعة المستقيم التي تصل بين نقطتي منتصف ضلعي الزاوية ∠ ACH. وعليه $\overline{B'M} // AH$. وبنفس الأسلوب، في الزاوية ∠ ABC، لدينا $\overline{B'C'} // \overline{BC}$. بما أن الارتفاع $\overline{AD} \perp \overline{BC}$، $\overline{B'M} \perp \overline{B'C'}$، أو قياس $m\angle MB'C' = 90°$.

تذكر بأن $m\angle AFC = 90°$. وعليه فإن الشكل الرباعي MB′C′F هو شكل دائري، نظرا لأن الزاويتين المتقابلتين متكاملتين. إن هذه الحالة تشابه الدائرة التي أنشئت أعلاه، وبما أن الرؤوس الثلاثة (B′، و C′، و F) مشتركة مع النقاط الستة المتحدة دائريا، وأن النقاط الثلاثة تحدد دائرة فريدة. إذن، فقد تم إنشاء دائرة بتسعة نقاط.

لتعزيز هذا البرهان، ينبغي أن يبرهن الطلبة، الآن، بأن K، L (نقاط منتصف المستقيمين $\overline{AH}$ ، $\overline{BH}$ ، على التوالي) تقع أيضا على هذه الدائرة .

لإنجاز ذلك سيكون الطلبة بحاجة إلى إعادة طريقة العمل السابقة بالنسبة للنقاط K، و C′، و A′، و D وكذلك بالنسبة للنقاط L، و C′، و B′، و E. إن استعراضا مختصرا للبرهان الكلي، حتى هذه النقطة، سوف يظهر "دائرة بتسعة نقاط".



شكل (4)

ليتأمل الطلبة $\overline{MC'}$ في شكل 4. بما أن قطعة المستقيم هذه تقع قبالة الزوايا القائمة في النقطتين B′، و F، ينبغي أن يمر قطر الدائرة خلال B′، و C′، و F، و M. ولتثبيت مركز الدائرة N، اخبر الطلبة، ببساطة، بضرورة إيجاد نقطة منتصف $\overline{MC'}$. وهي نقطة مركز دائرة بتسعة نقاط.

التقييم اللاحق Postassessment

لاستثمار الدرس اسأل الطلبة إنجاز ما يأتي:

1. عرف الدائرة بتسعة نقاط.
2. أنشئ دائرة بتسعة نقاط مستخدما مسطرة عدلة وفرجار.
3. حدد موقع مركز دائرة بتسعة نقاط.

يمكن العثور على علاقات مثيرة للاهتمام تتضمن الدائرة بتسعة نقاط في الوحدة المرافقة، مستقيم أويلر Euler Line. وهناك الكثير من العلاقات المثيرة للاهتمام والتي تتضمن الدائرة بتسعة نقاط يمكنك العثور عليها في:

مرجع Reference

Posamentier, A. S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.



مستقيم أويلر
The Euler Line

ينبغي أن تعرض هذه الوحدة على الطلبة بعد دراستهم للوحدة التي تخص الدائرة بتسعة نقاط. وتستخدم هذه الوحدة بعض المواد التي تم تطويرها في وحدة دائرة بتسعة نقاط ،وتحاول أن تربطها بنقاط أخرى في المثلث.

أهداف الأداء Performance Objectives

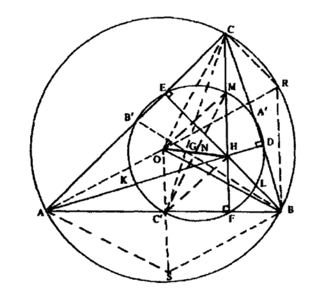
1. سيقوم الطلبة بتحديد موقع مستقيم أويلر بمثلث.
2. سينشئ الطلبة علاقة بين محيط المركز Circumcenter، ومركز التعامد Orthocenter، ومركز الثقل Centroid، ومركز دائرة بتسعة نقاط.

التقييم السابق Preassessment

ليرسم الطلبة مثلثا مختلف الأضلاع، وينشئوا دائرة بتسعة نقاط، بالإضافة إلى الدائرة المحيطة بالمثلث.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لتيسير هذه المناقشة، ينبغي أن يؤشر الطلبة رموز إنشائهم كما في شكل 1 الآتي.



شكل (1)

وينبغي أن يرسم الطلبة الآن $\overline{OH}$، قطعة المستقيم التي تصل مركز التعامد (نقطة تقاطع الارتفاع) ومركز المحيط، (نقطة تقاطع المنصفات العمودية لأضلاع المثلث). وهذا هو مستقيم أويلر. ليقم الطلبة بتحديد مركز الدائرة بتسعة نقاط بإيجاد نقطة منتصف $\overline{MC'}$، (تمت البرهنة على هذه الفقرة في وحدة دائرة بتسعة نقاط). إن إنشاء دقيقا يجب أن يضع هذه النقطة على نقطة منتصف مستقيم أويلر $\overline{OH}$. إن فضول الطالب سوف يطلب برهانا لهذه الحادثة المذهلة:

1. ارسم $\overleftrightarrow{OA}$ بحيث يقطع الدائرة O عند النقطة R.
2. $\overline{AB} \perp \overline{OC'}$ (بما أن O تقع على العمود المنصف لقطعة المستقيم $\overline{AB}$ وأن C' هي نقطة منتصف $\overline{AB}$).
3. $m\angle ABR = 90°$. (زاوية محاطة في نصف دائرة).
4. وعليه فإن $\overline{OC'} // \overline{RB}$ (كلاهما عمودي على $\overline{AB}$).
5. وبنفس الأسلوب، $\overline{RB} // \overline{CF}$، وكذلك $\overline{RC} // \overline{BE}$.
6. $\Delta AOC' \sim \Delta ARB$ (بنسبة تماثل مقدارها $\frac{1}{2}$).
7. وعليه فإن $OC' = \frac{1}{2}(RB)$.
8. الشكل الرباعي RBHC هو متوازي أضلاع (كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين).
9. لذا فإن RB=HC، وكذلك $OC' = (HC)\frac{1}{2} = HM$.
10. الشكل الرباعي OC'HM هو متوازي أضلاع (كل زوج من أضلاعه متطابقين ومتوازيين).
11. وعليه بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف أحدهما الآخر، N، (نقطة منتصف $\overline{MC'}$)، هي نقطة منتصف $\overline{OH}$.

بعد أن أتممنا البرهنة على أن مركز دائرة بتسعة نقاط ينصف مستقيم أويلر. نستطيع عند هذه النقطة أن نبرهن بسهولة على أن نصف قطر الدائرة بتسعة نقاط يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة المحيطة.

بما أن $\overline{MN}$ هي قطعة المستقيم التي تصل نقطتي منتصف ضلعي المثلث ΔCOH، وهي نصف طول الضلع الثالث $\overline{OC}$. إذن. فإن نصف قطر الدائرة بتسعة نقاط، $\overline{MN}$، يساوي نصف طول نصف قطر الدائرة المحيطة، $\overline{OC}$.

في عام 1765م. برهن ليونارد أويلر Leonard Euler بأن مركز ثقل المثلث (نقطة تقاطع المستقيمات المتوسطة) يقسم قطعة المستقيم التي تصل مركز التعامد ومركز المحيط (مستقيم أويلر) إلى ثلاثة أقسام متساوية. بما أن $\overline{OC'} // \overline{CH}$، $\Delta OGC' \sim \Delta HGC$.

كنا قد برهنا في مرحلة سابقة على أن $OC' = \frac{1}{2}(HC)$

وعليه فإن $OG = \frac{1}{2}(GH)$ أو $OG = \frac{1}{3}(OH)$

إن الشيء الوحيد الذي تبقى علينا هو بيان أن G هي مركز ثقل المثلث. بما أن $\overline{CC'}$ هو مستقيم متوسط وأن $GC' = \frac{1}{2}(GC)$.

ينبغي أن تكون G مركز الثقل لأنها تقسم بصورة دقيقة المستقيم المتوسط إلى ثلاثة أقسام متساوية. إذن G تقسم المستقيم $\overline{OH}$ إلى ثلاثة أقسام متساوية. اسأل الطلبة لماذا يقسم المستقيم المتوسط $\overline{BB'}$ المستقيم $\overline{OH}$ إلى ثلاثة أقسام متساوية (لأنه يحتوي G، مركز الثقل).

عند هذه النقطة نكون قد قمنا بتقسيم مستقيم أويلر إلى قسمين متساويين. أو ثلاثة أقسام متساوية مع نقاط مثلث. قبل إنهاء مناقشة مستقيم أويلر، ينبغي تأمل تطبيق ممتع للمتجه Vector. استعرض مفهوم المتجه ومتوازي أضلاع القوى. ينبغي أن نعرض بأن $\overrightarrow{OH}$ هي محصلة كل من $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، $\overrightarrow{OC}$. لقد نشرت هذه المعلومات للمرة الأولى بواسطة جيمس جوزيف سيلفيستر James Joseph Sylvester (1814-1897).

تأمل النقطة S على $\overline{OC'}$

حيث $OC' = SC'$

بما أن $\overline{OC'S}$ هو العمود المنصف للمستقيم $\overline{AB}$، فإن الشكل الرباعي AOBS هو متوازي أضلاع (معين).

وعليه فإن، $\overrightarrow{OC'} = 1/2\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ أو $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

وبما أن $\Delta OGC' \sim \Delta HGC$، $CH = 2(OC')$.

إذن $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

بما أن $\overrightarrow{HO}$ هي محصلة $\overrightarrow{CH}$، $\overrightarrow{OC}$.

$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OH}$

وعليه فإن $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{HO}$ (بالتعويض).

التقييم اللاحق Postassessment

عند استكمال هذا الدرس اسأل الطلبة:

1. إنشاء مستقيم أويلر لمثلث معلوم مختلف الأضلاع، وكذلك.
2. بين العلاقة التي توجد بين مركز المحيط، ومركز التعامد، ومركز الثقل، ومركز الدائرة بتسعة نقاط لمثلث معلوم مختلف الأضلاع.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.



مستقيم سيمسون
The Simson Line

إن إحدى اكثر مجاميع النقاط التي تقع على استقامة واحدة هي تلك التي تعرف بـ "مستقيم سيمسون Simson Line". ورغم أن هذا المستقيم قد اكتشفه وليم والاس William Wallace عام 1797، فإن الاقتباس غير الدقيق، في هذه الأوقات، يعزيه إلى روبرت سيمسون Robert Simson، (1687-1768). سنعرض في هذه الوحدة: ونبرهن، ثم نطبق نظرية سيمسون Simon Theorem.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سينشئ الطلبة مستقيم سيمسون.
2. سيبرهن الطلبة بأن النقاط الثلاثة التي تحدد مستقيم سيمسون هي، بالواقع، تقع على استقامة واحدة.
3. سيطبق الطلبة خصائص مستقيم سيمسون على مسائل محددة.

التقييم السابق Preassessment

عندما تعرض هذه الوحدة على الطلبة، سيكونون قد أدركوا جزءا لا بأس به من مساق الهندسة بالمدارس الثانوية، وقد أتموا دراسة قياس الزاوية بواسطة الدائرة.

يجب أن يستعرض الطلبة، أيضا، الأشكال الرباعية الدائرية (الأشكال الرباعية التي تحاط بدائرة) قبل البدء بهذه الوحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم كل طالب بإنشاء مثلث محاط بدائرة. بعدئذ، من أي نقطة مناسبة على الدائرة (شريطة أن لا تكون على رأس المثلث)، لينشئ الطلبة قطعة مستقيم عمودية على كل من الأضلاع الثلاثة بالمثلث. والآن، اسأل طلبة الصف عن ماهية العلاقة التي تصح بخصوص قاعدة الأعمدة الثلاثة. إذا تم إعداد الإنشاء بصورة دقيقة. سيلاحظ كل واحد منهم بأن هذه النقاط الثلاثة تحدد "مستقيم سيمسون".

إن السؤال الأكيد الذي سيبزغ على الفور هو "لماذا تقع هذه النقطة الثلاثة على استقامة واحدة؟". وهي النقطة التي سيبدأ عندها برهانك. "نظرية سيمسون Simson Theory: إن قواعد الأعمدة المقامة من أية نقطة على الدائرة المحيطة بمثلث معلوم إلى أضلاع ذلك المثلث تقع على استقامة واحدة".

المعطى: المثلث ΔABC تحيط به الدائرة O.

تقع P على الدائرة O.

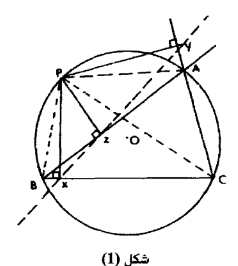
$\overleftrightarrow{PY} \perp \overleftrightarrow{AC}$ عند النقطة Y، $\overleftrightarrow{PZ} \perp \overleftrightarrow{AB}$ عند النقطة Z،

$\overleftrightarrow{PX} \perp \overleftrightarrow{BC}$ عند النقطة X.

برهن: أن النقاط X، و Y، و Z تقع على استقامة واحدة.

البرهان Proof:

1. زاوية $\angle PYA$ تكمل الزاوية $\angle PZA$ (كلاهما زاوية قائمة).
2. الشكل الرباعي PZAY هو شكل دائري (الزوايا المتقابلة متكاملة).
3. ارسم $\overline{PA}$ ، $\overline{PB}$ ، $\overline{PC}$.
4. $m\angle PYZ = m\angle PAZ$ (كلاهما محاط بنفس القوس).
5. زاوية $\angle PYC$ تكمل الزاوية $\angle PXC$ (كلاهما زاوية قائمة).
6. الشكل الرباعي PXCY هو شكل دائري (الزوايا المتقابلة متكاملة).
7. $m\angle PYX = m\angle PCB$ (كلاهما محاط بنفس القوس).
8. $m\angle PAZ\ (m\angle PAB) = m\angle PCB$ (يحيط بها جميعا نفس قوس الدائرة O).
9. $m\angle PYZ = m\angle PYX$ (الانتقالية مع الخطوات 4،7، 8).
10. بما أن كل من الزاويتين $\angle PYZ$، و $\angle PYX$ تشتركان بنفس الشعاع $\overrightarrow{YR}$، ويمتلكان نفس القياس، فإن شعاعيهما المتبقيان ينبغي أن يتطابقان. وعليه، فإن النقاط X، و Y، و Z تقع على استقامة واحدة



شكل (1)

اعرض بعناية على الطلبة هذه التقانة التي توظف للبرهنة على وقوع النقاط على استقامة واحدة. وبالرغم من كونها أسلوبا غير مألوف. لحد ما، ولكن ينبغي أن تبرهن على كونها ذات أهمية ملموسة للطلبة في العمل القادم.

لتعزيز اثر مستقيم سيمسون، اعرض للطلبة برهانا حول نقيض النظرية السابقة.

المعطى. المثلث ΔABC محاط بالدائرة O.

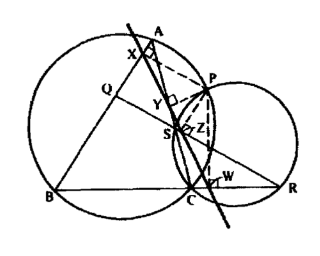
النقاط X،و Y،و Z تقع على استقامة واحدة.

$\overleftrightarrow{PY} \perp \overleftrightarrow{AC}$ عند النقطة Y، $\overleftrightarrow{PZ} \perp \overleftrightarrow{AB}$ عند النقطة Z، $\overleftrightarrow{PX} \perp \overleftrightarrow{BC}$ عند النقطة X.

برهن: أن النقطة P هي مركز محيط المثلث ΔABC.

البرهان Proof:

1. ارسم PA، PB، PC (انظر شكل 1).
2. $m\angle PZB = 90° = m\angle PXB$.
3. الشكل الرباعي PZXB هو شكل دائري ($\overline{PB}$ يمد زاويتين متطابقتين في نفس نصف المستوى).
4. الزاوية $\angle PBX$ تكمل الزاوية $\angle PZX$ (زوايا متقابلة في شكل رباعي – دائري).
5. الزاوية $\angle PZX$ هي زاوية مكملة للزاوية $\angle PZY$ (النقاط X، Y، Z تقع على استقامة واحدة).
6. وعليه فإن $m\angle PBX = m\angle PZY$ (كلاهما زاوية مكملة للزاوية $\angle PZX$).
7. الشكل الرباعي PZAY هو شكل دائري (الزوايا المتقابلة، $\angle PYA$ و $\angle PZA$ هما زاويتان متكاملتان).
8. $m\angle PZY = m\angle PAY$ (كلاهما محاطتان بنفس القوس للزاوية المحيطة بالشكل الرباعي PZAY).
9. وعليه فإن $m\angle PBX = m\angle PAY$ (انتقالية النقطتين، 6 و 8).
10. إذن $m\angle PBC$ هي زاوية مكملة للزاوية $\angle PAC$ (نظرا لأن $\overleftrightarrow{YAC}$ هو خط مستقيم).
11. الشكل الرباعي PACB هو شكل دائري (الزوايا المتقابلة متكاملة)، وعليه فإن نقطة P تقع على الزاوية المحيطة بالمثلث ΔABC.



شكل (2)

ينبغي أن يكون الطلبة جاهزين الآن لتطبيق مستقيم سيمسون على مسألة هندسية.

"الأضلاع $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{BC}$، $\overleftrightarrow{CA}$ بالمثلث ΔABC قد قطعت بواسطة الخط المستعرض عند النقاط Q،و R،و S على التوالي. وتتقاطع الدائرتان المحيطتان بالمثلثين ΔABC، ΔSCR عند النقطة P. برهن بأن الشكل الرباعي APSQ هو شكل دائري".

ارسم الأعمدة $\overline{PX}$، $\overline{PY}$، $\overline{PZ}$، $\overline{PW}$ عمودية على كل من $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$، $\overleftrightarrow{QR}$، $\overleftrightarrow{BC}$، على التوالي، كما في شكل 2. وبما أن النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث ΔABC، فإن النقاط X،و Y، و W تقع على استقامة واحدة (نظرية سيمسون). وبنفس الأسلوب، بما أن النقطة P تقع على الدائرة المحيطة بالمثلث ΔSCR، فإن النقاط Y، و Z، و W تقع على استقامة واحدة. بعدئذ سيتبع ذلك بأن النقاط X، و Y، و Z تقع على استقامة واحدة. إذن، يجب أن تقع P على الدائرة المحيطة بالمثلث ΔAQS (نقيض نظرية سيمسون)، أو أن الشكل الرباعي APSQ هو شكل دائري.

التقييم اللاحق Postassessment

ليكمل الطلبة التمارين الآتية:

1. أنشئ مستقيم سيمسون بمثلث محدد.
2. كم عدد مستقيمات سيمسون التي يمكن للمثلث أن يحتويها؟.

3 برهن نظرية سيمسون.

4 رسمت ثلاثة أوتار من النقطة P التي تقع على الدائرة المحيطة O، فالتقت مع الدائرة بالنقاط A، وB، وC. برهن أن نقاط التقاطع الثلاثة للدوائر مع $\overline{PA}$، $\overline{PB}$، $\overline{PC}$ كأقطار، تقع على استقامة واحدة.

مراجع References

Posamentier, A-S., Advanced Euclidean Geometry Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

Posamentier, A-S., and C. T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, New York: Dover, 1996.

64 مسألة الفراشة

The Butterfly Problem

إن من أكثر العلاقات الهندسية التي تثير الاهتمام هي تلك التي تتضمن شكلا يشبه فراشة. وسيفهم معظم الطلبة المسألة بسهولة ويسود لديهم اعتقاد بسهولة البرهنة عليها . ولكن هذا الأمر حيث تبدأ المسألة بتكوين اهتمام إضافي، نظرا لأن البرهان يمتاز بكونه محيرا لحد ما. ستقترح هذه الوحدة جملة طرق لعرض المسألة على طلبتك، وتوفر مجموعة مختلفة من البراهين لهذه النظرية المحتفى بها.

أهداف الأداء Performance Objectives

1 سيبين الطلبة مسألة الفراشة.

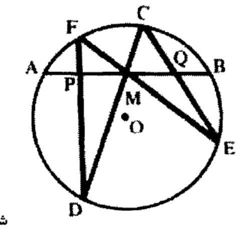
2. سيبرهن الطلبة على صحة مسألة الفراشة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا جل المساق الدراسي لمادة الهندسة (وبخصوص دراسة الدوائر والتشابه).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استخدم جهاز الاستنساخ لتهيئة صحيفة من الورق لكل طالب مع دائرة كبيرة تحتوي على وتر، $\overline{AB}$ (وليس القطر)، ونقطة منتصفه، M، مؤشرا بصورة واضحة. اسأل الطلبة رسم أي وترين، $\overline{EF}$، $\overline{CD}$ يحتويان النقطة M. والآن ليقوموا برسم الوترين $\overline{CE}$، $\overline{FD}$ واللذين يقطعان $\overline{AB}$ عند النقطتين P، وQ على التوالي. ينبغي أن تشابه رسومهم الشكل الآتي.



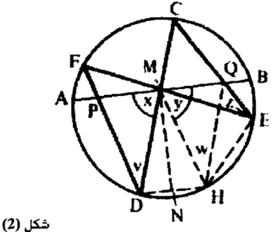
شكل (1)

اسأل طلبة صفك قياس أية قطعة مستقيم، والتي تبدو متطابقة في أشكالهم، وإعداد قائمة بالأزواج. ينبغي أن تجد بأن معظم الطلبة قد ضمنوا في قائمتهم قطع المستقيمات $\overline{AP} \cong \overline{BQ}$ وكذلك $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$.

ذكر الطلبة بأنهم قد ابتدأوا جميعا أشكالهم بقطع مستقيم مختلفة $\overline{CE}$ و $\overline{FD}$، وأنه بالرغم من كون أشكالهم تشابه فراشة تستقر في دائرة، فإن فنونهم قد تختلف اختلافا ملموسا عن بقية زملائهم بالصف.

إن هذا الأمر سوف يمسرح اكثر النتائج إدهاشا لهذه الحالة، وهي أن "كل واحد منهم" لديه $\overline{MP} \cong \overline{MQ}$!.

وسيرغب الطلبة الآن بأن يبرهنوا هذه النتيجة الاستثنائية. باتجاه هذه النهاية ستعرض هنا جملة من براهين هذه النظرية المحتفى بها.



شكل (2)

برهان Proof I:

بوجود النقطة M، نقطة منتصف $\overline{AB}$ والوترين المرسومين $\overline{CMD}$. $\overline{FME}$، نبدأ برسم $\overline{DH}//\overline{AB}$ ، $\overline{MN}\perp\overline{DH}$، وقطع المستقيمات $\overline{MH}$ ، $\overline{QH}$ ، $\overline{EH}$.

بما أن $\overline{MN}\perp\overline{DH}$ ، وأن $\overline{DH}//\overline{AB}$ ، $\overline{MN}\perp\overline{AB}$.

العمود المنصف $\overline{MN}$ للمستقيم $\overline{AB}$ ، ينبغي أن يمر خلال مركز الدائرة. وعليه فإن $\overline{MN}$ هو العمود المنصف للمستقيم $\overline{DH}$. ونظرا لكون المستقيم المار بمركز الدائرة وعمودي على وترها . ينصف المستقيم.

إذن MD=MH وأن $\Delta MND \cong \Delta MNH$ ، (.H.L).

$m\angle DMN = m\angle HMN$؛ لذا $m\angle x = m\angle y$ (الزاويتان المتممتان للزاويتان المتطابقتان). بما أن $\overline{AB}//\overline{DH}$ ، $m\widehat{AD} = m\widehat{BH}$ ، $m\angle x=\frac{1}{2}(m\widehat{AD}+m\widehat{CB})$ (زاوية نشأت عن وترين). $m\angle x=\frac{1}{2}(m\widehat{BH}+m\widehat{CB})$ (بالتعويض). لذا فإن $m\angle y=\frac{1}{2}(m\widehat{BH}+m\widehat{CB})$. ولكن $m\angle CEH=\frac{1}{2}(m\widehat{CAH})$ (زاوية محاطة). إذن، $m\angle y+m\angle CEH = \frac{1}{2}(m\widehat{BH}+m\widehat{CB}+m\widehat{CAH})$. وبما أن

$m\widehat{BH}+m\widehat{CB}+m\widehat{CAH}=360^\circ$، $m\angle y+m\angle CEH=180$

بعدئذ سينتج عن ذلك بأن الشكل الرباعي MQEH قابل للإحاطة Inscrutable، أي أن الدائرة يمكن أن تحيط به. تخيل رسم هذه الدائرة، وأن الزاويتان $\angle w$ ، $\angle z$ تقاسان بنفس القوس $\widehat{MQ}$ ، (زاوية مماسة)، وبذلك سيكون $M\angle w = m\angle z$.

والآن تأمل دائرتنا الأصلية $m\angle v = m\angle z$، بما أن الزاويتان تقاس بنفس القوس، $\widehat{FC}$ (زاوية مماسة). وعليه، بواسطة الانتقالية. $m\angle v = m\angle w$، وأن:

$\Delta MPD \cong \Delta MQH$ (A.S.A). إذن، $Mp = MQ$.

شكل (3)

البرهان Proof II:

مد $\overline{EF}$ عبر F.

ارسم $\overline{KPL}//\overline{LE}$.

$m\angle PLC = m\angle ECL$ (زاويتان داخليتان متناظرتان).

وعليه فإن، $\Delta PML \sim \Delta QMC$ (.A.A) وأن $\frac{PL}{CQ}=\frac{MP}{MQ}$.

$m\angle K = m\angle E$ (زاويتان داخليتان متناظرتان).

وعليه فإن، $\Delta KPM \sim \Delta EMQ$ (.A.A) وأن $\frac{KP}{QE}=\frac{MP}{MQ}$

بواسطة الضرب

$$\frac{(PL)(KP)}{(CQ)(QE)}=\frac{(MP)^2}{(MQ)^2} \qquad \text{(I)}$$

بما أن $m\angle D = m\angle E$ (زاوية مماسة)، وان $m\angle K = m\angle E$ زاويتان داخليتان متناظرتان)، $m\angle D = m\angle K$. كذلك، $m\angle KPF = m\angle DPL$ (زاويتان قائمتان). وعليه يكون $\Delta KFP \sim \Delta DLP$ (.A.A) وان $\frac{PL}{DP}=\frac{FP}{KP}$ ، وسيكون:

$$(PL)(KP)=(DP)(FP) \qquad \text{(II)}$$

في معادلة (I) $\frac{(MP)^2}{(MQ)^2}=\frac{(PL)(KP)}{(CQ)(QE)}$

عوضنا بمعادلة (II) للحصول على

$$\frac{(MP)^2}{(MQ)^2}=\frac{(DP)(FP)}{(CQ)(QE)}$$

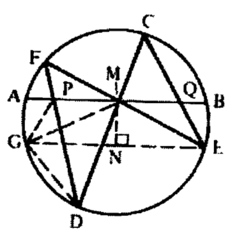
بما أن $(DP)(FP) = (AP)(PB)$ وكذلك :

$(CQ).(QE) = (BQ).(QA)$ (حاصل ضرب أطوال قطع الأوتار المتقاطعة)، $\frac{(MP)^2}{(MQ)^2}=\frac{(AP)(PB)}{(BQ)(QA)}$

$$= \frac{(MA - MP)(MA + MP)}{(MB - MQ)(MB + MQ)} = \frac{(MA)^2 - (MP)^2}{(MB)^2 - (MQ)^2}$$

بعدئذ، $(MP)^2(MB)^2 = (MQ)^2(MA)^2$.

ولكن $MB = MA$، وعليه سيكون $(MP)^2 = (MQ)^2$ أو $MP = MQ$.



شكل (4)

البرهان Proof III

ارسم مستقيما يمر بالنقطة E موازيا $\overline{AB}$ ويلتقي الدائرة عند النقطة G. وارسم $\overline{MN} \perp \overline{GE}$. بعدئذ ارسم $\overline{PG}$ ، $\overline{MG}$ ، $\overline{DG}$. $m\angle GDP(\angle GDF) = m\angle GEF$ (زاوية مماسة) (I)،

$m\angle PMG = m\angle MGE$ (زاويتان متناظرتان داخليتان) (II)

وبما أن العمود المنصف للمستقيم $\overline{AB}$ هو العمود المنصف للمستقيم $\overline{GE}$ أيضا، بعدئذ $GM = ME$ وان :

$m\angle GEF = m\angle MGE$ (زاويتي القاعدة) ... (III)

ومن المعادلات (I)، (II)، (III) نحصل على،

$m\angle GDP = m\angle PMG$ ... (IV)

وعليه فإن النقاط G, D, M, P متحدة دائريا (يكون الشكل الرباعي حلقيا إذا مد أحد أضلاعه زاويتان متطابقتان عند رأسين من رؤوسه المتقابلة). وعليه

$m\angle PGM = m\angle PDM$ (زاويتان مماستان في دائرة جديدة) ... (V).

ولكن، $m\angle CEF = m\angle PDM(\angle FDM)$ (زاويا مماسة) ... (VI) ومن المعادلتين (V) و (VI)،

$m\angle PGM = m\angle QEM(CEF)$. ومن المعادلة (II) نعلم بأن $m\angle PMG = m\angle MGE$ إذن،

$m\angle QME = m\angle MEG$ (زاويتان متقابلتان داخليتان) وان $m\angle MGE = m\angle MEG$ (زاويتي قاعدة).

وعليه فإن $m\angle PMG = m\angle QME$ وأن $\Delta QME \cong \Delta PMG$. (A.S.A) سينجم عن ذلك أن $PM = QM$.

بالرغم من أن براهين مسألة الفراشة ليست من النوع التي يستطيع الطالب المتوسط أن يكتشفها بمفرده، فإنها ستزوده بخبرة غنية للتعلم في بيئة إعداد محفزاتها.

التقييم اللاحق Postassessment

اسأل الطلبة :

1. بيان مسألة الفراشة.
2. تبرير سبب صدق مسألة الفراشة.

(يجب على الطلبة إما أن يعرضوا أحد البراهين السابقة، أو برهانا يختص بهم).

يمكن العثور على حلول إضافية في :

Posamentier, A.S., and C.T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, New York: Dover, 1996.



دوائر متساوية

Equicircles

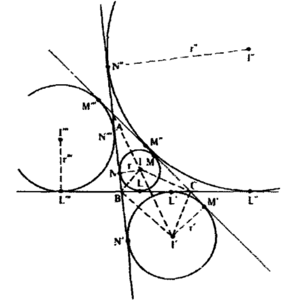
الدوائر المتساوية اصطلاح استخدم للإشارة إلى كل من الزوايا الماسة Inscribed والدائرة المحاطة من الخارج Escribed لمثلث. ستسهم هذه الوحدة في تطوير عدد من العلاقات الآسرة بين هذه الدوائر.

هدف الأداء Performance Objective

1 سيعرّف الطلبة الدوائر المتساوية.

2 سيبين الطلبة أربعة خواص، على الأقل، والتي تتصف بها الدوائر المتساوية.

3 سيبين الطلبة ويبرهنوا إحدى خواص الدوائر المتساوية.



التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا موضوع الدوائر في المساق الدراسي للهندسة بالمدارس الثانوية.

اعرض الشكل الآتي على طلبتك واطلب منهم إيجاد طول $\overline{AN'}$ ، إذا كان محيط المثلث ΔABC يساوي 16. (النقاط L', N', M' هي نقاط التماس).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بالرغم من أن المسألة المعروضة أعلاه تتسم ببساطة شديدة، فإن مباشرة العمل عليها غالبا ما يكون غير مألوف ويورث الطلبة بعض المشاكل. إن النظرية الوحيدة التي يفتقرون إلى تذكرها هي تلك التي تنص على أن قطعتي مماس الدائرة المرسومة من نقطة خارجية تكون متطابقة. وبتطبيق هذه النظرية على المسألة أعلاه، نحصل على:

$CM' = CL'$ وكذلك $BN' = BL'$

محيط المثلث ΔABC:

$= AC + BC + AB = AC + (BL'+CL') + AB$

والتي بالتعويض ينتج عنها:

$AB + BN' + Cm' + AC$

أو

$AN' + AM'$

ولكن $AN' = AM'$ (وهما أيضاً مماسان من نفس النقطة الخارجية لنفس الدائرة). وعليه فإن

8 = (نصف محيط) $AN' = \frac{1}{2}$. باختصار هذه الحقيقة الآسرة، فإن الطلبة سوف يحفزون نحو متابعة المزيد من العلاقات القائمة في هذا الشكل. بعد ذلك، دع

s = نصف محيط المثلث ΔABC

$AB = c$ ،$AC = b$ ،$BC = a$.

بالاعتماد على إرشادك وتوجيهك المستمر، سيكون الطلبة قادرين على إنشاء العلاقات الآتية:

$$BN' = BL' = AN' - AB = s - c$$

$$CM' = CL' = AM' - AC = s - b$$

عند هذه النقطة ينبغي عليك أن تبين للطلبة بأن هذه هي بعض القطع التي سوف توصف بدلالة أطوال أضلاع المثلث ABC. وهنا يجب أن تعرف علاقة الدائرتين بالمثلث. سوف يدرك الطلبة بأن الدائرة I بوصفها دائرة مماسة للمثلث ABC. وغالبا ما يكون الطلبة محدودي الاطلاع على الدائرة I'. هذه الدائرة، والتي تكون مماسة لمستقيمات الأضلاع الثلاثة بالمثلث ABC، وعلى الرغم من ذلك، لا تحتوي على نقاط داخلية بالمثلث، تدعى دائرة محوطة من الخارج.

يحوي مثلث على أربعة دوائر متساوية، أحدهما مماسة من الداخل، والثلاثة (محوطة) مماسة من الخارج. يدعى مركز الدائرة الماسة من الخارج المركز الخارجي Excenter، وهي

نقطة تقاطع منصفات الزوايا الخارجية مع منصف زاوية داخلية. ينبغي أن يكتسب الطلبة المزيد من المعرفة والاطلاع بهذه الدوائر عن طريق وصف قطع أخرى بدلالة أطوال أضلاع المثلث ΔABC مرة ثانية. حاول أن تزود الطلبة بالإرشاد المناسب في ضوء منطلباتهم:

$$\begin{aligned} AN + AM &= (AB-NB) + (AC-MC) \\ &= (AB-LB) + (AC-LC) \\ &= (AB+AC) - (LB+LC) \\ &= c + b - a \end{aligned}$$

تحدى طلبتك حول إمكانية بيان ما يأتي:

$$c + b - a = 2(s-a)$$

وعليه : $AN + AM = 2(s-a)$

ولكن : $AN = AM$، إذن $AN = s-a$

وليحاول طلبتك بيان كيفية وصف CL, BL بدلالة أطوال أضلاع المثلث ABC.

$BN = s-b$

$CL = s-c$

والآن أصبحنا على أهبة الاستعداد لتطبيق بعض هذه الصياغات لإنشاء علاقتين تثيران الاهتمام، وهما:

$BL = CL'$ ،$LL' = b-c$، الفرق بين طولي الضلعين الآخرين بالمثلث ΔABC.

وبما أن كلا من BL ،CL' قد عرضا بأنهما مساويان لـ $s-b$ ،$BL = CL'$.

تأمل LL' والذي يساوي $BC-BL-CL'$.

بالتعويض $LL' = a - 2(s-b) = b-c$.

ونستطيع الآن البرهنة، بسهولة، بأن طول قطعة المماس الخارجي–المشترك لكل من الدائرة المماسة الداخلية و الخارجية لمثلث تساوي طول الضلع الموجود في المستقيم الذي يقطع قطعة المماس.

يستمر البرهان كما يأتي: $NN' = AN'-AN$.

لقد عرضنا مبكرا بأن $AN' = s$ وان $AN = s-a$.

وبالتعويض، $NN' = s - (s-a) = a$

وتصح نفس القضية بالنسبة لـMM'.

إن نظرية مثيرة، أخرى، تنص على أن طول قطعة المماس الخارجي–المشترك بين دائرتين مماستين من الخارج لمثلث تساوي مجموع طول الضلعين اللذان يتقاطعان مع هذا المماس.

لبرهنة هذه النظرية، ادع الطلبة إلى استذكار العلاقة: $BL'' = s$ وكذلك $CL''' = s$. لقد برهن على ذلك عندما تم حل مسألة التقييم السابق وعليه، فإن:

$$\begin{aligned} L'''L'' &= BL'' + CL''' - BC \\ &= s + s - a \\ &= b + c \end{aligned}$$

ونستطيع، أيضاً، عرض أن طول كل من قطع المماس الداخلي–المشترك بين دائرتين مماستين من الخارج لمثلث تساوي طول الضلع المقابل للرأس الذي ينشأ عنهما. إن هذا البرهان بسيط لحد كبير:

$$L'L'' = BL'' - BL' = BL'' - BN' = s - (s-c) = c$$

شجع الطلبة على التنقيب في الشكل السابق للعثور على علاقات اخرى. ان اخذ نصف قطر الدوائر المتساوية بعين الاعتبار سوف ينتج عنه مجموعة من النتائج الممتعة. يطلق على أنصاف الأقطار هذه "أنصاف الأقطار المتساوية Equiradii".

وتنص النظرية على أن نصف قطر الدائرة المماسة من الداخل لمثلث يساوي نسبة المساحة إلى نصف المحيط. أي:

$$\mathcal{A}\,\Delta ABC = \mathcal{A}\,\Delta BCI + \mathcal{A}\,\Delta CAI + \mathcal{A}\,\Delta ABI$$

(لاحظ أن $\mathcal{A}$ تقرأ مساحة الـ)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\,\Delta ABC &= \frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c)=sr \end{aligned}$$

وعليه فإن : $r = \dfrac{\mathcal{A}\,\Delta ABC}{s}$

إن الامتداد الطبيعي لهذه النظرية ينص على أن نصف قطر الزاوية المماسة–الخارجية لمثلث تساوي نسبة المساحة إلى الفرق بين نصف المحيط وطول الضلع الذي تكون الدائرة مماسة له.

للبرهنة على ذلك، ليتأمل الطلبة ما يأتي:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\,\Delta ABC &= \mathcal{A}\,\Delta ABC' + \mathcal{A}\,\Delta ABI' - \mathcal{A}\,\Delta BCI' \\ &= \frac{1}{2}r'c+\frac{1}{2}r'b+\frac{1}{2}r'a \\ &= \frac{1}{2}r'(c+b-a)=r'(s-a) \end{aligned}$$

وعليه فإن : $r = \dfrac{\mathcal{A}\,\Delta ABC}{s-a}$

وبنفس الأسلوب، ينبغي على الطريقة عرض أن:

$r'' = \dfrac{\mathcal{A}\,\Delta ABC}{s-b}$ وكذلك $r''' = \dfrac{\mathcal{A}\,\Delta ABC}{s-c}$

لإنهاء هذه الناقشة، كلف الطلبة بإيجاد حاصل ضرب جميع أنصاف الأقطار المتساوية بدائرة. وكل ما سيحتاجون إلى عمله هو ضرب بعض الصيغ الأخيرة:

$$rr'r''r''' = \frac{(\mathcal{A}\,\Delta ABC)^4}{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

ولكن بواسطة صيغة هيرون Heron's formula سيكون لدينا:

$$\mathcal{A}\,\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

وعليه فإن $rr'r''r''' = (\mathcal{A}\,\Delta ABC)^2$

عند هذه النقطة اسأل الطلبة اختصار النظريات والعلاقات التي تم تطويرها في هذا الأنموذج.

التقييم اللاحق Postassessment

لإنهاء هذا الدرس، ادع الطلبة إلى إكمال التمارين الآتية:

1. عرّف الدوائر المتساوية وأنصاف الأقطار المتساوية.
2. بين أربعاً من خصائص الدوائر المتساوية.
3. بين وبرهن خاصية واحدة للدوائر المتساوية.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teaches and Students, Emeryville, CA: key College Publishing, 2002.



الدوائر المماسة الداخلية والمثلث القائم الزاوية
The Inscribed Circle and The Right Triangle

بعد إنهاء وحدة حول الدوائر، ووحدة أخرى منفصلة تعالج المثلثات قائمة الزوايا، سوف يستمتع الطلبة بملاحظة بعض العلاقات التي تؤدي إلى تكامل هذه الوحدات.

وستتعامل هذه الوحدة مع بعض الخصائص المتعة لنصف قطر الدائرة المماسة الداخلية لمثلث قائم الزاوية.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء مثلث قائم الزاوية، وبأطوال أضلاع صحيحة، سيكون الطلبة قادرين على عرض أن القطر الداخلي هو عدد صحيح.
2. سيكون الطالبة قادرين على توضيح كيف أن الارتفاع المرسوم على وتر المثلث القائم الزاوية ذو صلة بنصف القطر الداخلي للمثلثات المتكونة.
3. سيعرف الطلبة وسيكونون قادرين على اشتقاق صيغة تربط بين نصف القطر الداخلي بمساحة، ومحيط المثلث قائم الزاوية.
4. بإعطاء نصف القطر داخلي محدد، سيكون الطلبة قادرين على تحديد عدد المثلثات قائمة الزاوية مع الأضلاع الأولية التي تمتلك نصف القطر الداخلي المعطى.
5. سيكون الطلبة قادرين على إعطاء ثلاثي محتمل واحد لأطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية عند إعطاء قسمة صحيحة–موجبة لنصف القطر الداخلي.

التقييم السابق Preassessment

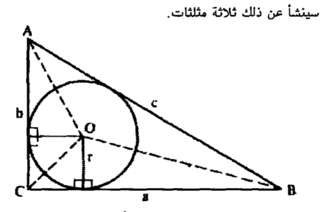
ليحاول الطلبة العمل على المسائل الآتية:

1. جد نصف قطر دائرة مماسة داخليا لمثلث قائم الزاوية، أطوال أضلاعه 3، 4، 5.
2. كرر هذه المسألة بالنسبة لمثلث أطوال أضلاعه 5، 12، 13.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد إكمال المسائل أعلاه، إما بصورة فردية، أو بصورة جماعية مع طلبة الصف، سيريد الطلبة اخذ السؤال الآتي بعين الاعتبار "لديك مثلث قائم الزاوية وبأضلاع صحيحة، فهل سيضمن هذا بأن نصف قطر الدائرة المماسة–الداخلية سيكون عدد صحيحا أيضا؟". لغرض البرهنة أن الجواب إيجابي، تأمل المخطط الآتي. وهنا، r تمثل نصف القطر الداخلي، (يعني، نصف قطر الدائرة المماسة – الداخلية)، وأن المثلث ABC يمتلك زاوية قائمة عند النقطة C، وأن أطوال أضلاع المثلث هي a، b، c. وسيتضمن البرهان إيجاد علاقة بين كل من r، a، b، c.

إذا تم وصل مركز الدائرة بكل من رؤوس المثلث الثلاثة، سينشأ عن ذلك ثلاثة مثلثات.



إن مساحة المثلث الأول تساوي $\frac{1}{2}ra$، ومساحة المثلث الثاني $\frac{1}{2}rb$، ومساحة المثلث الثالث $\frac{1}{2}rc$. إن مساحة المثلث ABC تساوي $\frac{1}{2}ab$. تحدى الطلبة بإعداد علاقة بين r، a، b، c.

وبجمع المساحات سنحصل على $\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc=\frac{1}{2}ab$ والتي تمثل مساحة المثلث ΔABC. إذن $r=\frac{ab}{a+b+c}$. ولكن هذا يبدو فقط لجعل r عدد نسبي للأعداد الصحيحة a, b, c عند هذه النقطة حاول أن تذكر الطلبة (أو اعرض لهم في المرة الأولى) كيف أن القيم الصحيحة a، b، c يمكن الحصول عليها من الصيغة. يعني، وضح لهم الصيغة التي تم توليدها لأضلاع المثلث قائم الزاوية.

$$a=(m^2-n^2)$$
$$b=2mn$$
$$c=(m^2+n^2)$$

حيث $n<m$ وأن m و n تمثل أعدادا أولية صحيحة نسبيا وموجبة، وبتكافؤ مختلف.

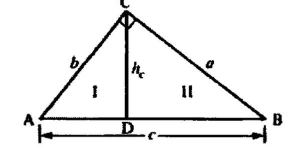
باستخدام $r(a+b+c)=ab$، وتعويض قيم a، b، c. إذن، $r=n(m-n)$ أو $2r(m^2+mn)=2mn(m^2-n^2)$

وبما أن m و n أعداد صحيحة، و $n<m$، وعليه سيكون r عدد صحيح.

إذن، "متى كانت أضلاع المثلث قائم الزاوية صحيحة فإن القطر الداخلي سيكون عددا صحيحا أيضاً".

وكنتيجة لما سبق، يمكن إنشاء صيغة مختصرة تقيم علاقة بين نصف القطر الداخلي، ومساحة، ومحيط المثلث قائم الزاوية. بما أن $r=\frac{ab}{a+b+c}$ وذلك بتعويض p (المحيط) عوضا عن a+b+c. كذلك لاحظ بأن مساحة المثلث $\Delta ABC=\text{ℓ}\frac{ab}{2}$ أو $\text{ℓ}\Delta ABC=ab$ (حيث تمثل ℓ "مساحة الـ") . إذن $r=2(\text{ℓ}\Delta/p$. ولأجل التطبيق والتمرين ليقم الطلبة بإيجاد نفس القطر الداخلي، بعد إعطائهم قيما معلومة كل من ℓ Δ وكذلك p.

لاشك أن الطلبة قد عملوا بعضا من وقتهم على المثلث قائم الزاوية الذي رسم ارتفاعه باتجاه الوتر (انظر الشكل الآتي). والآن ستتوفر لديهم فرصة مناسبة لربط نصف القطر الداخلي بهذا المخطط المألوف.



دع المثلث ΔADC يطلق عليه ΔI وبنصف قطر داخلي r_I. بنفس الأسلوب، المثلث ΔDCB (ΔII) وفيه نصف قطر داخلي r_{II}، والمثلث ΔABC (ΔIII) وفيه نصف القطر الداخلي r_{III}. يمكن أن يعرض بأن مجموع أنصاف الأقطار الداخلية للمثلثات ΔIII, ΔII, ΔI يساوي أيضا الارتفاع من نقطة C، والذي سيطلق عليه h_c. لاحظ بأن $\Delta ADC\sim\Delta DCB\sim\Delta ABC$. وبما أن نصف القطر الداخلي الذي يوافق المثلثات المشابهة يكون بنفس النسبة كأي نقطة في زوج الأضلاع المقابلة، $\frac{r_I}{r_{III}}=\frac{b}{c}$ أو $r_I=\frac{b}{c}r_{III}$ بنفس الأسلوب، $r_{II}=\frac{a}{c}r_{III}$. وعليه فإن $r_I+r_{II}+r_{III}=\frac{a+b+c}{c}r_{III}$. باستدعاء أن $r=\text{ℓ}\Delta III/p$،

$$\frac{a+b+c}{c}r_{III}=\left(\frac{a+b+c}{c}\right)\left(\frac{2\text{ℓ}\Delta III}{p}\right)$$

$$=\left(\frac{2\text{ℓ}\Delta III}{c}\right)$$

ولكن، $\text{ℓ}\Delta III=\frac{1}{2}h_c c$. إذن $2\text{ℓ}\Delta III/c=h_c$ والتي تجعل من $r_I+r_{II}+r_{III}=h_c$ وهو ما طلب البرهنة عليه.

يستطيع المرء أن يستخدم ما ورد أعلاه في البرهنة على أن مساحة الدائرة المماسة من الداخل في ΔI زائدا مساحة الدائرة المماسة من الداخل في ΔII تساوي مساحة الدائرة المماسة من الداخل في ΔIII. يمكن ملاحظة هذا باستدعاء ما تم عرضه سابقا بكون $r_I=\frac{b}{c}r_{III}$ وكذلك $r_{II}=\frac{a}{c_z}r_{III}$. إذن

$$r_I^2+r_{II}^2=\frac{b^2}{c^2}r_{III}^2+\frac{a^2}{c^2}r_{III}^2=\frac{a^2+b^2}{c^2}r_{III}^2=r_{III}^2$$

(نظرا لأن $a^2+b^2=c^2$). وبالضرب بـ π نحصل على $\pi r_I^2+\pi r_{II}^2$ وهي النظرية المطلوب البرهنة عليها.

إن العلاقة المثيرة، الأخرى، التي تخص نصف قطر الداخلي هي: "عدد الثلاثيات الفيثاغورية الأولية هو 2^ℓ، حيث ℓ هو عدد التقسيمات الأولية الفردية لـ r ($O\leq\ell$)، وان r هو طول نصف القطر الداخلي المقابل". إن المعنى التام لهذه النظرية ينبغي أن يكون واضحا للطلبة قبل مباشرة العمل على البرهان. وضح للطلبة بأن لكل عدد طبيعي r يوجد على الأقل مثلث قائم الزاوية بأضلاعه:

$$2r^2+2r+1 \text{ ، } 2r^2+2r, \quad 2r+1$$

حيث تمثل r نصف القطر الداخلي. وينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تفحص بأن هذا الأمر يفي بنظرية فيثاغورث. على سبيل المثال، ليحاول الطلبة قيما مختلفة لـ r. بالنسبة لـ $r=1$، ستكون أضلاع المثلث 3، 4، 5.

وبالعودة للوراء إلى برهنة النظرية أعلاه، لتكن a، b، c أضلاع المثلث قائم الزاوية وبأطوال صحيحة، حيث يكون b عددا زوجيا، بينما a، b، c هي أعداد أولية نسبيا. إن نصف القطر الداخلي لهذا المثلث هو العدد الصحيح الموجب r، استدع العلاقة التي تنص على أن $r = \frac{ab}{a+b+c}$، ويمكن كتابتها أيضاً بصورة $\frac{1}{2}(a+b-c)$ وبملاحظة أن $\frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}$ هي عبارة عن هوية. ينبغي أن يشجع الطلبة على تبرير هذه الهوية متذكرين أن: $a^2+b^2 = c^2$. ومن الصيغة المولدة الأولية، عوض بالنسبة لكل من a، b، c. لكي يحصل الطلبة $r = (m-n)n$. وبما أن كل من m، n أعداد أولية نسبيا، بعدئذ (m-n) وكذلك n سيكونان أعداد أولية نسبيا، كذلك (ملاحظة: (m-n) تمثل عددا فرديا لأن كل من m، n هما عددان أوليان نسبيان وبتكافؤ معاكس). إذن، نصف القطر الداخلي يمكن تحليله إلى حاصل ضرب عددين صحيحين موجبين، والذي يكون كل منهما عددا أوليا نسبيا ويكون العامل (m-n) فرديا. والآن، تأمل r بوصفه أي عدد صحيح موجب، حيث $r = xy$ هو أي تحليل لقيمة r إلى حاصل ضرب أي عددين أوليين نسبيا، موجبين وصحيحين، ويكون أحدهما فرديا. دع $m = x+y$، $n=y$. بعدئذ، يكون كل من m، n أعداد أولية نسبيا. كذلك، بما أن x عدد فردي، إذا كان $n=y$ فرديا، بعدئذ $m = x+y$ سيكون زوجيا. بنفس الأسلوب، إذا كان m فرديا، يجب أن يكون n زوجيا. إذن أحد العددين m، n هو زوجي.

استدع الصيغة $m > n$. بفرض $a = m^2 - n^2$، $b = 2mn$، $c = m^2+n^2$ نستطيع الحصول على نوع المثلث المطلوب وبنصف قطر داخلي $r = (m-n)\,nab$. وعليه، فإن أي تحليل لعدد r إلى حاصل ضرب عددين أوليين نسبيا، بحيث يكون أحدهما فرديا، سوف يحدد نوع المثلث المطلوب وبنصف قطر داخلي r. يمكن عرض بأنه إذا كان $\ell \geq 0$ حيث

$$r = 2p_1^{x1}p_2^{x2}p_3^{x3}\ldots p_\ell^{x\ell}$$

بشرط أن تكون p_i عددا أوليا فرديا (i عدد صحيح موجب)، بعدئذ سيكون عدد التحليلات لـ r مساويا لـ 2^ℓ. إذن 2_ℓ، يجب أن يكون عدد التحليلات، أو r إلى عاملين أوليين نسبيا حيث يكون أحدهما فرديا.

إذن، لكل عدد صحيح موجب r، يوجد بضعة مثلثات محددة قائمة الزاوية، والتي تمتلك أضلاعا أطوالها أعداد صحيحة أولية نسبيا، وبنصف قطر داخلي r، كما توجد تحليلات محددة لـ r إلى حاصل ضرب عاملين أوليين نسبيا يكون أحدهما فرديا. إن أعداد مثل هذه المثلثات هو 2_ℓ. وهذا يكمل البرهان.

إن الطلبة الذين يرغبون بالنظر إلى الموضوع بصورة اكثر عمقا يمكن أن يحاولوا برهنة إذا كانت r عددا صحيحا زوجيا موجبا، فإن عدد المثلثات قائمة الزاوية وبأضلاع أطوالها أعداد صحيحة والتي ليس من الضروري أن تكون أولية نسبيا، وفيها r هو نصف قطر داخلي، يمكن وضعها بالصيغة $(x+1)(2x_1+1)(2x_2+1)\ldots\ldots(2x_\ell+1)$ حيث تمثل x و ℓ الأعداد التي نحصل عليها من تحليل r إلى $2^x p_1^{x1}p_2^{2x}\ldots p_\ell^{x\ell}$، $\ell \geq 0, x \geq 0$ ويكون P_ℓ عددا أوليا فرديا، $2 < p_1 < p_2 < \ldots\ldots < p_\ell$. إن أي عدد صحيح موجب يجب تحليله بنفس الأسلوب.

يمكن أن يباشر الطلبة بحوثاً تخص علاقات مثيرة أخرى حول نصف القطر الداخلي لغرض الكشف عن مزيد من خصائصها. فعلى سبيل المثال، يستطيع الطلبة محاولة برهنة الصيغة (لأي مثلث) التي تخص نصف القطر الداخلي r لأي مثلث Δxyz (الأضلاع x، y، z وان $s = \frac{x+y+z}{2}$) هي $r = \sqrt{\frac{(s-x)(s-y)(s-z)}{5}}$. إن التحريات الأخرى يجب أن تبرهن على قدرتها بتحدي طلبة الصف.

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا كانت أضلاع المثلث قائم الزاوية 5، 12، 13، فهل يضمن هذا أن تكون r عددا صحيحا؟ وإذا كانت كذلك، فأي عدد صحيح ستكون؟ وإذا لم تكن كذلك، وضّح سبب ذلك؟
2. إذا نشأ عن الارتفاع المرسوم إلى وتر مثلث قائم الزاوية ثلاثة مثلثات متشابهة بأنصاف أقطار داخلية 2، 3، 4. جد طول هذا الارتفاع.
3. جد عدد المثلثات قائمة الزاوية المحددة والتي تمتلك أضلاعها أطوالا كأعداد أولية صحيحة نسبيا لديها 70 بوصفه نصف قطرها الداخلي.
4. إذا كان نصف القطر الداخلي يساوي 3، جد أطوال أضلاع المثلث قائم الزاوية مع نصف القطر الداخلي المذكور.
5. تبلغ مساحة المثلث xyz 6، ومحيطه 12. جد طول نصف قطره الداخلي.



المستطيل الذهبي
The Golden Rectangle

سوف يعرض في هذه الوحدة، مفهوم النسبة الذهبية Golden Ratio سوية مع بعض تشعباتها الجبرية والهندسية الأولية.

هدف الأداء Performance Objective

1 سينشئ الطلبة مستطيلا ذهبياً.
2 سيبين الطلبة النسبة الذهبية.
3 سيعرض الطلبة خصائصا محددة للمستطيل الذهبي والنسبة الذهبية.

التقييم السابق Preassessment

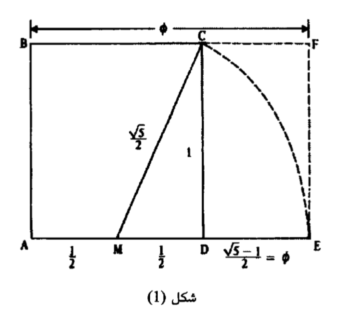
إن بعض المعرفة الهندسية والجبر المتوسط تبدو ضرورية لحد ما في هذه الوحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم طلبتك برسم مستطيل ذهبي مستخدمين الإنشاء الآتي. لديك المربع ABCD، طول كل ضلع من أضلاعه وحدة واحدة، حدد نقطة المنتصف، M، للضلع $\overline{AD}$. ارسم $\overline{MC}$. بواسطة نظرية فيثاغورث، $MC=\frac{\sqrt{5}}{2}$. وبتثبيت مركز الفرجار على النقطة M ونصف القطر $\overline{MC}$ ، ليرسم الطلبة قوسا يقطع $\overrightarrow{AD}$ عند E. بعدئذ،

$$DE = ME - MD = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5-1}}{2} \quad (1)$$

من هذه النتيجة، سيكون لدينا AE=AD+DE، $1.61803 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ أو $= 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



شكل (1)

أقم عمود عند E ليلتقي $\overrightarrow{BX}$ في النقطة F، وأنشئ المستطيل ABFE، حيث تكون نسبة الطول إلى العرض هي:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5+1}/2}{1} = \frac{\sqrt{5+1}}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

تدعى النسبة (2) النسبة الذهبية أو القسم الذهبي Golden Section، ويرمز لها بالحرف اليوناني فاي (ϕ)، وان المستطيل الذي يمتلك هذه النسبة بين الطول إلى العرض يدعى المستطيل الذهبي Golden Rectangle.

لاحظ بأن قيمة (2)، $\phi = 1.61803...$، هو عبارة عن عدد غير قياسي (غير نسبي) أصم ويساوي تقريبا $\frac{8}{5}$. إن مستطيلا بمثل هذه النسبة من الطول إلى العرض قد فكر بها اليونان القدماء، وأثبتها عمليا عالم النفس فيخنر Fechner عام 1876، ليكون اكثر مستطيل ممتع، وبتناسق متزن بالنسبة للعين.

ليقم الطلبة بحل المعادلة $x^2-x-1 = 0$، والتي كانت حلولها:

$$r_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \ldots\ldots(3) \quad \text{وكذلك} \quad r_2 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$$

من (2). $r_1 = \phi$، وعندما تحتسب r_2 تكون مساوية إلى -0.61803. إن علاقة بين ϕ و r_2، سوف تصبح واضحة للعيان إذا بدأنا أولا بتقدير معكوس ϕ، يعني احتساب $\frac{1}{\phi}$ من (2).

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803...$$

إن الكسر $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ يرمز له بالرمز ϕ'، إذن، من المعادلة (3)، $r_2 = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$ هو المعكوس الجمعي لـ ϕ' ويرمز له بالرمز $-\phi'$. باختصار. يلي ذلك:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803... \qquad (4)$$

$$-\phi = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} = -1.61803... \qquad (5)$$

$$\frac{1}{\phi} = \phi^1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.61803... \qquad (6)$$

$$-\phi' = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} = -0.61803... \qquad (7)$$

وعند العبور ، ينبغي أن يبقى حاضرا في الذهن بأن نسبة العرض إلى الطول بالمستطيل الذهبي هي ϕ'، في حين أن نسبة الطول إلى العرض هي ϕ. إذن، في شكل (1)، $\frac{DE}{DC} = \phi'$، بحيث أن CDEF يكون مستطيلا ذهبيا.

إن علاقات فريدة لحد ما، يمكن اشتقاقها من (4)–(7). على سبيل المثال، باستخدام (4) و (6).

$$\phi . \phi' = 1.0 \qquad (8)$$

$$\phi - \phi' = 1.0 \qquad (9)$$

إن ϕ و ϕ' هما العددان الوحيدان في الرياضيات اللذان يتميزان بكون حاصل ضربهما والفرق بينهما يساوي 1 !.

$$\phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{5+2\sqrt{5}+1}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad (10)$$

ولكن:

$$\phi + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad (11)$$

إذن، من المعادلتين (10) و (11)،

$$\phi^2 = \phi + 1 \qquad (12)$$

يضاف إلى ذلك باستخدام (6) و (12)

$$(\phi')^2 + \phi = \frac{1}{\phi^2} + \phi = \frac{1}{\phi+1} + \phi = \frac{1+\phi^2+\phi}{\phi+1} = \frac{\phi^2+\phi-1}{\phi^2} = \frac{2\phi^2}{\phi^2} = 2 \qquad (13)$$

مرة ثانية، باستخدام (6)، (12)،

$$\phi^2 - \phi^1 = \phi + 1 - \frac{1}{\phi} = \frac{\phi^2+\phi-1}{\phi} = \frac{\phi+1+\phi-1}{\phi} = 2 \qquad (14)$$

لهذا السبب، من المعادلتين (13) و (14)

$$(\phi')^2 + \phi = \phi^2 - \phi' \qquad (15)$$

أسس ϕ: إن وجودا ممتعا ومشوقا لسلسلة فايبوناشي يمكن الحصول عليه إذا قمنا باشتقاق أسس ϕ بدلالة ϕ وملاحظة العوامل والثوابت التي تظهر.

على سبيل المثال، باستخدام (12)،

$$\phi^3 = \phi^2 . \phi = (\phi+1)\phi = \phi^2+\phi = \phi+1+\phi = 2\phi+1 \qquad (16)$$

$$\phi^4 = \phi^3 . \phi = (2\phi+1)\phi = 2\phi^2+\phi = 2(\phi+1)+\phi = 2\phi+2+\phi = 3\phi+2 \qquad (17)$$

وكذلك

$$\phi^5 = \phi^4 . \phi = (3\phi+2)\phi = 3\phi^2+2\phi = 3(\phi+1)+2\phi = 3\phi+3+2\phi = 5\phi+3 \qquad (18)$$

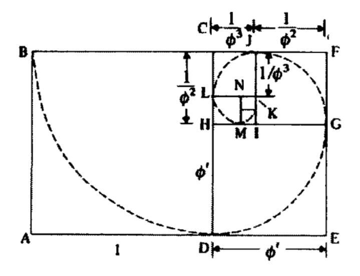
ليقم الطلبة بتوليد المزيد من أسس ϕ:

$$\begin{aligned} \phi^1 &= 1\phi + 0 \\ \phi^2 &= 1\phi + 1 \\ \phi^3 &= 2\phi + 1 \\ \phi^4 &= 3\phi + 2 \\ \phi^5 &= 5\phi + 3 \\ \phi^6 &= 8\phi + 5 \\ \phi^7 &= 13\phi + 8 \\ \phi^8 &= 21\phi + 13 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (19)$$

دعنا نعود إلى شكل 1. إذا تم تأشير $DE = \phi'$ على طول $\overline{CD}$، سنحصل على المربع DEGH، يساوي طول كل ضلع من أضلاعه ϕ'، إذن، $CH = 1-\phi'$ (تذكر بأن في الأصل CD = وحدة واحدة).

ولكن $1-\varphi' = 1-\frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi-1}{\varphi} = \frac{1/\varphi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} = (\phi')^2 = \frac{1}{\varphi^2}$

مع CF (أو GH) $= \phi' = \frac{1}{\phi}$، $\frac{CH'}{CF} = \frac{(\phi')^2}{\phi'} = \phi'$ إذن، CFGH هو أيضاً مستطيل ذهبي.



شكل (2)

وبنفس الأسلوب، يمكن تقسيم مربع، طول كل ضلع من أضلاعه $(\phi')^2$ وحدة طول، على طول الضلع CF بالمستطيل CFGH، حيث سنحصل على مستطيل ذهبي آخر هو CJIH. ويمكن تقسيم CJIH بنفس الطريقة للحصول على المربع GJKL، تاركين وراءنا المستطيل الذهبي IKLH. إن عملية تقسيم المربعات، هذه، من المستطيلات الذهبية للحصول على مستطيلات ذهبية أخرى، يمكن الاستمرار بها إلى ما لانهاية بالأسلوب المقترح في شكل 2.

إذا وصلت النقاط B, D, G, L, M بمنحنى سلس Smooth (انظر شكل 2)، سينشأ منحنى ذو شكل حلزوني.

إن هذا جزء من حلزون متساوي الزوايا، والذي لا يمكن مناقشته بإسهاب في هذا الوقت.

التقييم اللاحق Postassessment

1. وصفت قطعة المستقيم $\overline{AE}$ بكونها قابلة للتقسيم إلى نسبة متوسطة، وفائقة إذا يمكن تحديد موقع نقطة D على $\overline{AE}$ بحيث يكون

$$\frac{\overline{AE}}{AD} = \frac{AD}{DE} \quad ......(20)$$

في شكل (1)، دع AE = X وكذلك AD = 1. بعدئذ من (20)، اشتق المعادلة التربيعية التي استخدمت لتحديد قيمة ϕ في (3).

مراجع References

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002

Richard A. Dunlap, the Golden Ration and Fabionacci Numbers, River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., 1997.

Hans Wasler, The Golden Section, Washington D.C: Mathematical Association of America, 2001.

68 المثلث الذهبي
The Golden Triangle

ستساعد هذه الوحدة على تطوير فهم الطلبة في موضوعات بالرياضيات لا يكثر التعامل معها.

أهداف الأداء Performance Objectives

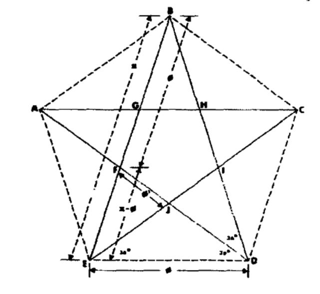
1. سوف يعرض الطلبة فهمهم لجملة علاقات بين المخمس، والشكل الخماسي، والنسبة الذهبية.
2. سينشئ الطلبة مثلثا ذهبيا.
3. سوف يعرض الطلبة بعض خصائص المثلث الذهبي مع دوال مثلثية

التقييم السابق Preassement

إن بعض المعرفة بالهندسة، والجبر المتوسط تعد ضرورية لهذه الوحدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم طلبتك بإنشاء مخمس منتظم ABCDE بأي طريقة، بعد ذلك ينبغي أن يقوموا برسم شكل خماسي ACEBD (انظر شكل 1).



شكل (1)

ليكن طول كل ضلع من أضلاع المخمس مساويا لـ ϕ وحدة طول.
استعرض مع طلبتك قياسات الزوايا المختلفة والمثلثات متساوية السيقان التي نشأت بواسطة الشكل الخماسي والمخمس.

ينبغي أن تعد ملاحظة محدودة للمثلثين التشابهين BED و DEF نظرا لاختيارهما بصورة اختيارية من مجموعة من المثلثات المتشابهة في شكل 1، لغرض المناقشة التي ستأتي.

بوجود $\overline{DF}$ منصف $\angle BDE$ ، والمثلثين متساوي الساقين DEF، BDF، بحيث:

$$ED = DF = FB = \phi \qquad (1)$$

دع $BE = BD = x$، بعدئذ $FE = x - \phi$ وكذلك:

$$\frac{BF}{FE}=\frac{BD}{ED}, \frac{\phi}{x-\phi}=\frac{x}{\phi} \qquad (2)$$

بحيث أن

$$x^2 - \phi x - \phi^2 = 0 \qquad (3)$$

إن الجذر الموجب للمعادلة (3) من الصيغة التربيعية، هو:

$$x = \phi(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \qquad (4)$$

ولكن بواسطة التعريف، $\phi = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ وعليه من معادلة (4)

$$x = \phi.\ \phi = \phi^2 = BE \qquad (5)$$

وكذلك

$$EF = x-\phi = \phi^2-\phi = \phi+1-\phi=1 \qquad (6)$$

إذن، في المثلث ΔBED، نسبة الساق إلى القاعدة، باستخدام معادلة (5) هي:

$$\frac{BE}{ED}=\frac{\phi^2}{\phi}=\phi$$

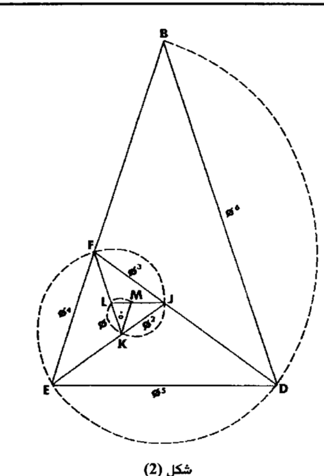
وكذلك في المثلث ΔDEF، نسبة الساق إلى القاعدة هي ϕ ثانية .

بما أن، $\frac{DE}{EF}=\frac{\phi}{1}=\phi$

لذا في أي مثلث متساوي الساقين $36° - 72° - 72°$ (يرمز إليه فيما بعد بوصفه المثلث الذهبي The Golden Triangle) تكون نسبة،

$$\phi = \frac{\text{القاعدة}}{\text{الساق}} \qquad (7)$$

تكافئ هذه النسبة نسبة الطول إلى العرض التي تم تعريفها بالنسبة للمستطيل الذهبي.



شكل (2)

في المثلث متساوي الساقين ΔEFJ، $FJ = \phi'$، ونظراً، لاستخدام المعادلتين (6) و (7)، $\frac{EF}{FJ}=\frac{1}{FJ}=\phi$ والذي يدل ضمنا على أن

$$FJ = \frac{1}{\phi} = \phi' \qquad (8)$$

إذن، المخمس المنتظم FGHIJ يحوي ضلعا طول ϕ'.

بالعودة إلى المثلث متساوي الساقين ΔDEF، يبدو واضحا بأن $\overline{EJ}$ هو منصف الزاوية ∠DEF.

في الشكل (2)، ليكن $\overline{FK}$ منصف الزاوية ∠EFJ. بعدئذ $FJ = FK = \frac{1}{\phi}$ وان القاعدة $JK = \frac{1}{\phi^2}$. بالإضافة إلى ذلك، $\overline{FK} // \overline{BD}$، نظراً لأن $m\angle KFJ = m\angle JDB$.

وبنفس الأسلوب، يكون منصف الزاوية ∠FJK موازيا للمستقيم $\overline{ED}$ ويلتقي $\overline{FK}$ عند النقطة L، مكونا مثلثا ذهبيا آخر ΔJKL. إن عملية تنصيف زاوية القاعدة هذه بمثلث ذهبي يمكن أن تستمر إلى ما لا نهاية لإنتاج سلسلة من المثلثات الذهبية الأصغر، فالأصغر، والتي تتجمع إلى نقطة نهاية، 0 الصفر كنقطة محددة Limiting Point.

إن هذه النقطة، بالمقارنة مع تلك التي حصلنا عليها في المستطيل الذهبي، هي عمود حلزون متساوي الزوايا والذي يمر خلال الرؤوس ...... B, D, E, F, J, K, L, لكل مثلث من المثلثات الذهبية.

إن عددا من الخصائص الإضافية للمثلث الذهبي تستحق أن يشار إليها هنا:

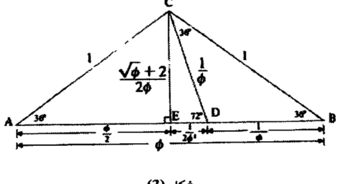
1. في شكل 2، ليكن طول ML وحدة واحدة. بعدئذ من معادلة (7)،

$$\begin{aligned} LK &= \phi = 1\phi + 0 \\ KJ &= \phi^2 = 1\phi + 1 \\ JF &= \phi^3 = 2\phi + 1 \\ FE &= \phi^4 = 3\phi + 2 \\ ED &= \phi^5 = 5\phi + 3 \\ DB &= \phi^6 = 8\phi + 5 \end{aligned} \qquad (9)$$

فينشأ عن ذلك سلسلة فايبوناشي.

2. يقسم منصف زاوية الرأس بالمثلث الذهبي منصفي زاويتي القاعدة في النسبة الذهبية (انظر الشكل 1). وبما أن منصفات زوايا المثلث تلتقي بنقطة واحدة، فإن منصف الزاوية ∠EBD ينبغي أن يمر خلال النقطة J. ولكن، من (6)، $EF = 1 = EJ = JD$، ومن معادلة (8) $FJ = \phi'$ إذن

$$\frac{JD}{FJ} = \frac{1}{\phi'} = \phi$$



شكل (3)

3. يمكن أن يستخدم المثلث الذهبي في عرض دوال مثلثية محددة بدلالة ϕ (انظر الشكل 3). ليكن المثلث ΔABC متساوي الساقين °108 – °36 - °36، وفيه AC=CB =1. ليلتق احد المنصفات الثلاثية للزاوية C مع قطعة المستقيم $\overline{AB}$ عند النقطة D. بعدئذ، المثلث ΔACD هو مثلث ذهبي، وفيه $m\angle CDA = m\angle DCA = 72°$. بما أن AC = I بعدئذ AD = 1، ومن المعادلة (7)، $CD\frac{1}{\phi}$.

بالإضافة إلى ذلك، المثلث متساوي الساقين ΔBCD، وفيه $m\angle BCD = m\angle DBC = 36°$. إذن،

$$CD = DB = \frac{1}{\phi}$$

وأن $AB = AD+DB = 1+\frac{1}{\phi} = \phi$

من النقطة C. اسقط عمودا لكي يلتقي مع $\overline{AB}$ عند النقطة E.

ينتج عن هذا:

$$AE = EB = \frac{\phi}{2}$$

بصورة مباشرة في المثلث قائم الزاوية، ΔACE،

$$\text{Cos } 36° = \frac{\phi}{2} \qquad (10)$$

والذي يدل ضمنا على

$$\text{Sin } 45° = \frac{\phi}{2} \qquad (11)$$

بالإضافة إلى ذلك

$$ED = AD\text{-}AE = 1 - \frac{\phi}{2} = \frac{2-\phi}{\phi} = \frac{1}{2\phi^2} \qquad (12)$$

والآن في المثلث قائم الزاوية ΔCED.

$$\text{Cos } 72° = \frac{ED}{CD} = \frac{1/2\phi^2}{1/\phi} = \frac{1}{2\phi} = \sin 18° \qquad (13)$$

التقييم اللاحق Postassessment

1. باستخدام مقلوب المتطابقات المثلثية، جد القيم بدلالة ϕ لكل من tan، sec، cot لقياسات الزوايا المبينة في (10)، (11) و (13) أعلاه.
2. باستخدام صيغة نصف – زاوية، حدد قيم الدوال المثلثية لكل من 18° و 27° بدلالة ϕ.

ينبغي أن تستخدم هذه الوحدة بصحبة "المستطيل الذهبي".

مراجع References

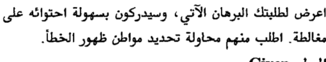
Huntley, H.E., The Divne Proportion, New York: Dover, 1970.

Richard A. Dunlap, The Golden Ration and Fibonacci Numbers, River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. , 1997.

Hans Wasler, The Golden Section, Washington, DC: Mathematical Association of America, 2001



مغالطات هندسية



Geometric Fallacies

إن طلبة الهندسة الذين يستمرون بدراسة البراهين، مستخدمين مجموعات إضافية، يتساءلون عن الحاجة إلى تبرير صارم لوجود تلك المجموعات. ولا يفضل الطلبة غالبا الحاجة للبرهنة على وجود، وتفرد هذه المجموعات. بيد أنهم في نفس الوقت يميلون إلى تطوير الاعتماد على شكل تخطيطي دون إجراء تحليل لصحته. تقدم هذه الوحدة براهين مغلوطة إلى الطلبة على أمل نشوء قدرة إضافية لديهم لفهم الحاجة القائمة إلى مثل هذه الصرامة.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مغالطة هندسية، سيحدد الطلبة مواطن ظهورها .

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على إلمام كاف بالبراهين الهندسية لكل من المثلثات المتطابقة، والمتشابهة.

اعرض لطلبتك البرهان الآتي، وسيدركون بسهولة احتوائه على مغالطة. اطلب منهم محاولة تحديد مواطن ظهور الخطأ.

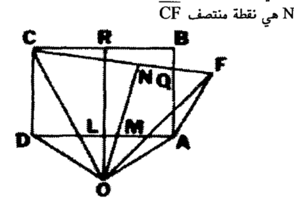
المعطى Given:

المستطيل ABCD.

$\overline{FA} \cong \overline{FB}$

R هي نقطة منتصف $\overline{BC}$

N هي نقطة منتصف $\overline{CF}$



لبرهنة أن **To Prove**: الزاوية القائمة تساوي بقياسها زاوية منفرجة ($\angle CDA \cong \angle FAD$).

ارسم $\overrightarrow{RL}$ عموديا على $\overline{CB}$.

ارسم $\overrightarrow{MN}$ عموديا على $\overline{CF}$.

يتقاطع $\overline{RL}$ و $\overline{NM}$ عند النقطة O. وإذا لم يتقاطع هذان المستقيمان، يمكن أن يكون $\overline{RL}$ ، $\overline{NM}$ متوازيان، وهذا يعني بأن $\overline{CB}$ يوازي $\overline{CF}$ وهو امر مستحيل.

ارسم $\overline{DO}$ ، $\overline{CO}$ ، $\overline{FO}$ ، $\overline{AO}$.

بما أن $\overline{RO}$ هو العمود المنصف هو العمود المنصف لكل من $\overline{CB}$ ، $\overline{DA}$. $\overline{DO} \cong \overline{AO}$ بما أن $\overline{NO}$ هو العمود المنصف لـ $\overline{CF}$. $\overline{CO} \cong \overline{FO}$.

وبما أن $\overline{FA} \cong \overline{BA}$ وكذلك $\overline{BA} \cong \overline{CD}$ ، سيكون لدينا $\overline{FA} \cong \overline{CD}$ إذن $\Delta CDO \cong \Delta FAO$ ،(SSS≅SSS) لذا $\angle ODC \cong \angle OAF$.

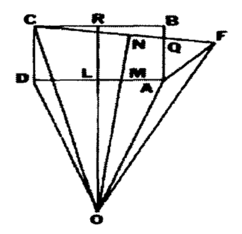
بما أن $\overline{OD} \cong \overline{OA}$ ، سيكون لدينا $\angle ODA \cong \angle OAD$.

والآن، $m\angle ODC - m\angle ODA = m\angle OAF - m\angle OAD$

أو $m\angle CDA = m\angle FAD$.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

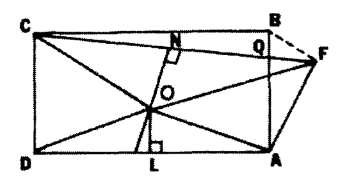
عندما يقوم الطلبة بفحص البرهان ولا يجدوا ثمة خطأ فيه، اطلب منهم استخدام المساطر والفرجار لإعادة إنشاء الشكل التخطيطي. إن الشكل التخطيطي الصحيح يبدو كما يأتي:



ورغم تطابق المثلثات، فإن قدرتنا على طرح زوايا محددة لم تعد موجودة الآن. إذن، فإن صعوبة هذا البرهان تكمن في اعتماده على شكل تخطيطي رسم بصورة خاطئة.

ولغرض بيان أن $\angle OAF$ لا يمكن أن تكون زاوية منفرجة، ينبغي أن نبين بأنه عندما يقطع $\overline{OF}$ كل من $\overline{AB}$ و $\overline{AD}$ ، وان النقطة O تقع على العمود المنصف للضلع $\overline{CF}$ ، فإن النقطة O لا يمكن أن تقع على العمود المنصف للضلع $\overline{AD}$. افترض أن النقطة O هي نقطة تقاطع العمودين المنصفين. (كما يأتي الشكل التوضيحي الأصلي). بما أن $\overline{CD} // \overline{AQ}$ ، $\angle DCF \cong \angle AQF$ في المثلث متساوي الساقين ΔABF، $\angle ABF \cong \angle AFB$. ولكن: $m\angle AFB > m\angle AFC$، وبالتعويض $m\angle ABF > m\angle AFC$. وبما أن $\angle AQF$ هي زاوية خارجية بالمثلث ΔBQF، $m\angle AQF > m\angle ABF$. وعليه، $m\angle AQF > m\angle ABF > m\angle AFC$، أو $m\angle AQF > m\angle AFC$. بالتعويض $m\angle DCF > m\angle AFC$. بما أن $\angle OCF \cong \angle OFC$ وبالطرح سيكون لدينا $m\angle DCO > m\angle OFA$ إذن: $DO > OA$. وهذا تناقض لأن $DO=OA$ إذا كان O منصف $\overline{DA}$ على العمود. لذا لا يمكن أن تكون O على العمود المنصف للضلع $\overline{DA}$ لأي نقطة O بحيث تكون $\angle OAF$ منفرجة.

ويصح البرهان أعلاه بالنسبة للشكل التوضيحي الآتي والذي يظهر بأن $\angle OAF$ لا يمكن أن تكون حادة.

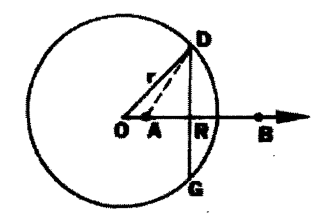


والآن اعرض لطلبتك البرهان الآتي وهو أن أي نقطة في داخل دائرة تقع أيضا على الدائرة.

المعطى **Given**: الدائرة O بنصف قطر r

لتكن A أي نقطة داخل الدائرة ومستقلة عن O

برهن **Prove**: A تقع على الدائرة.



افترض وقوع B على امتداد $\overline{OA}$ خلال A بحيث : $r^2 = OA \bullet OA$. (يبدو واضحا بأن OB اكبر من r نظرا لأن OA أقل من r) ليلتق العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ الدائرة في النقطتين D، و G، حيث R هي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

واصبح لدينا الآن $OA = OR\text{-}RA$ وكذلك :

$OB = OR+RB = OR+RA$

$\therefore r^2 = (OR\text{-}RA)(OR+RA)$

$r^2 = OR^2 - RA^2$

$r^2 = (r^2\text{-}DR^2) - (AD^2\text{-}DR^2)$ باستخدام نظرية فيثاغورث

$r^2 = r^2 - AD^2$

$\therefore\ AD^2 = 0$

إذن تتطابق A مع D، وتقع على الدائرة.

إن المغالطة في هذا البرهان تمكن في الحقيقة بقيامنا برسم مستقيم إضافي $(\overleftrightarrow{DRG})$ مع شرطين هما: إن $\overline{DRG}$ هو العمود المنصف لـ $\overline{AB}$، وانه يقطع الدائرة. في حين بالواقع، فإن جميع النقاط الموجودة على العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ تقع خارج الدائرة. وعليه لا تقطع الدائرة.

$r^2 = OA\ (OB)$

$r^2 = OA\ (OA + AB)$

$r^2 = OA^2 + (OA)(OB)$

والآن. يفترض البرهان أن

$OA + \frac{AB}{2} < r$

$2(OA) + AB < 2r$

$4(OA)^2 + 4(OA)(AB) + AB^2 < 4r^2$

بما أن $r^2 = OA^2 + (OA)\ (AB)$

سيكون لدينا، $AB^2 < O$ وهو أمر مستحيل.

إن هذا البرهان يؤشر إلى الحرص والاهتمام الذي ينبغي الاعتناء به عند رسم مجموعات إضافية, وعند استخدام شرط "واحد" فقط.

هنا يوجد لدينا "مثلث" يتألف من أربعة مثلثات قائمة الزاوية، وأربعة مستطيلات، وثغرة "Hole".

1. ليقم طلبتك بحساب مساحة المناطق الثمانية (دون الثغرة) [416].
2. والآن ليقوموا باحتساب المساحة الكلية للشكل. [بما أن $PQ = 32$ والارتفاع = 26، $\frac{1}{2}PQ.h = 416$].

سنجابه الآن هذه المسالة: كيف توصلنا إلى نفس المساحة مع الثغرة وبدونها؟

لقد حدثت المغالطة نتيجة للخطأ في 2. إن الشكل ليس مستطيلا نظرا لعدم وقوع النقاط P, N, M على استقامة واحدة.

إذا كانت النقاط P, N, M تقع على استقامة واحدة.

بما أن $\angle RNO$ هي زاوية قائمة، الزاوية $\angle PNR$ مكملة للزاوية $\angle MNT$.

وبما أن $\angle NRP$ هي زاوية قائمة، الزاوية $\angle PNR$ مكملة للزاوية $\angle RPN$.

$\therefore\ \angle MNT \cong \angle RPN$

$\therefore\ \Delta MNT \sim \Delta NPR$

ولكن، ليست هذه هي الحالة.

تنطبق نفس القضية بالنسبة للنقاط Q, O, M. لذا فإن الشكل هو مخمس، وعليه فإن الصيغة التي استخدمناها في 2 ليست صحيحة.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة باختيار مغالطة هندسية من احد الكتب الآتية وبيان "الخطأ" الموجود في البرهان.

مراجع References

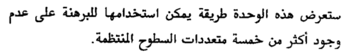
Maxwell, E.A., Fallacies in Mathematics, Cambridge University Press, 1963.

Northorp. E.P., Riddles in Mathematics, D.Van Nostrand Co., 1944.

Posamentier, A.S., J.H. Banks, and R.L. Bannister. Geometry, It's Elements and Structure, 2nd ed., McGraw-Hill, 1977, PP. 240-244, 270-71.

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursion for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

70 متعدد السطوح المنتظم
Regular Polyhedral



ستعرض هذه الوحدة طريقة يمكن استخدامها للبرهنة على عدم وجود أكثر من خمسة متعددات السطوح المنتظمة.

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بتعريف متعدد السطوح المنتظم، وتمييز جميع أنواع متعددات السطوح، مع بيان سبب عدم وجود أكثر من خمسة متعددات السطوح المنتظمة.

التقييم السابق Preassessment

اعرض نماذجاً فيزيائية لجملة من متعددات السطوح، وليقم الطلبة بإحصاء عدد الرؤوس (V)، وعدد الحافات (E)، وعدد الوجوه (F) في كل منها. وبعد أن يضعوا جدولا بالنتائج التي حصلوا عليها سوف يلاحظون العلاقة:

$V+F=E+2$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد إنشاء نظرية اويلر بصورة وضعية Empirically، (V+F=E+2)، قد يرغب الطلبة في تطبيقها للوصول إلى استنتاج آخر بصدد متعدد السطوح. سيعتمد تسلسل برهان هذه النظرية بشكل أساس على اهتمام طلبة الصف.

إن أحد موارد البرهان هو:

Geometry It's Element and Structure by A.S. Posamentier, J.H. Banks, and R.L. Bannister, PP. 574-576 (McGraw, Hill, 1977).

إن التطبيق الممتع لهذه النظرية هو البرهان على عدم وجود أكثر من خمسة من متعددات السطوح المنتظمة. ينبغي أن تبتدئ بتعريف متعدد السطوح المنتظم بوصفه شكلا مصمتا محاطا بجزء من المستويات يطلق عليها الوجوه Faces، كل منها عبارة عن متعدد أضلاع (متطابق الأضلاع والزوايا). ويعد المكعب مثالاً شائعاً على متعدد السطوح المنتظم.

للبدء بالبرهنة على وجود خمسة متعددات سطوح منتظمة فقط، دع s تمثل عدد الأضلاع في كل وجه، ودع t تمثل عدد الوجوه عند كل رأس.

نظراً لوجود t من الوجوه عند كل رأس، ينبغي أن يدرك الطلبة بأن هناك t من الحافات عند كل رأس أيضاً. افترض عند إحصاء عدد الحافات (E) لمتعدد سطوح معلوم، بأن عدد الحافات عند كل رأس قد تم إحصائها، ثم ضربت بعدد الرؤوس (V). إن هذا سينتج ضعف عدد الحافات (ZE) بمتعدد السطوح، لان كل حافة قد تم عدها مرتين، مرة عند كل رأسين تصل بينهما. وعليه:

$$tV=2E \quad \text{أو} \quad \frac{V}{1/t}=\frac{E}{1/2}$$

بنفس الطريقة، عند إحصاء عدد حافات متعدد السطوح، فإن عدد أضلاع (s) كل وجه قد تم إحصاؤها ثم ضربت بعدد وجوه (F) متعدد السطوح. وهذا الأمر سينتج عنه أيضاً ضعف عدد حافات متعدد السطوح، لان كل ضلع (حافة) قد عدت بكونها تعود إلى وجهين، وعليه:

$$sF=2E \quad \text{أو} \quad \frac{F}{1/s}=\frac{F}{1/2}$$

إذن

$$\frac{V}{1/t}=\frac{E}{1/2}=\frac{E}{1/s}$$

ينبغي أن يتذكر الطلبة النظرية الآتية حول النسب:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$$

بعدئذ، دعهم يطبقونها على ما يأتي:

$$\frac{V}{1/t}=\frac{-E}{-1/2}=\frac{F}{1/s}=\frac{V-E+F}{1/t-1/2+1/s}$$

ولكن، بواسطة نظرية اويلر (V-E+F = 2)

$$\frac{V}{1/t}=\frac{E}{1/2}=\frac{F}{1/s}=\frac{2}{1/t-1/2+1/s}$$

والآن ليقوم الطلبة بحل المعادلة بالنسبة لـF, E, V:

$$V=\frac{4s}{2s+2t-st}$$

$$E=\frac{2st}{2s+2t-st}$$

$$F=\frac{4t}{2s+2t-st}$$

ينبغي أن يكلف الطلبة بفحص طبيعة كل من: F, E, V. إن

إدراك وجوب كون هذه الأعداد موجبة، وحاول أن تستنبط من الطلبة بأن المقام ينبغي أن يكون موجبا (نظراً لان s و t موجبتان). إذن.

$$2s + 2t - st > 0$$

لنتمكن من التحليل. أضف (4-) إلى طرفي المتباينة للحصول على

$$2s + st - st - 4 > - 4$$

اضرب كل من الطرفين بـ (1-)، لتحصل على:

$$-2s - 2t + st + 4 < 4 \quad \text{أو} \quad (s-2)(t-2) < 4$$

عند هذه النقطة، ليضع الطلبة محددات على s، و t. كما ينبغي أن يسرعوا ببيان عدم إمكانية لوجود متعدد أضلاع تقل عدد أضلاعه عن ثلاثة أضلاع، وعليه ستكون $s \geq 3$. كذلك، يجب أن يدركوا بأنه ينبغي أن يكون عند كل رأس من رؤوس متعدد السطوح ثلاثة وجوه كحد أدنى، وعليه ستكون $t \geq 3$.

إن هاتين الحقيقتين تؤشران بوضوح بأن قيمة كل من (s-2) و (t – 2) ينبغي أن تكون موجبة على الدوام. ونظرا لان حاصل ضربهما يجب أن يكون اقل من أربعة، يجب أن يكون الطلبة قادرين على أعداد الجدول الآتي:

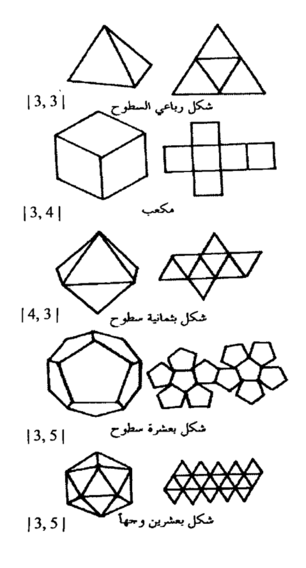
اسم متعدد السطوح	F	E	V	T	S	t-2	s-2	(s-2)(t-2)
رباعي السطوح Tetrahedron	4	6	4	3	3	1	1	1
سداسي السطوح Hexahedron	6	12	8	3	4	1	2	2
ثماني السطوح Octahedron	8	12	6	4	3	2	1	2
متعدد السطوح-12 Dodecahedron	12	30	20	3	5	1	3	3
متعدد السطوح-20 Icosahedron	20	30	12	5	3	3	1	3

ونظرا لعدم وجود قيم ممكنة أخرى بالنسبة لكل من s و t، يعد الجدول أعلاه تاما. وعليه توجد خمسة أشكال من متعددات السطوح المنتظمة فقط.

ينبغي أن يشجع الطلبة الذين يمتلكون قابليات متميزة على البحث والاستقصاء عن وجود متعددات السطوح هذه. إن أحد الموارد التي توفر إمكانية التحقق من ذلك هو: عناصر اقليدس، الكتاب XIII.

إن النظرة المتفحصة على محتويات الجدول السابق تدل ضمنا على وجود تناظر واضح بين سداسي السطوح وثماني السطوح بالإضافة إلى متعدد السطوح -12، ومتعدد السطوح -20. ألا وهو. إذا تم تبادل s و t فإن التناظرات سوف تبدو أكثر وضوحا. يضاف إلى ذلك. فإن هذا الجدول يبين بأن وجوه متعددات السطوح المنتظمة إما أن تكون مثلثات متساوية الأضلاع، أو مربعات. أو مخمسات منتظمة (انظر عمود s). وينبغي أن يشجع الطلبة. أيضاً، على إجراء مزيد من التحقق والتمحيص لنظرية اويلر ($V + F = E + 2$) بتوظيف البيانات الموجودة في الجدول السابق.

إن الأشكال التالية تظهر خمسة متعددات سطوح – منتظمة بالإضافة إلى "الأنماط" التي يمكن استخدامها لإنشاء متعددات السطوح هذه (بقطعها وطيها بصورة صحيحة).



رغم الإشارة إلى هذه الأشكال بوصفها الأجسام الأفلاطونية الخمسة Five Platonic Solids، يعتقد بأن ثلاثة منها (رباعي السطوح، وسداسي السطوح، ومتعدد السطوح-12) كانت نتيجة لنظرية فيثاغورث، بينما يعزى الشكلان المتبقيان (ثماني السطوح، ومتعدد السطوح-20) إلى جهود ثيايتيوس Thiaeteus (ق.م 369-414). وهناك المزيد من المعلومات التاريخية حول هذه الأقسام بحيث يمكن أن يعد تقرير خصب عنها بواسطة أحد طلبة الصف.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقم الطلبة بتعريف وتمييز متعدد السطوح المنتظم.
2. ليقم الطلبة بتوضيح سبب عدم إمكانية وجود أكثر من خمسة من متعددات السطوح المنتظمة.

71 مقدمة إلى الطوبولوجيا An Introduction to Topology

يمكن أن يدرّس درس عن الطوبولوجيا بعد إكمال تعليم الهندسة. وسوف تعرض هذه الوحدة بعض المبادئ، والمفاهيم الأساسية للطوبولوجيا، وتطبيقاتها الميدانية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء رسمين هندسيين سيقوم الطلبة بتحديد إذا كانا متكافئين طوبولوجيا.
2. بإعطاء شكل متعدد السطوح، أو مستوي، سيتمكن الطلبة من بيان أن V+F-E=2 (الفراغ) وان V+F-E=1 (مستوي).

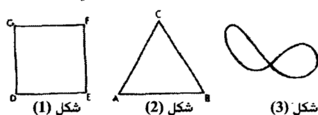
التقييم السابق Preassessment

إن معرفة كافية بهندسة المرحلة السابعة ينبغي أن تتوفر لدى الطلبة بفترة تسبق هذه الوحدة.

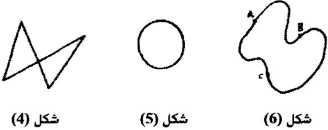
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم الطلبة برسم مجموعة من المنحنيات المغلقة Closed Curves. بعدئذ دعهم يعمدون إلى التمييز بين المنحنيات المغلقة البسيطة وتلك التي لا تتسم بالبساطة.

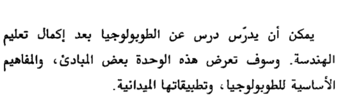
إن بعض الاحتمالات الممكنة ستكون كما يأتي:



شكل (1) شكل (2) شكل (3)

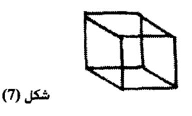


شكل (4) شكل (5) شكل (6)



اطلب منهم إعادة رسم كل شكل دون أن يرفعوا أقلامهم عن الأوراق. ينبغي أن يدرك الطلبة بأنه إذا رسم شكل 1 على صفحة مطاطية فانهم يستطيعون فتلها وليها للحصول على كل من الأشكال 2، 5، 6.

افترض أن الطلبة سيأخذون بعين الاعتبار بعض الأشكال الهندسية في الفراغ. وليقوموا مثلاً برسم مكعب.



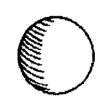
شكل (7)

اسأل الطلبة إذا كانت هناك ثمة إمكانية لتحويل المكعب إلى أي من الأشكال 8، 9، أو 10 بواسطة الفتل Twisting أو الالتواء Bending.

شكل (8)




شكل (9)



شكل (10)

وسيجد الطلبة بأن الشكل الوحيد من هذه الأشكال الذي يمكن للمكعب أن يتحول إليه هو الكرة.

لذا يمكن القول بأن المكعب هو مكافئ طوبولوجيا للكرة. اخبر الطلبة بأن دراسة الأشكال بهذه الطريقة سوف تؤدي بنا إلى فرع من فروع الرياضيات يطلق عليه ***"الطوبولوجيا Topology"*** أو ***"هندسة صفيحة المطاط Rubber Sheet Geometry"***.

يمكن الحصول على إحدى العلاقات المثيرة في الهندسة بصورة مباشرة من الطوبولوجيا. وتتضمن هذه العلاقة رؤوس (V)، وحافات (E)، ووجوه (F) متعدد السطوح أو متعدد الأضلاع. إن هذه العلاقة تنص على: V+F-E=2 (في الفضاء ثلاثي الأبعاد)، أو V+F-E=1 (في مستوى). ليتأمل الطلبة شكلا مخمسا. يحتوي المخمس على خمسة رؤوس، وخمسة حافات، ووجها واحدا: إذن V+F-E=5+1-5=1. قد يرغب الطلبة الآن بتأمل شكلا ثلاثي الأبعاد. إن المكعب (شكل7) يحتوي على ثمانية رؤوس. وستة اوجه، واثني عشر حافة. وعليه فإن، V+F-E=8-12+6=2. يمكن عرض هذه العلاقات على طلبة الصف باستخدام شفافيات جهاز الإسقاط الضوئي، أو بواسطة نماذج فيزيائية.

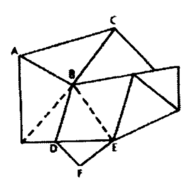
افترض أن مستويا قد قطع جميع حافات إحدى الزوايا التربيعية لمكعب (قطعة من الطين على شكل مكعب قد تكون ذات فائدة في هذا المقام). إن هذا المستوى سوف يفصل أحد الرؤوس عن المكعب. ولكن، من خلال العملية، سوف يضاف إلى متعدد السطوح الأصلي: 1 وجه، 3 رؤوس، و 3 حافات. إذن بالنسبة لمتعدد السطوح الجديد، ازدادت قيمة V بمقدار 2، وزادت قيمة F بمقدار 1، بينما زادت قيمة E بمقدار 3؛ وعليه ستبقى V+F-E دون تغيير.

تكون الأشكال متكافئة طوبولوجيا إذا يستطيع المرء أن يحدث تماكنا Coincide مع أشكال أخرى باستخدام التشويه Distortion. أو الانكماش Shrinking، أو الشد Streching، أو اللّي Bending. وإذا أزيل أحد وجوه متعدد السطوح فإن الشكل المتبقي سيكون متكافئ طوبولوجياً مع منطقة من المستوى. إن هذا الشكل الجديد (انظر شكل 11) لن يمتلك نفس الشكل أو الحجم، ولكن "حدوده" ستبقى كما هي دون تغيير. وسوف تصبح الحافات أضلاعا لمنطقة متعدد الأضلاع، وسيكون هناك نفس العدد من الحافات والرؤوس في شكل المستوى كما في متعدد السطوح. إن كل متعدد أضلاع لا يكون مثلثا يمكن أن يقطع إلى مثلثات، أو مساحات مستطيلة برسم الأوتار. وفي كل مرة يرسم فيها قطر، سوف نزيد عدد الحافات بمقدار 1، ولكننا سنزيد بنفس الوقت عدد الوجوه بمقدار 1 أيضاً. إن قيمة V-E+F ستبقى كما هي. وسوف تمتلك المثلثات التي تقع على الحافات الخارجية للمنطقة ،أما حافة واحدة على حدود المنطقة، كما في المثلث ΔABC في الشكل المصاحب، أو هناك حافتان على الحدود، كما في المثلث ΔDEF. إن مثلثات مثل ΔABC يمكن أن ترفع برفع أحد أضلاع الحدود (يعني، $\overline{AC}$). وبعملنا هذا نكون قد قللنا عدد الوجوه بمقدار 1 وعدد الحافات بمقدار 1. وتبقى V-E+F دون تغيير. إن مثلثات مثل ΔDEF يمكن أن ترفع برفع حافتين (يعني، $\overline{EF}$ و $\overline{DF}$). وبعملنا هذا نكون قد قللنا عدد الحافات بمقدار 2، وعدد الوجوه بمقدار 1، وعدد الرؤوس بمقدار 1. ولا زالت الصيغة V-E+F لا تعاني من أي تغيير في قيمتها.

نستمر بهذا الأسلوب لحين يتبقى لدينا مثلث واحد. يحوي هذا المثلث على ثلاثة رؤوس، وثلاثة حافات، ووجه واحد. إذن V-E+F=1 في المستوى. سوف نستنتج بأنه عندما نستبدل الوجه الذي رفعناه سيكون لدينا V-E+F=2 بالنسبة لمتعدد الأسطح في الفراغ.

بعد أن تكون قد توفرت للطلبة فرصة لتعويد أنفسهم على هذه النظرية، ينبغي أن يشجعوا على اختبارها وضعياً بواسطة متعدد السطوح الذي قاموا بإنشائه. ويعد الطين وسطا مناسبا لهذا النشاط.

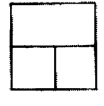
قد يريد الطلبة توثيق نتائجهم على مخطط.



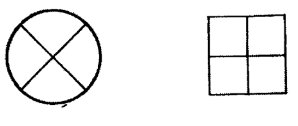
شكل (11)



شكل (12–ب)



شكل (12–أ)



شكل (14–ب) شكل (14–أ)



شكل (13–ب)





شكل (13–أ)

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقرر الطلبة فيما إذا كان أي من الأشكال 12، 13، أو 14 إن يكون قابلا للثني إلى شكل آخر.
2. بين أن المعادلة V+F-E=2 تنطبق على شكل مربع السطوح، ومثمن السطوح.
3. بين أن المعادلة V+F-E=1 تنطبق على شكل مثمن السطوح أو متعدد السطوح–12.

72 زوايا على ساعة
Angles on a Clock

يمكن استخدام هذه الوحدة كنشاط ترفيهي في مراحل المدارس الثانوية الدنيا حيث يمكن اكتشاف بعض العلاقات المثيرة للاهتمام، أو يمكن استخدامها كتطبيق إثرائي بالنسبة للطلبة المبتدئين في دراسة الجبر بموضوع الحركة المنتظمة Uniform Motion.

أهداف الأداء Performance Objective

1– سيحدد الطلبة الزمن الدقيق الذي ينشأ عن زاوية محددة بذراعي عقارب الساعة.

2– سيحل الطلبة مسائلا تتعلق بمواضع ذارعي عقارب الساعة.

التقييم السابق Preassessment

اسأل الطلبة ما هو الوقت (بصورة دقيقة) الذي تتشابك عنده ذراعي الساعة بعد الساعة الرابعة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن أول رد فعل لطلبتك إزاء حل هذه المسألة سيكون بأن الجواب ببساطة هو 4:20. وعندما ستخبرهم بأن ذراع الساعات يتحرك بصورة منتظمة، سوف يبدأون بتقدير كون الجواب واقعا بين 4:21 و 4:22. وسيدركون بأن ذراع الساعات يتحرك خلال فترة زمنية بين مؤشرات الدقائق كل 12 دقيقة. وعليه فإن الذراع سوف تغادر الفترة 4:21–4:22 عند 4:24. ولكن هذا لا يجيب على السؤال الأصلي حول الوقت الدقيق للتشابك.

في الصف المبتدئ بمادة الجبر، وعند دراسة مسائل الحركة المنتظمة، دع الطلبة يتأملون هذه المسألة بهذا المنظور. إن افضل طريقة لجعل الطالب يبتدئ بفهم حركة ذراعي الساعة تكمن في جعله يأخذ بعين الاعتبار حركة الذراعين بصورة مستقلة حول الساعة وبسرعة منتظمة. إن تأشيرات الدقائق على الساعة (سيرمز إليها منذ الآن بالـ *"مؤشرات"*) سوف تعمل على إظهار المسافة بالإضافة إلى الوقت. ينبغي أن ينتزع قياس مشابه (تماثلي) في هذا المكان للحركة المنتظمة للسيارات (وهو موضوع شائع استخدم بكثرة في المسائل اللفظية في المساق الدراسي للجبر

الأولي). إن مسألة تتضمن مركبة سريعة تتخطى مركبة بطيئة تعد مناسبة في هذا المقام.

لقد أظهرت الخبرة بأن القياس المتشابه (التماثلي) يجب أن ينتخب من بين حالات محددة بدلا من التعميم المجرد. من المفيد توجيه الطلبة نحو إيجاد المسافة اللازمة لسيارة تسير بسرعة 60 ميل/ساعة لكي تتخطى سيارة تقدمتها بمسافة 20 ميلاً عن نقطة البداية. وتسير بسرعة 5 ميل/ساعة.

والآن دع الطلبة يأخذون ينظر الاعتبار الساعة 4 كوقت ابتدائي للساعة. وستتركز مسألتنا على تحديد، بالضبط، متى سيتخطى ذراع الدقائق ذراع الساعات بعد الساعة الرابعة. افترض أن سرعة ذراع الساعات تساوي r، بعدئذ ينبغي أن تكون سرعة ذراع الدقائق 12r. وسنبحث عن المسافة، مقاسة بعدد المؤشرات التي تم عبورها. والتي يجب على ذراع الدقائق اجتيازها لتخطي ذراع الساعات.

دعنا نشير إلى هذه المسافة بوصفها d من المؤشرات. حينئذ فإن المسافة التي سيسافرها ذراع الساعات هي d-20 مؤشرة، نظراً لأنها تتقدم بـ 20 مؤشرة في بدايتها على ذراع الدقائق. ولكي يحصل ذلك، فإن الوقت المطلوب لذراع الدقائق. $\frac{d}{12r}$، ولذراع الساعات. $\frac{d-20}{r}$، يجب أن يكون متساويا. لذا فإن $\frac{d-20}{r}=\frac{d}{12r}$ وكذلك:

$d=\frac{12}{11}.20=21\frac{9}{11}$. إذن فإن ذراع الدقائق سوف يتخطى ذراع الساعات عند $21\frac{9}{11}$: 4 بالضبط.

تأمل الصيغة $d=\frac{12}{11}.20$. إن المقدار 20 يمثل عدد المؤشرات التي يجب على ذراع الدقائق اجتيازها للوصول إلى المكان المطلوب، وبافتراض أن ذراع الساعات يبقى ثابتا في محله. ولكن من الواضح إن ذراع الساعات لا يبقى ثابتا، وعليه ينبغي علينا أن نضرب هذه الكمية بنسبة $\frac{12}{11}$ إلى أمام. دعنا نرمز إلى هذه النسبة $\left(\frac{12}{11}\right)$ بوصفها "معامل التصحيح Correction Factor". ليقم طلبة الصف بالتحقق من صحة معامل التصحيح المذكور منطقيا وجبريا.

لجعل استخدام معامل التصحيح مألوفا لدى الطلبة، اختر بعض المسائل القصيرة والسهلة. فعلى سبيل المثال، تستطيع أن تطلب منهم إيجاد الوقت، بالضبط، عندما يتشابك ذراعا الساعة بين الساعة 7 والساعة 8. هنا سيعمد الطالب إلى تحديد المسافة التي ينبغي أن يسافرها ذراع الدقائق من موقع "12" إلى موقع ذراع الساعات، مفترضين ثانية بأن ذراعات الساعات يبقى ثابتا. بعدئذ يضرب عدد المؤشرات 350، بمعامل التصحيح، $\frac{12}{11}$، وسوف يحصلون على الوقت المضبوط $\left(7:38\frac{12}{11}\right)$ الذي يتشابك عنده ذراعا الساعة.

لزيادة فهم الطلبة بهذا الأسلوب اطلب منهم اعتبار شخص يتحقق من ساعة يدوية إزاء ساعة كهربائية، وقد لاحظ بأن ذراعي ساعة اليد تتشابك كل 65 دقيقة (كما تقاس بالساعة الكهربائية). اسأل الصف هل أن ساعة اليد: سريعة، أو بطيئة، أو دقيقة.

قد ترغب في جعلهم يأخذون المسألة بعين الاعتبار بالطريقة الآتية. عند الساعة 12 يتشابك ذراعي ساعة بصورة تامة. باستخدام الطريقة التي وصفت سابقا نجد بأن الذراعين سوف يتشابكان ثانية عند الساعة $\frac{5}{11}$ 0.5 : 1 بالضبط، ومرة ثانية عند $2:10\frac{10}{11}$ بالضبط، ومرة ثانية عند $3:16\frac{4}{11}$ بالضبط، وعلى هذا النحو باستمرار. في كل حقبة هناك فترة زمنية مقدارها $65\frac{5}{11}$ دقيقة بين موقعي التشابك. وعليه فإن الشخص المراقب كان مخطئا بمقدار $\frac{5}{11}$ من الدقيقة. والآن دع الطلبة يحددون فيما إذا كانت الساعة سريعة أو بطيئة.

هناك الكثير من المسائل المتعة، والبالغة الصعوبة في بعض الأحيان، والتي تصبح سهلة باستخدام معامل التصحيح آنف الذكر. تستطيع أن تطرح مسائلك على الطلبة بسهولة ويسر.

على سبيل المثال، تستطيع أن تسأل الطلبة إيجاد الأوقات المضبوطة عندما يكون ذراعا الساعة متعامدين (أو يكوّنان زاوية مستقيمة) بين، مثلا، الساعة الثامنة والتاسعة.

مرة ثانية، ينبغي أن توجه الطلبة صوب تحديد عدد المؤشرات التي يجب على ذراع الدقائق أن يسافرها من موقع "12" لحين أن يكون الزاوية المطلوبة مع ذراع الساعات الثابت. بعدئذ دعهم يضربون هذا العدد بمعامل التصحيح $\left(\frac{12}{11}\right)$ للحصول على الوقت الحقيقي-المضبوط. يعني، لإيجاد الوقت الصحيح بحيث يكون ذراعا الساعة متعامدان للمرة الأولى بين الساعة 8 و 9، حدد الموقع المطلوب لذراع الدقائق عندما يكون ذراع الساعات ثابتا (هنا، على مؤشر الدقائق 25). بعدئذ، اضرب 25 بـ $\frac{12}{11}$ لتحصل على $8:27\frac{3}{11}$، وهو الوقت المضبوط الذي يكون عنده الذراعان متعامدان للمرة الأولى بعد الساعة الثامنة.

بالنسبة للطلبة الذين لم يدرسوا مادة الجبر، تستطيع أن تبرر

لهم معامل التصحيح $\frac{12}{11}$ بالنسبة للفترة الزمنية بين التشابكين كما يأتي:

فكّر بذراعي الساعة عند العصر. خلال الساعات الاثني عشر التالية (يعني، لحين وصول الذراعين إلى نفس الموضع عند منتصف الليل) سيصنع ذراع الساعات دورة واحدة، وذراع الدقائق 12 دورة، وان ذراع الدقائق سوف ينطبق على ذراع الساعات 11 مرة (يتضمن منتصف الليل، ولكن ليس وقت العصر، مبتدئا بعد تفرق الذراعين عند وقت العصر).

نظراً لان كل ذراع تدور بسرعة ثابتة، فإن الذراعين يتشابكان كل $\frac{12}{11}$ من الساعة، أو $65\frac{5}{11}$ دقيقة.

يمكن أن تبسط هذه الحقيقة على حالات أخرى.

ينبغي أن يستمد الطلبة إحساسا عميقا بالإنجاز، والمتعة كنتيجة لتوظيف هذه الطريقة البسيطة في حل ما يبدو على الدوام من مسائل الساعة المعقدة.

التقييم اللاحق Postassessment

1. عند أي وقت سيتشابك ذراعا الساعة بعد الساعة الثانية؟.
2. عند أي وقت سيتعامد ذراعا الساعة بعد الساعة الثالثة؟.
3. كيف يتغير "معامل التصحيح" إذا كانت ساعتنا ذات دورة مقدارها 24 ساعة؟.
4. كيف سيكون "معامل التصحيح" إذا كنا نبحث عن الوقت المضبوط الذي يكون عنده ذراع الثواني وذراع الدقائق متعامدان بعد (ضع وقتا محددا)؟.
5. ما هي الزاوية التي يحددها ذراعي الساعة عند (ضع وقتا محددا)؟
6. ما هو أول وقت، بالضبط، عندما يقاطع ذراع الثواني الزاوية الناشئة عن ذراعي الدقائق والساعات بعد: (ضع وقتا محددا)؟.

73 إيجاد المعدل (المتوسط) التوافقي Averaging Rates-The Harmonic Mean

ستعرض هذه الوحدة طريقة مختصرة لتحديد متوسط معدلين أو أكثر. (معدلات، سرعة، كلفة، إنتاج، ... الخ).

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء معدلات مختلفة لقاعدة شائعة، سيقوم الطلبة بإيجاد متوسط هذه المعدلات.
2. بإعطاء مسألة تتطلب متوسط معدلات معلومة، سيقوم الطلبة بتطبيق مفهوم المتوسط التوافقي بصورة صحيحة عندما يكون قابلا للاستخدام، أو التطبيق.

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة بحل هذه المسألة:

انطلقت نورين Noreen بعجلتها من منزلها إلى مكان العمل بسرعة 30 ميل/ساعة. بعدها عادت إلى منزلها من العمل عبر نفس الطريق وبمعدل 60 ميل/ ساعة. ما هو متوسط سرعتها بالنسبة للرحلتين؟.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ستعمل المسألة السابقة بوصفها محفزا مناسبا بالنسبة لهذه الوحدة. إن معظم الطلبة غالبا ما يعرضون المقدار 45 ميلا/ساعة جوابا لهذه المسألة. إن تفسيرهم سوف يركز على كون 45 هي متوسط السرعتين 30 و 60. أمر صحيح! ولكن يجب عليك أن تقنعهم بأنه، بما أن العددين 30 و 60 يمثلان معدلا للسرعة، فلا يمكن التعامل معهما ككميات بسيطة. وسيرغب الطلبة بمعرفة ماهية الفرق الذي ينشأ عن الخاصية التي يتصفان بها.

إن المهمة الأولى ستكون بإقناع طلبتك بأن إجابتهم الأصلية، 45 ميل/ساعة، هي خاطئة. ودعهم يدركون بأنه حين انطلقت

نورين بعجلتها من المنزل إلى العمل قد قادت عجلتها ضعف الزمن الذي استغرقته في عودتها. إذن، ليس من الصحيح إعطاء كل من معدلي السرعة نفس "**الوزن Weight**". وإذا لم تتوفر لدى طلبتك قناعة كافية بهذا الأمر، اسألهم فيما إذا كانت درجات الاختبار خلال الفصل الدراسي 90، 90، 90، 90، 40، أي من الطرق الآتية سوف يستخدمونها لإيجاد متوسط درجاتهم:

90 (متوسط الاختبارات الأربعة الأولى)

+ 40 (آخر درجة اختبار)

65 = 2 ÷130

أو: 90 + 90 + 90 + 90 + 40 = 400، 400 ÷ 5 = 80.

يتوقع بأن الطلبة سيقترحون الآن بأنه يمكن الحصول على جواب المسألة الأصلية بواسطة $40=\frac{30+30+60}{2}$. وهذا صحيح تماما؟ ولكن جوابا بسيطا كهذا يصعب توقعه إذا كان أحد المعدلين ليس مضاعفا للآخر. إن معظم الطلبة سيرجعون الآن بطريقة أكثر تعميما للحل. إن أحد هذه الحلول يرتكز إلى العلاقة: المعدل × الزمن = المسافة. تأمل ما يأتي:

$$T_1=\frac{D}{30} \quad \text{(زمن الذهاب إلى العمل)}$$

$$T_2=\frac{D}{60} \quad \text{(زمن العودة إلى المنزل)}$$

$$T=T_1+T_2=\frac{D}{20} \quad \text{(الزمن الكلي للمرحلتين)}$$

$$R=\frac{2D}{T}=\frac{2D}{D/20}=40 \quad \text{(معدل الرحلة الكلية)}$$

إن R، بالحقيقة، هو "متوسط المعدل" بالنسبة للرحلة الكلية، نظراً لان المسائل من هذا النوع تتعامل مع الحركة المنتظمة.

إن من المسائل ذات الأهمية الخاصة هي تلك التي تكون المعدلات التي يجب احتساب متوسطاتها من القاعدة المشتركة (مثال، نفس المسافة بنفس المعدلات المختلفة). ليتأمل الطلبة المسألة الأصلية بتعابير عامة، حيث تكون المعدلات السرعة R_1، R_2 (بدلاً من 30 و 60)، وكل منها لمسافة مقدارها D. وعليه، ستكون $T_1=\frac{D}{R_1}$ وكذلك $T_2=\frac{D}{R_2}$، بحيث أن:

$$T=T_1+T_2=D(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})=\frac{D(R_1+R_2)}{R_1R_2}$$

ولكن دع طلبتك يأخذون بعين الاعتبار:

$$R=\frac{2D}{T}=\frac{2D}{D\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}=\frac{2}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)}=\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2} \qquad (1)$$

وسوف يلاحظون بأن $\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$ هو بالحقيقة معكوس متوسطي معكوس R_1، R_2. إن مثل هذا المتوسط يطلق عليه "*التوسط التوافقي Harmonic Average*".

لا ريب بأن الحديث عن المتوسط المتناسق سيكون مرتبا. إن تعاقبا من الأعداد يطلق عليه متوافقياً إذا كانت ثلاثة من أعضائه المتتابعة بالتعاقب، a، b، c تمتلك الخاصية:

$$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c} \qquad (2)$$

يمكن إعادة كتابة هذه الصيغة كما يأتي:

$$a(b-c)\ c(a-b) \qquad (3)$$

بالقسمة على abc سنحصل على:

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a} \qquad (4)$$

تظهر هذه العلاقة بأن معكوسات التعاقب التوافق هي في تعاقب رياضي، كما مع $\frac{1}{a}$، $\frac{1}{b}$، $\frac{1}{c}$. وعندما تكون ثلاثة حدود في تعاقب رياضي فإن الحد متوسط الموقع هو متوسطهم (معدلهم). إذن $\frac{1}{b}$ هو المتوسط الحسابي بين $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{c}$؛ ويكون b هو المتوسط التوافقي بين a و c.

بوصف b بدلالة a، c في معادلة (4):

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c},\ \ b=\frac{2ac}{a+c} \qquad (5)$$

ليقارن الطلبة بين المعادلتين (1) و (5).

بنفس الأسلوب قد ترغب بجعل طلبة الصف يتأملون المتوسط المتناسق للأعداد الثلاثة r، s، t:

$$\frac{3}{(1/r)+(1/s)+(1/t)}=\frac{3rst}{st+rt+rs}$$

وقد يرغب الطلبة بتوسيع هذه العلاقة لتحديد "صيغة formula" بالنسبة للمتوسط المتناسق لأعداد أربعة هي k، m، n، p:

$$\frac{4}{(1/k)+(1/m)+(1/n)+(1/p)}=\frac{4kmnp}{mnp+knp+kmp+kmn}$$

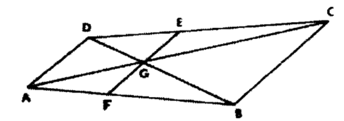
ليأخذ الطلبة بعين الاعتبار المسألة الآتية:

اشترت ليزا Lisa بمبلغ 2 دولار من أنواع مختلفة من الأقلام أسعار كل منها: 2 سنت، 4 سنت، و 5 سنت، على التوالي. ما هو متوسط السعر المدفوع لكل قلم؟.

إن الجواب على هذه المسألة هو $3\frac{3}{19}$، المتوسط التوافقي لكل من 2، 4، 5. حاول أن تركز على النقطة التي تبرر صحة هذا الأمر، نظراً لان كل معدل يعمل على نفس القاعدة، 2 دولار.

إن مسائلا مشابهة (انظر الاختبار اللاحق) يمكن أن تطرح ويباشر الطلبة حلها في هذا الوقت.

وقد ترغب في تأمل مخطط هندسي توضيحي للمفهوم. رغم أن المتوسط التوافقي يمتع جل البارزين هندسيا في الهندسة الإسقاطية Projective Geometry، فإن من المناسب إعطاء مخططا توضيحيا للمتوسط التوافقي في الهندسة التركيبية Synthetic Geometry. ليتأمل الطلبة طول قطعة تحتوي على نقطة تقاطع وتري شبه منحرف وموازي للقاعدتين، وبنهايتين على الساقين (انظر شكل $\overline{EGF}$ أدناه). إن طول هذه القطعة، $\overline{EGF}$ ، هو المتوسط التوافقي بين طولي القاعدتين $\overline{AD}$ ، $\overline{BC}$. في الشكل أدناه، ABCD هو شبه منحرف، وفيه $\overline{AD}//\overline{BC}$ ويتقاطع وتراه عند النقطة G. كذلك $\overline{EGF}//\overline{BC}$ ، وكذلك $\overline{DEC}$ ، $\overline{AFB}$.



وبما أن $\overline{GF}//\overline{BC}$ ، $\Delta AFG \sim \Delta ABC$ ، وأن $\frac{AF}{FG}=\frac{AB}{BC}$. بنفس الطريقة، بما أن $\overline{GF}//\overline{AD}$ ، $\Delta GBF \sim \Delta DBA$ ، وأن $\frac{BF}{FG}=\frac{AB}{AD}$. وعليه فإن $\frac{AF}{FG}+\frac{BF}{FG}=\frac{AB}{BC}+\frac{AB}{AD}$. وبما أن AF + BF = AB، $\frac{AB}{FG}=\frac{AB}{BC}+\frac{AB}{AD}$ ، أو $FG=\frac{(BC)(AD)}{BC+AD}$. وبنفس الأسلوب يمكن أن يعرض بأن $EG=\frac{(BC)(AD)}{BC+AD}$ ، إذن EF هو المتوسط التوافقي بين BC، AD.

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا حلقت طائرة من نيويورك إلى روما بسرعة 600 ميل/ساعة وقفلت راجعة عبر نفس المسار بسرعة 500 ميل/ساعة، ما هو متوسط معدل سرعتها بالنسبة للرحلة الكلية.
2. اشترت أليس Alice بقيمة دولارين ثلاثة أنواع من المكسرات، أثمانها 40 سنت، 50 سنت، و 60 سنت لكل باوند، على التوالي. ما هو متوسط الثمن الذي دفعته أليس لكل باوند من المكسرات؟
3. في شهر حزيران، حصل ويلي Willie على 30 نقطة بالنسبة لمتوسط ضربات مضرب مقدارها 300، ولكنه حصل في شهر أيار على 30 نقطة بالنسبة لمتوسط ضربات مضرب مقدارها 400. ما هو متوسط ضربات مضرب ويلي في شهري أيار وحزيران؟.
4. جد المتوسط المتناسق لكل من: 2، 3، 5، 6، 2، 9.

مراجع References

Posamentier, A. S., and S. Krulilk, Teachers! Prepare Your Students for the Mathematics for SAT1: Methods and Problem Solving Strategies, Thousand Oaks, CA: Crowin, 1996.

Posamentier, Alfred S., and Charles, T-Salkind, Challenging Problems in Algebra, New York: Dover 1996.

Posamentier, Alfred S., and Charles T. Salkind, Challenging Problems in Geometry, New York: Dover, 1996.

Posamentier A. S., "The Harmonic Mean and Its Place Among Means", in Readings for Enrichment in Secondary School Mathematics, Edited by Max A. Sobel. Reston, VA: NCTM, 1988.

74 غلطات بلهاء
Howlers

في مغالطات بالرياضيات، أشار ماكسويل E. A. Maxwell إلى الاختصارات الآتية بوصفها غلطات بلهاء.

$$\frac{\not{1}6}{6\not{4}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{2\not{6}}{\not{6}5}=\frac{2}{5}$$

سوف تعرض هذه الوحدة طريقة لعرض هذه الغلطات البلهاء على طلبة الجبر الأولي بحيث يحسن الطلبة فهم مفاهيم الأعداد.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتطوير غلطة بلهاء لم تعرض في الصف.
2. سيوضح الطلبة سبب وجود أربعة غلطات بلهاء فقط مكونة من كسر ثنائي المنزلة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على اختصار الكسور إلى ابسط صورها، وكذلك ينبغي أن يكونوا على معرفة كافية بمفاهيم مثل: العامل، والعدد الأولي، وقادرين على أداء جميع العمليات المطلوبة على الكسور.

استراتيجيات التعليم Teaching strategies

ابدأ عرضك التقديمي بسؤال الطلبة اختصار الكسور الآتية إلى ابسط صورها: $\frac{16}{64}$، $\frac{19}{95}$، $\frac{26}{65}$، $\frac{49}{98}$. وبعد إكمال الطلبة عملية اختصار كل كسر من الكسور إلى ابسط صورة بالأسلوب التقليدي، اخبرهم بأنهم قد أنجزوا كثيرا من العمل غير الضروري. واعرض لهم الاختصارات الآتية:

$$\frac{\not{1}6}{6\not{4}}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{1\not{9}}{\not{9}5}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{2\not{6}}{\not{6}5}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{4\not{9}}{\not{9}8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

عند هذه النقطة سيكون طلبتك مندهشين، لحد ما، وسيكون أول رد فعل منهم بالسؤال عن إمكانية إجراء هذا على كسور تتألف من أعداد تتألف من رقمين.

تحدى طلبتك بإيجاد كسر آخر (يتألف من عدد ذي رقمين) حيث يسري عليه هذا النوع من الاختصار. قد يورد الطلبة $\frac{55}{55}=\frac{5}{5}=1$ كتوضيح لهذا النوع من الاختصار. وضح لهم بأنه رغم صحة هذا الأمر على جميع مضاعفات 11، فإنه عادي، وان اهتمامنا سينصب على الكسور التامة (يعني، التي تقل قيمتها عن 1).

بعد أن يغزو نفوس الطلبة إحباط تام إزاء هذا التحدي، تستطيع البدء بمناقشة سبب كون الكسور الأربعة المذكورة آنفا هي الكسور الوحيدة (تتألف من أعداد برقمين) حيث يصح عليها هذا النوع من الاختصار. ليتأمل الطلبة الكسر $\frac{10x+a}{10a+y}$. إن طبيعة الاختصارات الأربعة السابقة كانت بحيث عند اختصار فئة a فإن الكسر كان مساويا لـ $\frac{x}{y}$. وعليه فإن $\frac{10x+a}{10a+y}=\frac{x}{y}$، وينتج عن هذا:

$$y(10x+a)=x(10a+y)$$

أو

$$10xy+ay=10ax+xy$$

$$9xy+ay=10ax$$

وأن

$$y=\frac{10ax}{9x+a}$$

عند هذه النقطة ليقم الطلبة بفحص هذه العلاقة. وينبغي عليهم إدراك بأن من الضروري كون x، y، a أعدادا صحيحة نظراً لكونهم أرقاما في بسط ومقام الكسر. وقد أضحت الآن مهمتهم تنصب على إيجاد قيم a و x التي تكون عندها y أيضاً عددا صحيحا.

لتجنب المزيد من المناورات الجبرية Algebric Manipulation تستطيع توجيه الطلبة نحو أعداد جدول يولد قيما للمتغير y من المعادلة $y=\frac{10ax}{9x+a}$. وحاول أن تذكرهم بضرورة كون كل من x، y، a عددا صحيحا مفردا. يظهر أدناه قسم من الجدول الذي سيقومون بأعداده. لاحظ بأن الحالات التي يكون فيها x=a قد استبعدت، نظراً لأن $\frac{x}{a}=1$.

		x \ a	1	2	3	4	5	6	...	9
		1		$\frac{20}{11}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{50}{14}$	$\frac{60}{15}=4$		
		2	$\frac{20}{19}$		$\frac{60}{21}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{100}{23}$	$\frac{120}{24}=5$		
		3	$\frac{30}{28}$			$\frac{120}{31}$	$\frac{150}{32}$	$\frac{180}{33}$		
		:								
		.								
		9								

إن القسم الذي يبدو أمامنا من الجدول يظهر فيه اثنان من أربع من القيم الصحيحة لـ y، وهي، عندما تكون $x=1$، $a=6$ وبعدئذ $y=4$ وكذلك عندما تكون $x=2$، $a=6$، $y=5$. إن هاتين القيمتين ينشأ عنهما الكسرين كل من $\frac{16}{64}$ و $\frac{26}{65}$، على التوالي. إن العددين الصحيحين المتبقيان لـ y سوف نحصل عليها عندما $x=1$، $a=9$ بعدئذ $y=5$. وكذلك عندما $x=4$، $a=9$، بعدئذ $y=8$. وينتج عن هاتين القيمتين الكسرين $\frac{19}{95}$، $\frac{49}{98}$، على التوالي. وينبغي أن يكون ما ذكر آنفا سببا كافيا لاقتناع الطلبة بوجود فقط أربعة من هذه الكسور التي تتألف من أعداد برقمين يسري عليها هذا الأمر قد يتساءل الطلبة الآن عن إمكانية وجود كسور تتألف من بسط ومقام بأكثر من رقمين، يسري عليها هذا النوع من الاختصار الغريب. ليحاول الطلبة العمل على هذا النوع من الاختصار مع $\frac{499}{998}$. سيجد الطلبة بأن في الواقع $\frac{499}{998}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

وبعد فترة قصيرة سيدركون بأن:

$$\frac{49}{98}=\frac{499}{998}=\frac{4999}{9998}=\frac{49999}{99998}=\dots$$

$$\frac{16}{64}=\frac{166}{664}=\frac{1666}{6664}=\frac{16666}{66664}=\frac{166666}{666664}=\dots$$

$$\frac{19}{95}=\frac{199}{995}=\frac{1999}{9995}=\frac{19999}{99995}=\frac{199999}{999995}=\dots$$

$$\frac{26}{65}=\frac{266}{665}=\frac{2666}{6665}=\frac{26666}{66665}=\frac{266666}{666665}=\dots$$

إن الطلبة ذوي القدرات المتميزة قد يرغبون بتبرير هذه التوسعات بالغلطات البلهاء الأصلية.

إن الطلبة الذين يمتلكون، عند هذه النقطة، رغبة إضافية بالتنقيب عن المزيد من الكسور التي تسمح بهذا النوع الغريب من الاختصار ينبغي أن تعرض عليهم الكسور الآتية.

يجب عليهم أن يبرروا مشروعية هذا الاختصار الغريب ثم يتهيأوا لاكتشاف المزيد من هذه الكسور.

$$\frac{332}{830}=\frac{32}{80}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{385}{880}=\frac{35}{80}=\frac{7}{16}$$

$$\frac{138}{345}=\frac{18}{45}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{275}{770}=\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$$

$$\frac{163}{326}=\frac{1}{2}$$

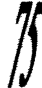
$$\frac{203}{609}=\frac{1}{3}$$

التقييم اللاحق Postassessment

ليعمل الطلبة على ما يأتي:

أ. توليد غلطة "بلهاء" لم تعرض أصلا في هذه المناقشة.

ب. توضيح سبب وجود أربعة غلطات بلهاء فقط، تتألف كل منها من أعداد ذات رقمين.



عودة إلى مسائل المراتب العشرية
Digit Problems Revisited

تمتاز المسائل التي تتضمن المراتب العشرية للأعداد، والتي عرضت في منهج الجبر الأولي، بكونها مباشرة ولا تفتقر إلى جهد ملموس في كثير من الأحيان. وتعد هذه المسائل، غالبا، موردا مفيدا للتنقيب عن المهارات التي تم تعليمها في مراحل سابقة تعرض هذه الوحدة كيف أن مسائل المراتب العشرية تمتاز بكونها ذات مسالك مطروقة في الطبيعة،كما يمكن استخدامها لتحسين مفاهيم الطلبة عن الأعداد.

هدف الأداء Performance Objective

1. سيقوم الطلبة بحل مسائل تتضمن مراتبا عشرية لعدد ما.
2. سيقوم الطلبة بتحليل حقيقة رياضية Mathematical Fact حول طبيعة أعداد محددة.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل المعادلات الخطية البسيطة Linear Equations ،بالإضافة إلى المعادلات الآنية البسيطة Simultaneous Equation.

استراتيجيات التعليم Teaching strategies

ابدأ عرضك التقديمي بسؤال طلبتك اختيار أي عدد بثلاث مراتب عشرية بحيث لا تتساوى مرتبة العشرات مع الآحاد. بعدئذ دعهم يكتبون العدد الذي تكون مراتبه معكوس مراتب العدد المختار. والآن اخبرهم بطرح هذين العددين (العدد الصغير من العدد الكبير). واخبرهم، بأخذ الفرق ثانية وعكس مراتبه ثم أضف العدد "الجديد" إلى الفرق الأولي. سوف ينتهي "كل" الطلبة بالعدد 1,089.

على سبيل المثال، افترض أن الطلبة اختاروا العدد 943، وسيكون العدد الجديد بالمراتب المعكوسة 439. وستبدو الحسابات كما يأتي

934	
439	
495	(الفرق)
594	(المراتب المعكوسة)
1089	(المجموع)

عندما يقارن الطلبة النتائج سيصابون بالدهشة لاكتشافهم طبيعة الانتظام السائد في إجابتهم. عند هذه النقطة، ينبغي عليهم أن يكونوا متلهفين تماما لإيجاد لماذا ينتهون بنفس الإجابة في كل مرة.

أبدا بتركهم يعرضون العدد الأصلي بصيغة: $100h+10t+u$، حيث h، t، u تمثل مراتب المئات، والعشرات، والآحاد، على التوالي. لتكن $h > u$، والتي يجب أن تصدق في أحد الأعداد. بعملية الطرح $u-h < 0$ لذا التقط 1 من مرتبة العشرات لجعل مرتبة الآحاد $10+u$ (من المطروح منه).

نظراً لتساوي مرتبة العشرات في العددين اللذان يراد طرحهما، وأن 1 قد التقط من مرتبة عشرات المطروح منه، بعدئذ ستكون قيمة هذه المرتبة $10(t-1)$. إن مرتبة مئات المطروح منه هي $h-1$، نظراً لآن 1 قد التقط بعيدا لتمكين عملية الطرح في مرتبة العشرات، جاعلا مرتبة العشرات $10(t+9) = 100 + 10(t-1)$.

ويمكن عرض هذا تصويرياً كما يأتي:

$$\begin{array}{lllll} 100(h-1) & + & 10(t+9) & + & (u+10) \\ 100u & + & 10t & + & h \\ \hline 100(h-u-1) & + & 10(9) & + & u-h+10 \end{array}$$

بعكس مراتب هذا الفرق سنحصل على:

$$100(u-h+10) + 10(9) + h-u-1$$

بإضافة السطرين الأخريين ينتج

$$100(9) + 10(18) + (10-1) = 1089$$

إن المسألة الآتية تتضمن المراتب العشرية لعدد ما، وتعرض إلتفاتة غير معتادة لحد ما:

سبعة أضعاف عدد يتألف من مرتبتين عشريتين يساوي عددا يتألف من ثلاث مراتب عشرية. عندما كتبت المرتبة 6 بعد المرتبة الأخيرة للعددالذي يتألف من ثلاثة مراتب،ازداد هذا العدد بمقدار 1.833. جد العدد الذي يتألف من مرتبتين.

إن العقبة الأساسية التي تعترض الطلبة عند حل هذه المسألة تكمن في كيفية بيان وضع 6 بعد عدد ما. ليقم الطلبة بعرض العدد ذي المرتبتين بواسطة a. وعليه سيكون العدد ذي الثلاثة

مراتب 7a والآن لوضع 6 بعد عدد ما سيكون بضرب العدد بـ 10 ثم إضافة الـ 6 إليه. إن المعادلة المطلوبة ستكون بعدئذ 70a+6+7a+1833 ويكون a = 29.

ولعرض المزيد من فوائد التعامل الجبري مع الصيغ العشرية لعدد ما، قد تجد الأمر مثيراً بتوضيح لماذا يكون العدد قابلا للقسمة على 9 (أو 3)، لطلبتك، إذا كان مجموع مراتبه يقبل القسمة على 9 (أو 3). دعهم يتأملون أي عدد يتألف من خمسة مراتب عشرية، لنقل، ab, cde. يعني 10,000a+1000b+100c+10d+e.

بما أن هذا العدد يمكن إعادة كتابته بأسلوب

(9,999+1)a+(999+1)b+(99+1)c+(9+1)d+e أو

9,999a+999b+99c+9d+a+b+d+e، وأن مجموع الحدود الأربعة الأولى يقبل القسمة على 9 (أو 3)، فإن مجموع بقية الحدود ينبغي أن يكون قابلا للقسمة على 9 (أو 3) أيضاً. يعني، لكي يكون العدد قابلا للقسمة 9 (أو 3)، ينبغي أن يكون، a+b+c+d+e قابلا للقسمة عليهما.

سنعرض هنا مسألة من مسائل المراتب العشرية، والتي تمتاز بحل غير روتيني. وسيجد الطلبة أن التحليل الآتي غير معتاد لحد ما.

جد العدد N الذي يتألف من مرتبتين عشريتين بحيث عندما يقسم على 4 يكون المتبقي صفرا، وأن جميع أسس الأعداد الصحيحة تنتهي بنفس المرتبتين كما في العدد الأصلي N.

بصورة طبيعية سيرغب الطلبة بالبدء في حل هذه المسألة بعرض N=10t+u. وبما أن 10t+u=4m (يعني مضاعف 4)، u عدد زوجي. اسأل الطلبة أي عدد زوجي يمتلك مربعا ينتهي بنفس الرقم كما في الرقم الأصلي. وعندما يثبت الطلبة بأن 0 و 6 فقط يحققان هذه الخاصية، عليه يكون u مساوياً 0 أو 6. تتضمن الحالة u=0 بأن t=0 بحيث أن N=00، وهي حالة عادية، لأنه إذا كانت t=0، سوف تنتهي N بالصفر بينما ينتهي مربعها بـ 00.

والآن دع الطلبة يتأملون الحالة u=6 بعدئذ N=10t+6=4m، أو 5t+3=2m.

وهذا يبين بأن t=1,3,5,7,9. ولكن:

$N^2=(10t+6)^2=100t^2+120t+36=100t^2+100d+10e+36$

حيث 120t=100d+10e وبما أن المرتبتين الأخيرتين لـ N^2 تشابه تلك لـ N، 10e + 36= 10t +6، وأن t=e+3 بحيث أن t ≥3. كذلك، 120t =100d+10(t-3)، ووفقا له 11t =10d-3 وأن 11t ≤ 87 أو t ≤ 7.

ليحاول الطلبة t=3، $36^2=1296$ (مرفوض) بعدئذ حاول t=5، $3136=56^2$ (مرفوض). أخيراً حاول t=7، بعدئذ $76^2 = 5776$ (مقبول نظراً لأن N=76).

هناك الكثير من المسائل الأخرى التي تتضمن مراتبا عشرية للأعداد التي ترغب بعرضها على طلبة صفك لتقديم نظرية الأعداد والتي يزودها هذا الأنموذج.

التقييم اللاحق Postassessment

1. بين باستخدام عرض رقمي للعدد، بأن عددا محددا يقبل القسمة على 8، إذا كانت المراتب الثلاثة (والتي تعد عددا جديدا) تقبل القسمة على 8.
2. هناك عددان يتألفان من نفس المراتب – أحدهما معكوس للآخر. وأن الفرق بين مربعي هذين العددين هو 7,128 وان مجموع العددين يساوي 22 ضعفا للفرق بين المراتب. ما هما هذان العددان؟
3. بإزاحة المرتبة الأولية 6، للعدد الصحيح N إلى النهاية، نحصل على عدد يساوي ¼ N. جد اصغر قيمة ممكنة لـ N بحيث تحقق الشروط.

76 المتطابقات الجبرية
Algebraic Identities

ستعرض هذه الوحدة عملية هندسية لإجراء المتطابقات الجبرية. لقد اخترع اليونانيون القدماء طريقة للتطبيق على المساحات بوصف العدد بواسطة طوله فقط، رغم الافتقار إلى الرموز الجبرية الكافية، لغرض البرهنة على مثل هذه المتطابقات.

هدف الأداء Performance Objective

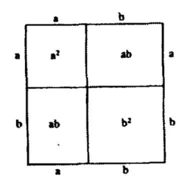
سينشئ الطلبة بطريقة هندسية المتطابقات الجبرية باستخدام طريقة تطبيق المساحات.

التقييم السابق Preassessment

1 ليقم الطلبة بفك $(a+b)^2$.
2 ليقم الطلبة بفك $a(b+c)$.
3 ليقم الطلبة بفك $(a-b)^2$.
4 استظهر لأي قيمة من قيم a، و b تصح التساويات التي حصلنا عليها.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بعد أن يأخذ الطلبة بعين الاعتبار الأسئلة أعلاه، ينبغي عليهم التكيف على خصائص التطابق. وعندما يفهم الطالب مبدأ التطابق، ابدأ بتقديم طريقة تطبيق المساحات بتوضيح التطابق الآتي بأسلوب هندسي $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. ولكي تبدأ، دع الطلبة يرسمون مربعا طول ضلعه $(a+b)$. بعئذ ينبغي تقسيم المربع إلى مربعات ومستطيلات مختلفة. (انظر شكل 1)، على أن تؤشر الأضلاع المختلفة بصورة مناسبة.



شكل (1)

يستطيع الطلبة تحديد مساحة كل منطقة بسهولة. وبما أن مساحة المربع الكبير تساوي مساحات الأشكال – رباعية الأضلاع الأربعة التي قسم إليها، يجب أن يحصل الطلبة على:

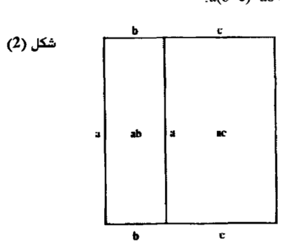
$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$

إن برهانا أكثر صرامة يمكن العثور عليه في عناصر أقليدس، القضية 4، الكتاب II.

بعدئذ وضح بطريقة هندسية التطابق $a(b+c)=ab+bc$. ولكي تبدأ، دع الطلبة يرسمون مستطيلا تكون أضلاعه المجاورة بطول a، و $(b+c)$. بعد ذلك يجب تقسيم المستطيل إلى مستطيلات مختلفة، (انظر شكل 2) مع تأشير أطوال هذه الأضلاع أيضاً

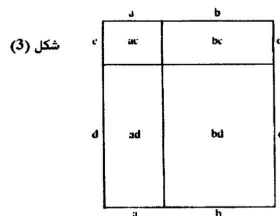
يستطيع الطلبة حساب مساحة كل قسم بسهولة. استظهر من الطلبة، بما أن مساحة المستطيل الكبير تساوي مساحتي الشكلين رباعي الأضلاع الذي قسم إليهما، فإن الشكل يوضح بأن $a(b+c)=ab+ac$.

شكل (2)



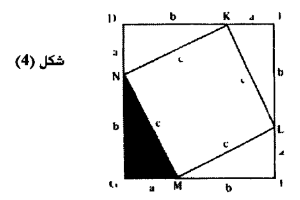
ليتأمل الطلبة التطابق الآتي $(a+b)\times(c+d)=ac+ad+bc+bd$. ارشد الطلبة إلى رسم المستطيل المناسب وبأطوال أضلاع $(a+b)$، $(c+d)$. ينبغي أن يقسم المستطيل إلى بضعة مستطيلات (انظر شكل 3). إن أطوال أضلاع، ومساحات المناطق قد تم تأشيرها. وكما في الحالات الأخرى، فإن مساحة المستطيل الكبير تساوي مساحات الأشكال الرباعية الأربعة التي قسم إليها.

يوضح الشكل 3 التطابق $(a+b)\times(c+d)=ac+ad+bc+bd$. وضح للطلبة بأن طريقة تطبيق المساحات يمكن استخدامها لبرهنة معظم المتطابقات الجبرية. وتكمن الصعوبة في اختيارهم لأبعاد الأشكال الرباعية وطبيعة التقسيم الذي يجري عليها.



شكل (3)

وبعد أن يشعر الطلبة بالارتياح في استخدام المساحات لعرض المتطابقات الجبرية، دعهم يتأملون العلاقات الفيثاغورية، $a^2+b^2=c^2$. ورغم أن هذه العلاقة ليست تطابقاً فإن تطبيق المساحات لازال مناسبا لها. ليقم الطلبة برسم مربع طول ضلعه $(a+b)$. واعرض للطلبة كيفية تقسيم هذا المربع إلى أربعة مثلثات متطابقة ومربع. (انظر شكل 4)، وقد تم تأشير أطوال الأضلاع عليه.



شكل (4)

يظهر الشكل التوضيحي (4) ما يأتي:

1. مساحة DEFG= (مساحة المثلث ΔGNM) × 4 + مساحة KLMN.
2. وعليه فإن،

$$(a+b)^2=4(\frac{1}{2}ab)+c^2$$

3. إذا قمنا الآن بتعويض تطابق $(a+b)^2$ والذي تمت البرهنة عليه سابقا، سوف نحصل على:

$$a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$

استظهر من الطلبة ما تبقى من البرهان لاستنتاج أن $a^2+b^2=c^2$. ينبغي أن يكون الطلبة، الآن، قادرين على طرح وحل متطابقاتهم الشخصية بأسلوب هندسي.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقم الطلبة ببيان كيفية إنشاء المتطابقات الجبرية الآتية بصورة هندسية:
   أ- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
   ب- $(a^2-b^2)=(a+b)\times(a-b)$.
2. ليحدد الطلبة المتطابقات الأخرى التي يمكن البرهنة عليها باستخدام طريقة تطبيق المساحات.

مرجع Reference

Posamentier, A. S., and H. A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.



طريقة للتحليل العاملي لثلاثيات الحدود بصيغة ax^2+bx+c
A Method for Factoring Trinomials of The Form ax^2+bx+c

تتعرض هذه الوحدة طريقة غير اعتيادية لحد ما للتحليل العاملي. وعندما يكون ممكنا، لثلاثيات الحدود بصيغة ax^2+bx+c. حيث a، و b، و c هي أعداد صحيحة. إن هذه التقانة ذات فائدة ملموسة عندما يكون معامل a في ax^2+bx+c مختلفا عن 1، نظراً لأنه في مثل هذه الحالة ترتكز الطريقة التقليدية على أسلوب المحاولة والخطأ والتي غالبا ما تكون بالغة الصعوبة لمعظم ثلاثيات الحدود.

أهداف الأداء Performance Objectives

1 بإعطاء مجموعة من ثلاثيات الحدود بصيغة ax^2+bx+c، سيقوم الطلبة بتحليلها إلى عواملها.

2 سيصبح الطلبة قادرين على تطبيق هذه التقانة في حل المعادلات التربيعية.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالضرب والتحليل العاملي لثنائيات الحدود، وكذلك بالتحليل العاملي لثلاثيات الحدود ذات المربعات التامة Perfect Square Trinomials.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ هذا الدرس بإعطاء بضعة أمثلة لعمليات ضرب ثنائيات الحدود مثل:

$(x+3)(x+2)$، $(2x-3)(x+1)$، $(5x-2)(3x-7)$ ، ...الخ.

ودع الطلبة يلاحظون الخصائص الآتية لعمليات الضرب هذه:

أ- ينتج عنها. على الدوام ثلاثيات الحدود بصيغة ax^2+bx+c حيث تكون a، و b، و c أعداد صحيحة.

ب- حاصل ضرب الحدود الأولى في ثنائي الحدود يمثل الحد الأول في ثلاثي الحدود.

ج- من المستحيل أن تكون قيمة a صفرا، من عملية ضرب أي من ثنائي الحدود، وعليه سيكون a مخالفا لقيمة صفر في جميع ثلاثيات الحدود ذات الصيغة ax^2+bx+c.

بعد أن يتمرن الطلبة على عمليات الضرب هذه، دعهم يتأملون العملية المعاكسة. وهي، أن لديك ثلاثي الحدود بصيغة ax^2+bx+c، وادع الطلبة إلى تحليله عامليا بحيث يبدو كحاصل ضرب اثنان من ثنائي الحدود. واطلب منهم إبداء اقتراحاتهم بخصوص كيفية إجراء التحليل العاملي على مجموعة من ثلاثيات الحدود، على سبيل المثال، $x^2+5x+6c$، $2x^2-7x-4$، وهكذا.

بعدئذ دع الطلبة يتأملون التحليل العاملي لثلاثي الحدود بصيغته العامة ax^2+bx+c وبالأسلوب الآتي:

$$ax^2+bx+c=\frac{a(ax^2+bx+c)}{a}=\frac{a^2x^2+abx+ac}{c}$$

وسيكون هذا الأمر ممكنا لان قيمة a تختلف عن صفر على الدوام. وإذا تم تحليل $a^2x^2+abx+ac$ عامليا، فإن أحد التحليلات ستكون: $(ax+y)(ax+z)$، حيث ينبغي احتساب قيمة كل من y، و z. إذن، سيكون لدينا:

$$ax^2+bx+c=\frac{a^2x^2+abx+ac}{a}=\frac{(ax+y)(ax+z)}{a}$$

$$=\frac{a^2x^2+a(y+z)x+yz}{a}$$

وإذا قورنت المساواة الثانية والرابعة الآن، سنلاحظ بأن: $y+z=b$ وان $yz=ac$. إذن لكي نحلل ثلاثي الحدود عامليا بصيغة ax^2+bx+c، فإن من الضروري التعبير عنه كحاصل ضرب هو $\frac{(ax+y)(ax+z)}{a}$ فقط، حيث يمكن احتساب y، z بملاحظة أن مجموعهما ينبغي أن يساوي b وان حاصل ضربهما يجب أن يساوي ac.

كذلك دع الطلبة يلاحظون أنه بسبب :

$$\frac{(ax+y)(ax+z)}{a}=\frac{a^2x^2+abx+ac}{a}$$

وينتج عن ذلك بأن البسط هو مضاعف a، وعليه، سيبقى متاحا

على الدوام اختصار الثابت a.

مثال 1 EXAMPLE 1

حلل عامليا $5x^2+8x+3$

لدينا:

$$5x^2+8x+3=\frac{(5x)(5x+z)}{5}$$

حيث $y+z=8$، $yz=(5)(3)=15$. إن تحليل الحد الثابت 15 يظهر بأن الأزواج المكنة من العددين y، z والذي يكون حاصل ضربها 15، هي: (15،1)، (15-،1-)، (5،3)، (3-،5-)، ولكن نظراً لان مجموعهما ينبغي أن يكون 8، فإن الخيار الوحيد المكن لمجموعة y، z هو 5، 3. وعليه

$$5x^2+8x+3=\frac{(5x+5)(5x+3)}{5}=\frac{5(x+1)(5x+3)}{5}$$
$$=(x+1)(5x+3)$$

مثال 2 EXAMPLE 2

حلل عامليا $^2+5x-6$

لدينا، $(6x^2+5x-6)=\frac{(6x+y)(6x+z)}{6}$، حيث $y+2=5$ وأن $yz=(6)(-6)=-36$. إن تحليل حاصل الضرب yz وهو 36-، يظهر بأن الأزواج المكنة للعدين اللذين حاصل ضربهما 36– هي: (36،1-)، (1-،36)، (18،2-)، (2،18-)، (12،3-)، (3،12-)، (9،4-)، (4-،9)، (6،6-). ولكن بسبب كون المجموع الجبري لكل من z، y ينبغي أن يكون 5+، سيكون لدينا المجموعة الوحيدة المكنة هي (9،4-). وعليه:

$$6x^2+5x-6=\frac{(6x+9)(6x-4)}{6}=\frac{3(2x+3)2(3x-2)}{6}$$
$$=(2x+3)(3x-2)$$

فإذا كانت $a=1$، سيكون لدينا الصيغة الأبسط x^2+bx+c. إذن:

$$x^2+bx+c=\frac{(1x+y)(1x+z)}{1}=(x+y)(x+z)$$

حيث $y+z=b$، $yz=c$.

مثال 3 EXAMPLE 3

حلل عامليا x^2-4x-5

لدينا: $x^2-4x-5=(x+y)(x+z)$ حيث $y+2=-4$، $yz=-5$.

إذن، الزوجين المكنين من العددين هي: (5،1-)، (5-،1)، ولكن بسبب كون المجموع الجبري يساوي 4- فإن المجموعة المكنة الوحيدة هي 5-، 1+. وعليه، $x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$. إن هذه التقانة قابلة للتطبيق، أيضاً، على حلول المعادلات التربيعية، يعني، معادلات بصيغة $ax^2+bx+c=0$.

مثال 4 EXAMPLE 4

حل المعادلة $2x^2-7x-4=0$

في البداية سنحلل عامليا $2x^2-7x-4=0$. إذن $2x^2-7x-4=\frac{(2x+y)(2x+z)}{2}$ حيث $y+z=-7$، وان $yz=-8$.

وبسبب كون حاصل ضربهما 8-، فقد وجدنا بأن الأزواج المكنة هي:

(8،1-)، (8-،1)، (4،2-)، (4-،2). كذلك بسبب كون حاصل الجمع الجبري لهما يساوي 7-، فإن المجموعة المكنة الوحيدة هي (8-،1).

إذن

$$2x^2-7x-4=\frac{(2x-8)(2x+1)}{2}=(x-4)(2x+1)$$

لذا فإن لدنيا:

$$2x^2-7x-4=(x-4)(2x+1)=0$$

وإن جذور هذه المعادلة التربيعية ستكون (4، 1\2-).

إن من الضروري بالنسبة للطلبة فهم بأنه لا توجد ثمة ضمانة بأن "أي" ثلاثي حدود يمكن تحليله، فمثلا: $5x^2-5x-7$، x^2-5x-6 لا يقبلان التحليل!.

التقييم اللاحق Postassessment

إن الطلبة الذين حققوا أهداف الأداء ينبغي أن يكون قادرين الآن على إنجاز التمارين الآتية:

1. حلل عامليا ثلاثيات الحدود الآتية:

(أ) $x^2-8x+12$ (ب) $4x^2+4x-3$

(ج) $x^2+10x+25$ (د) $3x^2-5x$

(هـ) $2r^2+13r-7$ (و) $9m^2-1$

2. حل المعادلات التربيعية الآتية:

أ- $x^2-3x-4=0$

ب- $6x^2+x=2$

مرجع Reference

Posamentier, A.S., and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

78 حل المعادلات التربيعية Solving Quadratic Equations

تعرض هذه الوحدة أربعة طرائق جديدة لحل المعادلات التربيعية

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بحل معادلة تربيعية محددة بأربعة طرائق مختلفة على الأقل.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل المعادلة:

$x^2 - 7x + 12 = 0$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن نسبة كبيرة من طلبتك قد حلوا المعادلة أعلاه بطريقة التحليل العاملي يعني. لغرض حلها فقد لجأوا إلى إجراء العمليات الآتية:

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$
$$(x-3)(x-4) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad | \quad x - 4 = 0$$
$$x = 3 \quad | \quad x = 4$$

لا يمكن أن تستخدم هذه الطريقة لحل جميع أنواع المعادلات التربيعية. إذا كانت ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ من نوع المعادلة $ax^2 + bx + c=0$ غير قابلة للتحليل، بعدئذ لا يمكن استخدام هذه الطريقة لحل المعادلة.

سيعالج بقية الدرس موضوع تطوير أربعة طرائق جديدة لحل المعادلات التربيعية.

إكمال المربع Completing The Square

تأمل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$، حيث a، و b، و c أعداد صحيحة وأن قيمة $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

أضف مربع نصف معامل x إلى الطرفين:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

خذ الجذر التربيعي للطرفين:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وهذه هي صيغة المعادلة التربيعية.

مثال Example: حل المعادلة $x^2 - 7x + 12 = 0$.

$$x^2 - 7x + (\frac{-7}{2})^2 = -12 + (\frac{-7}{2})^2$$

$$(x - \frac{7}{2})^2 = -12 + \frac{49}{4} = \frac{-48+49}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \mp\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{7}{2} \mp \frac{1}{2} \qquad x = 3,4$$

تقسيم الفرق Splitting The Difference

لتكن x_1، x_2 جذري المعادلة المعلومة $ax^2 + bx + c = 0$.

بعدئذ، $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ أو $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

ونحن على علم بأن مجموع الجذرين

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

وأن حاصل ضرب الجذرين $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. دع $x_1 = \frac{-b}{2a} + N$

حيث N أي عدد قياسي، وأن $x_2 = \frac{-b}{2a} - N$.

بعدئذ سيكون حاصل ضرب الجذرين

$\frac{c}{a} = x_1 . x_2 = \left(\frac{-b}{2a} + n\right) + \left(\frac{-b}{2a} - N\right)$ ، وعند الحل بالنسبة لـ N، نحصل على: $N = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

وعليه فإن الجذرين هما:

$$x = \frac{-b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال Example: حل المعادلة $x^2 - 7x + 12 = 0$.

سيقوم الطلبة باعتبار أن مجموع الجذرين $x_1 + x_2 = 7$. وعليه فإن أحد الجذرين ينبغي أن يساوي $\frac{7}{2}+N$، بينما يكون الثاني $\frac{7}{2}-N$، حيث تمثل N أي عدد نسبي.

بما أن ناتج الجذور هو 12، فإن

$x_1x_2 = (\frac{7}{2}+N)(\frac{7}{2}-N) = \frac{49}{4} - N^2 = 12$ ، وعليه فإن $N^2 = \frac{1}{4}$ ، وان $N = \pm 1/2$.

إذن الجذور هي :

$$x_1 = \frac{7}{2} + N = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{7}{2} - N = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$$

طريقة المعادلات الآنية

Method of Simultaneous Equations

بدلا من تطوير الحالة الأولى ينبغي أن نباشر ،أولاً، حل المعادلة $x^2-7x+12=0$. إن هذا الترتيب سيكون أكثر سهولة لمتابعة هذه الطريقة.

مثال Example:

حل المعادلة $x^2 - 7x + 12 = 0$.

تأمل مجموع وحاصل ضرب الجذرين $x_1 + x_2 = 7$، $x_1 x_2 = 12$. قم بتربيع المجموع $(x_1 + x_2)^2 = 49$.

اضرب حاصل بـ 4 -: $-4x_1 x_2 = -48$

بالإضافة $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 49 - 48 = 1$.

ولكن، يمكن تبسيط الجانب الايسر في المعادلة إلى : $(x_1 - x_2)^2$ وعليه فإن $x_1 - x_2 = \mp\sqrt{1} = \mp 1$. تذكر بأن $x_1 + x_2 = 7$.

والآن بحل هذه المعادلات آنيا:

$2x_1 = 8 \qquad x_1 = 4 \qquad x_2 = 3$

إن الحالة العامة للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ سيكون:

مربع مجموع الجذرين

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

وإن حاصل ضرب الجذرين بـ 4- سيكون $-4x_1x_2 = \frac{-4c}{a}$

وكما فعلنا في مراحل سابقة، سنقوم بجمع آخر معادلتين:

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

وعليه:

$$x_1 - x_2 = \mp\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$$

بما أن $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

$$x_1 \text{ أو } x_2 = \frac{1}{2}(\frac{-b}{a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

طريقة اختزال الجذور Method of Root Reduction

ومرة أخرى نبتدئ المناقشة بحل معادلة محددة قبل أن نأخذ الصيغة العامة بعين الاعتبار.

مثال Example:

حل المعادلة $x^2-7x+12=0$

افترض $r=x-n$، بعدئذ $x=r+n$، وأن: $x^2=(r+n)^2=r^2+2rn+n^2$. والآن سنقوم بتعويض القيم المناسبة في المعادلة الاصلية.

$$(r^2+2rn+n^2)-7(r+n)+12=0$$
$$r^2+r(2n-7)+(n^2-7n+12)=0$$

إذا كانت $2n-7=0$ بعدئذ سيكون حد r باطلا. وسيحصل هذا عندما تكون $n=\frac{7}{2}$.

بعد هذا سيكون لدينا $r^2+(n^2-7n+12)=0$ ،أو بواسطة التعويض $n+\frac{7}{2}$: $r^2+(\frac{49}{4}-7(\frac{7}{2}))+12=0$

$r^2 = \frac{49}{4} - 12 = \frac{1}{4}$ ، وأن $r = \mp\frac{1}{2}$ وعليه فإن الجذرين $(x=r+n)$ هي:

$$x_1 = +\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4 \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3$$

وستستمر الحالة العامة بنفس الطريقة. خذ بعين الاعتبار المعادلة $ax^2+bx+c=0$. دع $r=x-n$، بعدئذ $x=r+n$، وأن $x^2=(r+n)^2=r^2+2rn+n^2$

والآن عوض هذه القيم في المعادلة الاصلية.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$(r^2+2rn+n^2) + \frac{b}{a}(r+n) + \frac{c}{a} = 0$$

أو

$$r^2 + r(2n + \frac{b}{a}) + (n^2 + \frac{bn}{a} + \frac{c}{a}) = 0$$

ولغرض إبطال الحد r، سنقوم بما يأتي :

$$2n + \frac{b}{a} = 0 \quad \text{أو} \quad n = \frac{-b}{2a}$$

وسينتج عن هذا :

$$r^2+(n^2+\frac{b}{a}n+\frac{c}{a})=0$$

أو $r^2=-(n^2+\frac{b}{a}n+\frac{c}{a})$

ولكن، بما أن $n=\frac{-b}{2a}$

$$r^2=-(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a^2}+\frac{c}{a})$$

$r^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ وأن $r=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

وعليه، بما أن $x=r+n$، $x=\frac{-b}{2a}\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

أو: $x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

بالرغم من أن بعض هذه الطرق المستخدمة في حل المعادلات التربيعية تمتاز بكونها غير عملية إلى حد كبير، لكنها توفر للطلبة فهما افضل لكثير من المفاهيم الأساسية.

التقييم اللاحق Posassessment

اسأل الطلبة استخدام، على الأقل، أربعة من الطرق التي عرضت في هذا الدرس لحل المعادلات الآتية:

1. $x^2-11x+30=0$
2. $x^2+3x-28=0$
3. $6x^2-x-2=0$

79 الخوارزمية الأقليدية The Euclidean Algorithm

تعرض هذه الوحدة طريقة لتعريف الطلبة على الخوارزمية الاقليدية، وذلك لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء عددين صحيحين، سيقوم الطلبة باحتساب القاسم المشترك الأكبر لهما، وبصرف النظر عن قيمة هذين العددين.
2. بعد احتساب القاسم المشترك الأكبر، سيكون الطلبة قادرين على وصفه بدلالة العددين الصحيحين.

التقييم السابق Preassessment

اسأل الطلبة كيف سيقومون بوزن 12 أونس، 2 أونس، 3 أونس، 4 أونس، 1 أونس و 11 أونس باستخدام مجموعة تتألف من كفتي ميزان واوزان مقدارها 5 و 7 أونس فقط؟.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على اقتراح وزن الاوزان بالأسلوب الآتي:

أ. 12 أونس: ضع قطعة زنة 5 أونس وقطعة زنة 7 أونس على إحدى كفتي الميزان، حيث يمكن وزن 12 أونسا على الكفة الثانية.

ب. 2 أونس: ضع قطعة زنة 7 أونس على إحدى كفتي الميزان وقطعة زنة 5 أونس على الكفة الثانية. بعدئذ سنحصل على وزن القطعة المطلوبة والبالغة 2 أونس بعد وضع المادة على كفة الميزان التي تحوي قطعة 5 أونس بحيث تتساوى كفتا الميزان.

ج. 3 أونس: ضع قطعتين زنة 5 أونس في الكفة الأولى من كفتي الميزان، وضع قطعة زنة 7 أونس على الكفة الثانية. بعدئذ سنحصل على وزن القطعة المطلوبة والبالغة 3 أونس بعد وضع المادة على كفة الميزان التي تحوي قطعة 7 أونس بحيث تتساوى كفتا الميزان.

د. 4 أونس: ضع قطعتين زنة 5 أونس في الكفة الأولى من كفتي الميزان، وقطعتين زنة 7 أونس على الكفة الثانية. بعدئذ سنحصل على وزن القطعة المطلوبة والبالغة 4 أونس بعد وضع المادة على كفة الميزان التي تحتوى قطعتي 5 أونس بحيث تتساوى كفتا الميزان.

هـ. 1 أونس: ضع ثلاثة قطع زنة 5 أونس على إحدى كفتي

الميزان، وضع قطعتين زنة 7 أونس على الكفة الثانية. بعدئذ سنحصل على وزن القطعة المطلوبة والبالغة 1 أونس بعد وضع المادة على كفة الميزان التي تحتوي على قطعتي 7 أونس بحيث تتساوى كفتا الميزان.

و. 11 أونس: ضع خمسة قطع زنة 5 أونس على إحدى كفتي الميزان، وضع قطعتين زنة 7 أونس على الكفة الثانية. وسيكون الوزن المطلوب عندما تضعه على كفة قطعتي 7 أونس وستتعادل كفتي الميزان.

بعد ذلك ينبغي أن يكلف الطلبة وزن 1، 2، 3، 4 أونس باستخدام مجموعة أخرى من الأوزان المحددة. وسيصبحون، بعد فترة قصيرة، قادرين على اكتشاف أن الأوزان الأصغر التي يمكن وزنها باستخدام مجموعة من الأوزان المعلومة يساوي القاسم المشترك الأكبر (ق.م.أ) للوزنين:

الأوزان المعلومة	ق.م.أ	الأقل وزنا
2،3	1	1
2،4	2	2
3،9	3	3
8،20	4	4
15،25	5	5

إن القاسم المشترك الأكبر لكل من A، و B سوف يرمز إليه إما بـ (ق.م.أ لـ A، B) أو (A,B).

لغرض إيجاد (945,219) نستطيع استخدام الخوارزمية الاقليدية.

ترتكز الخوارزمية الاقليدية إلى نتيجة تنص على: إن A و B هما عددان صحيحان وان A لا تساوي صفرا. إذا قسم B على A سيكون لدينا حاصل القسمة Q والمتبقي R (B=QA+R)، بعدئذ (A,R) = (B,A). وباستخدام الطريقة الإجرائية الآتية يمكن إيجاد (ق.م.أ) للعددين 945 و 219:

قسم 945 بواسطة 219: $945=(4)(219)+69$ (1)

قسم 219 بواسطة 69: $219=(3)(69)+12$ (2)

والآن استمر بهذه العملية :

$69=(5)(12)+9$ (3)

$12=(1)(9)+3$ (4)

$9=(3)(3)+0$ لحين تصبح R مساوية للصفر.

وعليه، فإن ق.م.أ لكل من 945 و 219 هو 3، وهو المتبقي الأخير من عمليات القسمة المتكررة والذي لا يساوي صفرا. يمكن أن تستخدم هذه الطريقة لإيجاد (A,B) بحيث يكون A، و B أي عددين صحيحين. ليقم الطلبة بالتمرن على هذه الخوارزمية بواسطة بعض التمارين قبل الاستمرار بالدرس.

بالنسبة للطلبة المجتهدين في الصف (أو لاهتمامك الشخصي فحسب) فقد تم توفير برهان على هذه الخوارزمية. ويظهر أدناه بيان وبرهان "الخوارزمية الاقليدية": بالنسبة لأي عددين صحيحين a، b لا يساويان صفرا، قم بتقسيم a بواسطة b لتحصل على المتبقي r_1، وقسم b على r_1 لتحصل على المتبقي r_2. واستمر بهذه العملية بحيث عندما يقسم المتبقي r_K بواسطة r_{K+1} يمكن الحصول على المتبقي r_{K+2}. وفي آخر الأمر، سيكون هناك r_n بحيث أن $r_{n+1}=0$. يعقب ذلك أن $\{r_n\}$ هو القاسم المشترك الأكبر لكل من a، b.

البرهان Proof:

ستحدد خوارزمية القسمة Division Algorithm الأعداد الصحيحة q_1، r_1، q_2، r_2، q_3، r_3، .... حيث

$$a=q_1b+r_1$$
$$b=q_2r_1+r_2$$
$$r_1=q_3r_2+r_3$$
.
.
.

وحيث $|b| > r_1 > r_2 > r_3 > ...... \geq 0$. هناك فقط $|b|$ من الأعداد الصحيحة غير السالبة التي تقل عن $|b|$. وعليه ينبغي أن يكون هناك $r_{n+1}=0$ بالنسبة لـ $n+1 \leq |b|$. وإذا كانت $r_1=0$ فإن $(a,b)=b$. وإذا كان $r_1 \neq 0$ فإن:

$$a=q_1b+r_1$$
$$b=q_2r_1+r_2$$
$$r_1=q_3r_2+r_3$$
.
.
.
$$r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n$$
$$r_{n-1}=q_{n+1}r_n$$

دع $d=(a,b)$. بما أن $d|a$ و $d|b$ بعدئذ $d|r_1$. بنفس الطريقة، بما أن $d|b$ و $d|r_1$، بعدئذ $d|r_2$. مرة أخرى، بما أن $d|r_1$ و $d|r_2$ بعدئذ $d|r_3$. بالاستمرار على هذا المنوال سنحصل في آخر الأمر على $d|r_{n-2}$ و $d|r_{n-1}$، بعدئذ $d|r_n$.

نظراً لان $r_n \neq 0$، $r_n|r_{n-1}$. كذلك $r_n|r_n$، وعليه فإن $r_n|r_{n-2}$. و بنفس الأسلوب، $r_n|r_{n-3}$ ، $r_n|r_{n-4}$، ....، $r_n|r_2$، $r_n|r_1$، $r_n|b$، $r_n|a$. بما أن $r_n|a$، $r_n|b$، عليه $r_n|d$. إذن، $r_n|d$ وكذلك $d|r_n$، ويعقب ذلك $r_n=d$ أو $r_n=(a,b)$.

عند هذه المرحلة يبدو لطيفا بأن نكون قادرين على وصف ق.م.أ لعددين صحيحين بدلالة العددين، أي، $(A,B)=MA+NB$، حيث M، N هما عددان صحيحان: في الحالة المبكرة (945,219)، $3=M(219)+N(945)$. وبالعمل في اتجاه عكسي (نحو الخوارزمية الاقليدية)، نستطيع إنجاز ما يأتي:

من السطر (4) أعلاه: $3 = 12 - 9$

بتعويض 9 في السطر (3) أعلاه:

$3=12-(69-5.12), 3=6.12-69$

بتعويض 12 في السطر (2):

$3=6(219-3.69)-69$

بتعويض 69 في السطر (1):

$3 = 6.219-19(945-4.219)$ أو

$3 = 82(219)-19(945)$

في مرحلة مبكرة احتسب الطلبة الحد الأدنى الذي يمكن وزنه بواسطة الأوزان 945 أونس و 219 أونس عن طريق إيجاد (945,219) والآن اصبحوا قادرين على تحديد عدد قطع 945 أونس التي يجب وضعها على إحدى كفتي الميزان، وكم عدد قطع 219 أونس التي يجب وضعها على الكفة الثانية، عن طريق وصف (945,219) بدلالة 945 و 219. يعني، ينبغي عليهم أن يضعوا 82 قطعة من زنة 219 انس، على إحدى الكفتين، و 19 قطعة زنة 945 أونس على الكفة الثانية. وسيكون الوزن الذي حين إضافته إلى كفة قطع 945 أونس ستتكافئ كفتا الميزان، وهو الوزن المطلوب. يمكن استخدام هذا الأسلوب لتطوير فهم معادلات دايوفانتين Diophantine Equations.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حساب ق.م.أ لأزواج الأعداد الصحيحة الآتية ووصف ق.م.أ بدلالة العدديين الصحيحين.

1. 12، 18
2. 52، 86
3. 865، 312
4. 120، 380.



الأعداد الأولية
Prime Numbers

ستعرض هذه الوحدة للطبلة الحقائق الآسرة التي تخص الأعداد الأولية.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء عدد ما، سوف يستخدم الطلبة دالة اويلر Euler's ϕ Function لإيجاد عدد الأعداد الصحيحة التي تقل عن العدد المعلوم والتي تكون نسبيا فاتحة له.
2. سيوضح الطلبة سبب إمكانية وجود متعدد حدود بعوامل تامة والذي سيولد أعداد أولية فحسب.

التقييم السابق Pressment

أسال الطلبة تمييز أي مما يأتي يعد عددا أولياً:

(أ) 11 (ب) 27 (ج) 51 (د) 47 (هـ) 91 (و) 1

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استغرق الرياضيون سنينا طوال بمحاولة إيجاد صيغة عامة تستطيع توليد أعداد أولية. وهناك الكثير من المحاولات بهذا الاتجاه، لكن أيا منها لم تظفر بفرصة للنجاح في تحقيق غايتها.

ليقم الطلبة باختيار الصيغة $n^2 - n + 41$ بواسطة تعويض قيم موجبة مختلفة للمتغير n. اصنع جدولا على السبورة ودوّن فيه ما حصل عليه الطلبة في عمليات التعويض المختلفة. وعندما سيستمر الطلبة بعملهم سيبدأون بملاحظة أنه عندما تتراوح قيمة n من 1 لغاية 40، في تلك الحالة فقط تنتج الأعداد الأولية. (إذا لم يعوضوا القيمة n=40، دعهم يعملون على تعويضها). بعدئذ اطلب منهم محاولة n=41، وستكون نتيجة $n^2 - n + 41$ هي $(41)^2-41+41=(41)^2$ وهو ليس عدداً أولياً. إن صيغة مشابهة، $n^2-79n+1601$ تنتج أعداد أولية لجميع قيم n لغاية 80. ولكن في حالة n=81، سيكون لدينا:

$(81)^2-79.81+1601= 1763= 41 \cdot 43$ والذي لا يعد أولياً.

قد يتساءل الطلبة الآن إذا كانت هناك إمكانية للحصول على متعدد حدود في n وبمعاملات صحيحة والذي تكون قيمه أولية لكل عدد صحيح موجب n. انصح الطلبة بمحاولة إيجاد مثل هذه الصيغة: برهن ليونادر اويلر (1707-1783) Leonhard Euler على عدم وجود مثل هذه الصيغة. لقد بين اويلر بأن أي

صيغة مقترحة سوف تنتج عددا غير أولي – واحد على الأقل.

وسوف يأتي برهان اويلر. أولاً، افترض وجود مثل هذه الصيغة، وتكون بالصيغة العامة $a+bx+cx^2+dx^3+\dots$ (مدركين بأن هناك بعض المعاملات التي قد تساوي صفرا). لتكن قيمة هذه الصيغة s عندما تكون $x=m$.

وعليه فإن $s=a+bm+cm^2+dm^3+\dots$. وبنفس الطريقة لتكن t قيمة هذه الصيغة عندما تكون $x=m+ns$،

$$t=a+b(m+ns)+c(m+ns)^2+d(m+ns)^3+\dots$$

ويمكن أن تعاد صياغتها إلى :

$$t=(a+bm+cm^2+dm^3+\dots)+A$$

حيث تمثل A الحدود المتبقية التي تعد جميعها مضاعفات s. ولكن الصيغة بين الأقواس هي، حسب الفرضية، تساوي s. إن هذا الأمر يجعل الصيغة بأجمعها مضاعفا لـ s، وأن العدد الذي سينتج عنها لن يكون أولياً، إن كل صيغة مماثلة سوف ينتج عنها عددا أولياً واحدا، وليس بالضرورة أن يكون أكثر من واحد. وهكذا، لا توجد صيغة تستطيع توليد أعداد أولية على وجه الحصر.

ورغم أن العبارة الأخيرة قد أدركت في مرحلة مبكرة من تاريخ الرياضيات، فلقد استمر الرياضيون بالتنقيب عن صيغ للأعداد تنتج أعداد أولية فقط.

ذهب العالم بيير دي فيرمي Pierre de Fermat (1601-1665)، والذي كانت لديه مساهمات واضحة في ميدان دراسة نظرية العدد، إلى أن الأعداد ذات الصيغة $F_n=2^{2n}+1$، حيث $n=1, 2, 3, 4, \dots$ تعد أعداد أولية. ليقم الطلبة بإيجاد F_n بالنسبة لقيمة $n=0, 1, 2$. وسيجدون بأن الأعداد الثلاثة الأولى التي اشتقت من هذه الصيغة هي 17,5,3. بالنسبة للقيمة $n=3$، وسيجدون بأن $F_n=257$، وبإخبارهم أن $F_4=65,537$، عليهم أن يلاحظوا بأن هذه الأعداد تزداد بمعدلات سريعة بالنسبة للقيمة: $n=5$، $Fn=4, 294, 967, 297$، وان فيرمات لم يستطع العثور على أي عامل لهذا العدد. وقد تشجع بهذه النتيجة، فذهب إلى بيان رأيه الذي نص فيه على أن جميع الأعداد بهذه الصيغة هي بالتأكيد أولية أيضاً. ولسوء الحظ فقد توقف بصورة مبكرة جدا، لان اويلر برهن عام 1732 بأن:

$$F_5=4,269,967,297=641\times6,700,417$$

(ليس عددا أولياً!) ولم تكتشف إلا بعد 150 عاما عوامل F_6:

$$18,446,744,073,709,551,617=247,177\times67,280,421,310,721$$

وبقدر ما توفرت معرفة رياضية في هذا الوقت، فقد تم اكتشاف عدد كبير من الأعداد بهذه الصيغة، ولكن أي منهم لم يكن أولياً. ويبدو بأن حدس فيرمات قد ارتد على أعقابه، وان المرء يتساءل الآن إذا توفر أي عدد أولي وراء F_4.

وقد استمر اويلر بالتعمق في دراسته للأعداد الأولية. فبدأ بامتحان الأعداد الصحيحة التي تعد أولية نسبيا (يعد العددان الصحيحان أوليان نسبيا إذا لم يمتلكا عاملا مشتركا موجبا باستثناء 1).

ليدون الطلبة العدد 12، والأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عنه. اخبر الطلبة بشطب 12 ذاته، وبعدئذ جميع الأعداد الصحيحة التي تمتلك عاملا أكبر من 1 مشتركا مع 12.

1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~

سيشاهد الطلبة بأن الأعداد الصحيحة 1، 5، 7، 11 هي الأعداد الوحيدة المتبقية. وعليه، هناك أربعة أعداد صحيحة تقل عن 12 والتي تعد أولية بالنسبة له. إن العدد من هذه الأعداد الصحيحة يرمز له بالرمز $\phi(n)$ وتعرف ϕ بدالة اويلر Euler's. بالنسبة $n=1$، وسيكون لدينا $\phi(n)=1$ بالنسبة $n>1$، $\phi(n)$ = عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن n وتكون أولية نسبيا بالنسبة لها. إذن، كما لاحظنا آنفا $\phi(12)=4$. والآن دع الطلبة يجدون قيم $\phi(n)$ بالنسبة للمتغير $n=1, 2, 3, 4, 5$.

إن جدولا كما في الشكل 1 أدناه سيكون مناسبا لذلك.

ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأنه عندما يكون n عددا أولياً، فليس من الضروري إدراج جميع الأعداد. وبما أن العدد الأولي هو أولي نسبيا بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عنه، لذا سيكون لدينا $\phi(n)=n-1$ بالنسبة للعدد الأولي n.

n	الأعداد الصحيحة الأولية نسبيا إلى وتقل عن n												φ(n)
1													1
2	1	2											1
3	1	2	3										2
4	1	2	3	4									2
5	1	2	3	4	5								4
6	1	2	3	4	5	6							2
7	عدد أولي												6
8	1	2	3	4	5	6	7	8					4
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9				6
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			4
11	عدد أولي												10
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	4

ليستمر الطلبة بإيجاد $\phi(n)$ بالنسبة لـ n=6 إلى 12. بالنظر إلى اسفل العمود $\phi(n)$، لا يبدو أمامنا أي نسق محدد. ورغم ذلك، قد تغزونا الرغبة بالحصول على الصيغة للحد العام، بحيث أن $\phi(n)$ يمكن حسابها بالنسبة لأي عدد. لقد بينا سابقا بأنه إذا كانت n عددا أولياً، بعدئذ ستكون:

$\phi(n) = n-1$. ولغرض العثور على صيغة بالنسبة لـ$\phi(n)$ إذا لم تكن n عددا أولياً، سوف نوجه انظارنا صوب حالة محددة.

افترض n=15. وبتجزئة 15 إلى أعداد أولية، سنحصل على $15=3 \bullet 5$. نستطيع كتابة ذلك بصيغة n=p.q، حيث n=15، p=3. q=5. بعد ذلك ليقم الطلبة بكتابة 15 وجميع الأعداد الصحيحة التي تقل عنه. ثم ليقوموا بشطب جميع الأعداد الصحيحة التي فيها 3 (والتي تمثل p) كعامل:

1 2 ~~3~~ 4 5 ~~6~~ 7 8 ~~9~~ 10 11 ~~12~~ 13 14 ~~15~~

وسيجد الطلبة بأن هناك منهم $\frac{n}{p}=\frac{15}{3}=5$. وهناك 10 أعداد صحيحة متبقية أو $10=15-\frac{15}{3}=n-\frac{n}{p}=n(1-\frac{1}{p})$ ومن خلال هذه الأعداد العشرة – الصحيحة دع طلبتك يشطبون الأعداد التي تحوي 5 (والتي تمثل q) كعامل:

1 2 4 ~~5~~ 7 8 ~~10~~ 11 13 14

وهناك اثنان فقط من هؤلاء أو $2=\frac{1}{5}(10)=\frac{1}{q}\left[n(1-\frac{1}{p})\right]$.

والآن تبقى 8 أعداد

$8=10-\frac{1}{15}(10)=n(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{q}\left[n(1-\frac{1}{p})\right]$. إن الحد $n(1-1/p)$ هو معامل لكل من حدي الصيغة. وعليه فقد قمنا بإنشاء صيغة لعدد من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن n وتعد أولية نسبيا بالنسبة له.

$$\phi(n) = n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})$$

إن العدد n، قد يمتلك أكثر من معاملين في تحليله الأولي، لذا دعنا الآن نبين أكثر من صيغة عامة (دون برهان). افترض بأن العدد n يحلل إلى عوامله الأولية 10 ,9 ,r, ..., w بعدئذ $n=p^a.q^b.r^c \ldots.w^h$، حيث a، b، c، ...، h هي أعداد صحيحة موجبة (والتي قد تكون أو لا تكون جميعا 15). بعدئذ،

$$\phi(n) = n(1-1/p)(1-1/q)(1-1/r) \ldots\ldots (1-1/w)$$

ينبغي على المدرس، أيضاً، أن يبين إذا كانت n عددا أولياً فإن الصيغة ستبقى سارية المفعول، نظراً لأن

$$\phi(n)=n-1=n\frac{(n-1)}{n}=n(1-\frac{1}{n})$$

ولمتابعة كيفية تطبيق الصيغة بمصاحبة الطلبة، ولإيجاد الآتي: $\phi(21)$، $\phi(43)$، $\phi(78)$.

الحلول Solution

$$\phi(21) = \phi(7.3) = 21(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{3}) = 21$$

$$(\frac{6}{7})(\frac{2}{3}) = 12$$

$\phi(43) = 43-1$ = 42 (بما أن 43 عدد أولي)

$$\phi(78) = \phi(2.3.13) = 78\ (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3}) = (1-\frac{1}{13}) =$$

$$78(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(\frac{12}{13}) = 24$$

عند هذه النقطة، قد يلاحظ بعض الطلبة بأن أي قيمة لـ $\phi(n)$ تكون زوجية. وان تبرير ذلك سيؤدي دور منصة الوثب باتجاه تحريات أكثر تفصيلا.

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد كل مما يأتي:

   (أ) $\phi(13)$

   (ب) $\phi(14)$

   (ج) $\phi(48)$

   (د) $\phi(100)$

2. ليوضح الطلبة سبب عدم وجود متعدد حدود بمعاملات عددية صحيحة والذي سيولد أعداد أولية فقط.

81 مغالطات جبرية Algebraic Fallacies

يرتكب غالبية الطلبة أخطاء متعددة عند إنجاز واجباتهم الرياضية، والتي تكون أكثر شيوعا من الأخطاء التي يرتكبونها في حساباتهم، أو بقية الأفعال التي لا يولونها اهتماما كافيا. ولتجنب الأخطاء التي تعد نتيجة لتجاوز حدود التعاريف الرياضية والمبادئ، فإن من الحكمة عرض هذا النوع من الخلل سلفاً. إن هذا الهدف الحيوي هو المهمة الأساسية التي خصصت لهذه الوحدة.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء غلطة جبرية محددة، سيقوم الطلبة بتحليل، وتحديد موطن نشوب الغلط في البرهان الجبري.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالعمليات الجبرية الأساسية والتي يغلب تعليمها في المساق الدراسي للجبر الأولي في المدارس الثانوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

عندما لا تفهم الجوانب النظرية التي تكمن وراء العمليات الرياضية بصورة جيدة، فسوف توجد أكثر من إمكانية لتطبيق العمليات في سياقات، وطرق غير منهجية، أو منطقية. إن غياب المعرفة الكافية لدى الطلبة بالمحددات التي تشخص أمام هذه التطبيقات، سيحدو بهم إلى استخدامها، وتوظيفها بميادين لا تنطبق عليها. إن مثل هذه الاستنتاجات الخاطئة سوف ينجم عنها نتيجة منافية للعقل Absurd يطلق عليها مغالطة Fallacy.

إن المظاهر المتناقضة الآتية سوف تعرض كيف أن مثل هذه المغالطة قد تبرز في مادة الجبر، عندما تنجز عمليات جبرية محددة، ودون وجود إدراك كافي للمحددات التي تشخص إزاء هذه العمليات.

إن جميع من تناول الجبر الأولي بالدراسة، لابد أن يمر من وقت أو آخر ببرهان يعالج مسألة 2=1 أو 1=3. إن مثل هذا "البرهان" هو مثال واضح على إحدى هذه المغالطات.

البرهان Proof:

1. افترض: $a = b$
2. اضرب الطرفين بـ a: $a^2 = ab$
3. اطرح b^2 من الطرفين: $a^2 - b^2 = ab - b^2$
4. حلل عامليا: $(a+b)(a-b) = b(a-b)$
5. قسم الطرفين على (a-b): $(a+b) = b$
6. بما أن a = b، بعدئذ: $2b = b$
7. تقسيم الطرفين على b نحصل: $2 = 1$

اسأل الطلبة تحليل "البرهان" وإيجاد الخلل في الاستنتاج. لاشك، بأن العقبة قد برزت في الخطوة الخامسة. بما أن a=b، بعدئذ a-b=0. وعليه، فقد تمت القسمة على صفر، وهو أمر "لا يجوز" فعله. إن من المناسب في هذا الوقت فتح باب مناقشة ماذا تعني القسمة بدلالة الضرب. إن التقسيم a بواسطة b يدل ضمنا على وجود عدد بحيث أن y=a.b أو $y=\frac{b}{a}$. إذا كان b=0، يظهر احتمالان، إما أن يكون a≠0 أو a=0. إذا كان a≠0، بعدئذ $y=\frac{a}{0}$ أو o•y =a. اسأل طلبتك إذا كانوا يستطيعون العثور على عدد عندما يضرب بـ 0 سوف يساوي a. وسوف يستنتج طلبتك بأن مثل هذا العدد y لا وجود له. وفي الحالة الثانية، حيث a=0، $y=\frac{0}{0}$، أو 0=0.y .

في هذه الحالة أي عدد بالنسبة لـ y سوف يحقق هذه المعادلة، نظراً لان أي عدد يضرب بالصفر تكون نتيجته صفرا. لذا ستكون لدينا "قاعدة Rule" بأن القسمة على صفر غير جائزة.

هناك مغالطات أخرى تستند إلى القسمة على صفر. دع طلبتك يكتشفون بأنفسهم، أين وكيف، تظهر الصعوبة في كل من الأمثلة الآتية.

1) لكي "تبرهن" بأن أي عددين غير متساويين هما متساويان. افترض أن x=y+z، وان x، y، z هي أعداد موجبة. إن هذا

يدل ضمنا على أن $x > y$. اضرب الطرفين بـ $x - y$، بعدئذ، $x^2-xy = xy+xz-y^2-yz$. اطرح xz من طرفي المعادلة:

$$x^2-xy-xz = xy-y^2-yz$$

باستخدام التحليل نحصل على،

$$x(x-y-z) = y(x-y-z)$$

بتقسيم الطرفين على $(x-y-z)$، ينتج: $x = y$.

إذن x التي افترضت أكبر من y، قد برهن على أنها تساوي y. لقد حدثت المغالطة في القسمة على $(x-y-z)$، والذي يساوي صفرا.

2) لكي "تبرهن" بأن جميع الأعداد الموجبة التامة تكون متساوية.

بإجراء القسمة الطويلة، سيكون لدينا، بالنسبة لأي قيمة لـ x:

$$\frac{x-1}{x-1}=1$$

$$\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$$

$$\frac{x^4-1}{x-1}=x^3+x^2+x+1$$

.

.

.

.

$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+......+x^2+x+1$$

بافتراض $x=1$ في جميع هذه المتطابقات، فإن الجانب الأيمن يفترض القيم: $1, 2, 3, 4, ..., n$. ويكون أعضاء الطرف الأيسر متماثلين، وهكذا $1=2=3=4=...=n$. وفي هذا المثال، فإن الطرف الأيسر لأي من المتطابقات يفترض القيمة $\frac{0}{0}$ عندما يكون $x=1$. إن هذه المسألة تعد شاهدا على أن $\frac{0}{0}$ يمكن أن يكون أي عدد من الأعداد.

تأمل الآتي، واسأل طلبتك إذ كانوا يوافقون على العبارة الآتية "إذا تساوى كسران وكان البسط متساويا فيهما، بعدئذ سيكون المقام فيهما متساويان أيضاً".

ليقم الطلبة بإعطاء توضيحات في استخدام أي كسور يميلون إلى اختيارها. بعدئذ ليباشروا بحل المعادلة الآتية:

$$6+\frac{8x-40}{4-x}=\frac{2x-16}{12-x} \qquad (1)$$

بإضافة حدود إلى الطرف الأيسر، للحصول على:

$$\frac{6(4-x)+8x-40}{4-x}=\frac{2x-16}{12-x} \qquad (2)$$

وبالتبسيط،

$$\frac{2x-16}{4-x}=\frac{2x-16}{12-x}$$

وبما أن البسطين متساويان، فإن هذا يعني $4-x = 12-x$ بإضافة x إلى الطرفين $4=12$. للمرة الثانية، كما في الأمثلة السابقة، فإن القسمة على صفر يعد أمرا مخادعا. ليقم الطلبة بإيجاد الخطأ. ينبغي أن يوضح بأن البديهيات لا يمكن أن تطبق بطريقة عمياء على المعادلات دون الأخذ بعين الاعتبار قيم المتغيرات التي تصح المعادلة بها. إذن، المعادلة (1) لا تعد تطابقا صادقا لجميع قيم x، ولكنها تتحقق فقط في حالة $x=8$. ليقم الطلبة بحل $(12-x)(2x-16) = (4-x)(2x-16)$ للتحقق من ذلك.

إذن $x=8$ يدل ضمنيا على أن القامين يساويان صفرا. تستطيع أيضاً أن تكلف الطلبة ببرهنة الحالة العامة بالنسبة لـ $\frac{a}{b}=\frac{a}{c}$، لبيان أن a لا يمكن أن تساوي صفرا.

إن صنفا آخر من المغالطات يتضمن تلك التي تغفل اعتبار إن كمية تمتلك جذران تربيعيان تتساوى قيمتهما المطلقة Absolute Value، ولكن احداهما موجب والثاني سالب. كمثال على ذلك، خذ المعادلة $16-48 = 64-96$. بإضافة 36 إلى كلا الطرفين سيكون لدينا $16-48+36 = 64-96+36$. إن كل عضو في المعادلة يعد الآن مربعا تاما، بحيث أن $(4-6)^2 = (8-6)^2$. بأخذ الجذر التربيعي للطرفين نحصل على $4-6 = 8-6$، والذي يدل ضمنا على أن $4 = 8$.

اسأل طلبتك عن مواطن حدوث المغالطة. إن المغالطة في هذا المثال تكمن في اخذ الجذر التربيعي غير المناسب. إن الجواب الصحيح ينبغي أن يكون $(8-6) = -(4-6)$.

إن المغالطات الآتية ترتكز إلى الفشل في اعتبار جميع جذور المسألة المعلومة. ليقم الطلبة بحل المعادلة $x+2\sqrt{x}=3$ بالأسلوب المعتاد. إن الحلين هما $x=1$، $x=9$. إن الحل الأول يحقق المعادلة، أما الثاني فلا يحققها. دع الطلبة يوضحون أين تكمن الصعوبة.

إن معادلة مشابهة هي $x-a=\sqrt{x^2+a^2}$. وبتربيع الطرفين والتبسيط نحصل على $-2ax=0$ أو $x=0$. بتعويض $x=0$ في المعادلة الأصلية، سنجد بأن هذه القيمة للمتغير x لا تحقق المعادلة. ليقم الطلبة بإيجاد الجذر الصحيح للمعادلة المعلومة.

لقد تعاملنا، حتى الآن، مع الجذور التربيعية للأعداد الموجبة. اسأل الطلبة ماذا حدث عندما قمنا بتطبيق قواعدنا المعتادة على جذور تحتوي على أعداد تخيلية، في ضوء المسائل الآتية. لقد تعلم الطلبة بأن $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$، على سبيل المثال، $\sqrt{5}.\sqrt{2}=\sqrt{5.2}=\sqrt{10}$، ولكن هذا يعطي فيما بعد، $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$. ولكن، $\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$. وعليه يمكن استنتاج بأن $-1 = 1$، لان كلا منهما يساوي $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$. يجب أن يحاول

الطلبة توضيح الخطأ، وينبغي أن يدركوا بأنهم لا يستطيعون تطبيق القواعد المألوفة على ضرب جذور الأعداد التخيلية.

إن برهانا آخر يمكن استخدامه لبيان 1+ = 1- هو كالآتي:

$$\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}}=\sqrt{\frac{-1}{1}}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{1}.\sqrt{1}=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$$

$$1=-1$$

ليقم الطلبة باستبدال i بدلا من $\sqrt{-1}$، و 1- بالنسبة لـ i^2 للوقوف على موطن حدوث الخلل.

قبل إنهاء الموضوع حول المغالطات الجبرية، يبدو مناسبا اعتبار مغالطة تتضمن معادلات آنية. وينبغي أن يدرك الطالب، منذ الآن. بأنه حال إنجاز البراهين السابقة يجب الخروج على قوانين أو قواعد محددة.

خذ بعين الاعتبار مثالا حيث تجلب المغالطات الخفية في المعادلات نتائج مضحكة!. ليقم الطلبة بحل زوج المعادلات الآتية بالتعويض عن x في المعادلة الأولى:

$2x+y=8$ وكذلك $x=2-\frac{y}{2}$. ستكون النتيجة 8 = 4. ليقم الطلبة بإيجاد الخطأ. وعندما سيقوم الطلبة برسم هاتين المعادلتين، سيجدون بأن المستقيمين متوازيان، وعليه لن تكون هناك نقطة مشتركة بينهما.

إن العرض الإضافي لمثل هذه المغالطات سوف يبرهن على نشاط يستحق الاهتمام بناء على الرسالة الحقيقية التي يحملها بين دفتيه.

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

ليقم الطلبة بتحديد أين وكيف نسأت المغالطة في الأمثلة الآتية:

(1) أ. $x=4$. a

ب. $x^2=16$

ج. $x^2-4x = 16-4x$

د. $x(x-4) = 4(4-x)$

هـ. $x(x-4) = -4(4-x)$

و. $x= -4$

(2) أ- $(y+1)^2 = y^2+2y+1$

ب. $(y+1)^2 - (2y+1) = y^2$

ج. $(y+1)^2- (2y+1)-y(2y+1)=y^2- y(2y+1)$

د. $= (y+1)^2 - (y+1)(2y+1) + \frac{1}{4} (2y+1)^2$

$y^2 - y(2y+) + \frac{1}{4} (2y+1)^2$

هـ. $[(y+1) -\frac{1}{2} (2y+1)]^2 = [y - \frac{1}{2}(2y+1)]^2$

و. $y+1 -\frac{1}{2} (2y+1) = y - \frac{1}{2} (2y+1)$

ز. $y+1 = y$

82 اشتقاق المجموع بواسطة المصفوفات
Sum Derivation with Arrays

أهداف الأداء Performance Objective

1- سيقوم الطلبة باشتقاق صيغة لحاصل جمع أول n من الأعداد الطبيعية، والأعداد المثلثية، والأعداد التربيعية، أو الأعداد الخماسية.

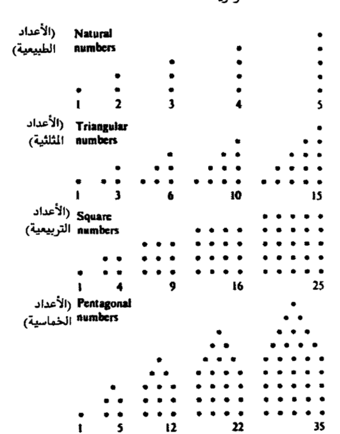
2- بإعطاء أي قيمة تامة للمتغير n، سيقوم الطلبة بتطبيق الصيغة المناسبة لإيجاد مجموع الأعداد الـ n الأولى الرمزية.

التقييم السابق Preassessment

قبل البدء بهذا الدرس، تأكد من أن طلبتك على معرفة كافية بمعاني الأعداد الرمزية Figurate Numbers ، وعملية تكوين سلسلة من الأعداد الرمزية. كذلك ينبغي أن يكون لديهم بعض المعرفة بالجبر الأولي.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

للمباشرة في زيادة معرفة الطلبة بهذا الموضوع، دعهم يباشرون إنشاء مصفوفات نقطية Dot Arrays على ورقة خطوط بيانية Graph Pages لتوضيح أوائل الاصطلاحات في سلسلة الأعداد الرمزية.



افتح باب المناقشة مع الصف حول العلاقات المرئية Visual Relationship. وسيلاحظ غالب الطلبة، بوضوح، إننا نستطيع وصف مجموع n من الأعداد الطبيعية كما يأتي:

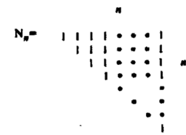
$N_n =$ مجموع n الأولى من الأعداد الطبيعية

$= 1 + 2 + 3 + ... + n$

$= 1 + (1+1) + (1+1+1) + ... + (1+1+1+.....+n)$

n

يمكن وصف N_n، أيضاً، بوصفها مجموع الأعداد في مصفوفة ما.



بنقل الصفوف ومبادلتها مع الأعمدة، فإن N_n ستبدو مختلفة لحد ما:

N_n=

إن هذين الوصفين للمتغير N_n في صيغة المصفوفة يمكن أن يربطا سوية الآن لإنتاج مصفوفة بالنسبة لـ $2N_n$ كما يعرض أدناه:

$2N_n$= (n+1)

يستطيع أن يشاهد الطلبة، بدقة، بأن $2N_n = n(n+1)$ عند فحص مصفوفة $2N_n$. وعليه سيكون لدينا:

$$N_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

إن هذه النتيجة المستحدثة لـ N_n يمكن تطبيقها حيثما ظهرت الحاجة لها لإيجاد مجموع n الأولى من الأعداد الطبيعية.

ليتأمل الطلبة محاولة اشتقاق صيغة بالنسبة للأعداد n الأولى من الأعداد المثلثية. ويبدو واضحا من المصفوفات النقطية التي عرضت مبكرا، بأن ما يأتي يمكن إنشاؤه بسهولة:

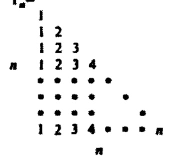
مجموع n الأولى من الأعداد المثلثية = Tn

$T_n =$ مجموع n الأولى من الأعداد المثلثية

$= 1 + 3 + 6 + ... + N_n$

$= 1 + (1+2) + (1+2+3) + ...+ (1+2+3+...+n)$

والآن يمكن وصف T_n كمجموع الأعداد الموجودة في مصفوفة



بتطبيق الصيغة التي تم تحديدها، سابقا، بالنسبة لـ N ولكل صف من صفوف هذه المصفوفة نحصل على:

$$T_n = \frac{1(1+1)}{2} + \frac{2(1+2)}{2} + \frac{3(1+2)}{2} + \frac{4(1+4)}{2} + \ldots\ldots + \frac{n(1+n)}{2}$$

ينبغي على الطلبة أن يلاحظوا:

$2T_n = 1(2) + 2(3) + 3(4) + 4(5) + \ldots\ldots + n(n+1)$

والتي يمكن تمثيلها في أسلوب مناسب جدا كمجموع الأعداد في مصفوفة

```
2Tn=  2 3 4 5 • • • (n+1)
        3 4 5 • • • (n+1)
          4 5 • • • (n+1)
            5 • • • (n+1)    n
              •       •
                •     •
                  •   •
                    (n+1)
```

إن الربط بين مصفوفة T_n ومصفوفة $2T_n$ ينتج عنه مصفوفة $3T_n$ والتي يسهل جمعها:

```
              (n+1)
3Tn=
     1 2 3 4 5 • • • (n+1)
     1 2 3 4 5 • • • (n+1)
     1 2 3 4 5 • • • (n+1)
     1 2 3 4 5 • • • (n+1)    n
     • • • • • •       •
     • • • •     • •   •
     • • • •       • • •
     1 2 3 4 • • • n (n+1)
```

إن صيغتنا بالنسبة لـ N_n ينتج عنها مباشرة:

$$3T_n = n\frac{(n+1)(1+[n+1])}{2}$$

$$\boxed{T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}}$$

أصبح الطلبة الآن جاهزين للأخذ بعين الاعتبار مجموع n الأولى من مربعات الأعداد.

مجموع n الأولى من مربعات الأعداد = S_n

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + n^2$

في شكل مصفوفة ستبدو هذه المعادلة كما يأتي:

```
                n
Sn=      1 2 3 4 • • • n
           2 3 4 • • • n
             3 4 • • • n
               4 • • • n    n
                 •     •
                   •   •
                     • •
                       n
```

ويربط المصفوفتين T_n، S_n، سوف نحصل على المصفوفة الجديدة S_n+T_n:

```
               n
          1 2 3 4 • • • n
Sn+Tn=    1 2 3 4 • • • n
          1 2 3 4 • • • n
          1 2 3 4 • • • n    (n+1)
          1 2 3 4 •     •
          • • • • • •   •
          • • • •   • • •
          • • • •     • n
          1 2 3 4 • • • n
```

ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن كل صف بالمصفوفة بالنسبة لـ S_n+T_n هو عبارة عن مجموع n الأولى من الأعداد الطبيعية. وفي الترميز الحالي، فإن هذا يؤشر نحو N_n.

بما أن المصفوفة تحوي على (n+1) من الصفوف، فإننا سنحصل، ببساطة على:

$S_n+T_n = (n+1)\,N_n$

إن تعويض الصيغ التي قمنا باشتقاقها سابقا بالنسبة لكل من T_n، و N_n يعد تمرينا في الجبر الأولي، والذي سينتج عنه بسرعة،

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

التقييم اللاحق Postassessment

لقياس مشاركة الطلبة بأهداف الأداء، ليقم كل طالب بما يأتي:

1. اشتقاق صيغة لمجموع n الأولى من الأعداد الخماسية باستخدام المصفوفات.
2. تطبيق صيغ مختلفة من التي قام الطلبة باشتقاقها لإيجاد مجموع n الأولى من الأعداد الرمزية بالنسبة لقيم تامة مختلفة للمتغير n.



ثلاثيات فيثاغورية
Pythagorean Triples

عند تعليم نظرية فيثاغورث في مرحلة المدارس الثانوية، يقترح المعلمون، غالبا، أن يدرك الطلبة (ويتذكروا دائما) مجموعة شائعة محددة من ثلاثة أعداد والتي تصف أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية. إن بعض هذه المجموعات المرتبة من الأعداد الثلاثة، تعرف بثلاثيات فيثاغورث:

(3, 4, 5)، (5, 12, 13)، (8, 15, 17)، (7, 24, 25).

سيسأل الطالب اكتشاف هذه الثلاثيات الفيثاغورية عندما ترد في تمارين مختارة. وكيف يمكن للمرء أن يشتق المزيد من الثلاثيات دون اللجوء إلى أسلوب المحاولة والخطأ؟. إن هذا السؤال، والذي يكثر الطلبة من طرحه، سوف يجاب عنه في هذه الوحدة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1 سيقوم الطلبة بتوليد ستة ثلاثيات فيثاغورية – أولية باستخدام الصيغ التي طورت خلال هذه الوحدة.

2 سيبين الطلبة خصائص مجموعة مختلفة من أعضاء الثلاثيات الفيثاغورية الأولية.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بنظرية فيثاغورث. وينبغي أن يكونوا قادرين على معرفة الثلاثيات الفيثاغورية، والتمييز بين الثلاثيات الفيثاغورية – الأولية وبين غيرها من الثلاثيات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

أسأل طلبتك إيجاد العضو المفقود في الثلاثيات الفيثاغورية الآتية:

1. (3, 4, ___).
2. (7, ___ , 25).
3. (11, ___ , ___).

إن الثلاثيتين الأولى والثانية يسهل احتسابها باستخدام نظرية فيثاغورث. ولكن هذه الطريقة سوف لا تجدي نفعا مع الثلاثية الثالثة. عند هذه النقطة تستطيع أن تقدم لطلبتك طريقة مناسبة لحل هذه المسألة. إن هذا هو موضوع هذه الوحدة.

وقبل البدء بتطوير الصيغ المطلوبة، ينبغي أن نأخذ بعين الاعتبار بعض الفرضيات المساعدة البسيطة:

فرضية مساعدة Lemma 1: عندما يقسم 8 مربعا لعدد فردي، فإن الباقي سيكون 1.

البرهان Proof:

نستطيع وصف العدد الفردي بواسطة 2k+1، حيث k هي عدد صحيح

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$$
$$= 4k(k+1) + 1$$

بما أن k و k+1 متتابعين، ينبغي أن يكون أحدهما زوجيا. وعليه يجب أن يكون 4k(k+1) قابلا للقسمة على 8. إذن $(2k+1)^2$ عندما ستقسم بواسطة 8 سيكون المتبقي عنها 1.

إن هاتين الفرضيتان سوف تتتابع مباشرة:

فرضية مساعدة Lemma 2: عندما يقسم 8 مجموع مربعي عددين فرديين، فإن الباقي سيكون 2.

فرضية مساعدة Lemma 3: إن مجموع مربعي عددين فرديين، لا يمكن أن يكون عدداً مربعاً.

البرهان Proof:

بما أن مجموع عددين فرديين هو عدد مربع.

عندما يقسم على 8، سيترك باقيا مقداره 2، المجموع زوجي ولكنه غير قابل للقسمة على 4. وعليه فإنه لن يكون عددا مربعا.

والآن أصبحنا على أهبة الاستعداد للبدء بتطويرنا لصيغ تخص ثلاثيات فيثاغورث. دعنا نفترض بأن (a, b, c) هي عبارة عن ثلاثية فيثاغورية – أولية. إن هذا يدل ضمنا على أن a، b هما

عددان أوليان نسبيا. وعليه، لا يمكن أن يكون كلاهما زوجيا.

هل يمكن أن يكونا فرديين؟.

إذا كان كل من a و b فرديا، بعدئذ بواسطة الفرضية المساعدة Lemma 3 = $a^2+b^2 \neq c^2$. وهذا يناقض فرضنا بأن (a, b, c) هي ثلاثية فيثاغورية؛ وعليه لا يمكن أن يكون كلا من a، b فرديان بنفس الوقت. وعليه، يجب أن يكون أحدهما فرديا والثاني زوجيا.

دعنا نفترض بأن a هو عدد فردي و b عدد زوجي. إن هذا يدل ضمنا على أن c هو عدد فردي أيضاً. تستطيع إعادة كتابة:

$a^2+b^2=c^2$ بشكل:

$$b^2=c^2-a^2$$
$$b^2=(c-a)(c+a)$$

وبما أن مجموع، وفرق العددين الفرديين يكون زوجيا :

$c+a = 2p$، وكذلك $c-a=2q$ (حيث p، q أعداد طبيعية).

وبحل المعادلة بدلالة a و c نحصل على:

$$a = p-q, \qquad c = p+q$$

والآن تستطيع أن تعرض بأن p و q ينبغي أن يكونا نسبيين أولياً. افترض p و q ليسا نسبيان أولياً، وقل $g > 1$ كان عاملا مشتركا. بعدئذ سيكون g أيضاً عاملا مشتركا لكل من a و c. وبنفس الطريقة سيكون g أيضاً عاملا مشتركا لكل من c+a، و c-a. إن هذا سيصنع من g^2 عاملا مشتركا للمتغير b^2، نظراً لأن $b^2 = (c+a)(c-b)$.

وسيعقب ذلك بأن يكون g عاملا لـ b. والآن إذا كان g عاملا لـ b وكذلك عاملا مشتركا لـ a و c، بعدئذ لن يكون a، b، c أعداد أولية نسبيا. وهذا يناقض فرضنا بأن (a, b, c) هي عبارة عن ثلاثية فيثاغورية. إذن p، q ينبغي أن تكون أولية نسبيا.

بما أن b عدد زوجي، نستطيع وصفه كما يأتي:

$$b = 2r$$

ولكن

$$b^2 = (c+a)(c-b)$$

وعليه فإن

$$Pq = r^2 \quad \text{أو} \quad b^2 = (2p).(2q) = 4r^2$$

إذا كان حاصل ضرب عددين طبيعيين أوليان نسبيا (p و q) هو مربع العدد الطبيعي (r)، بعدئذ فإن كلا منهما ينبغي أن يكون مربع العدد الطبيعي. وعليه فإننا سوف نفترض:

$$q=n^2 \quad \text{وكذلك} \quad p=m^2$$

حيث يعد m، و n عددان طبيعيان. وبما أنهما عاملان لعددين أوليين نسبيا (p و q)، فانهما (m و n) سيكونان نسبيين أيضاً.

بما أن $a = p-q$ وأن $c = p+q$

$a = m^2-n^2$ وأن $c = m^2+n^2$

كذلك، بما أن $b = 2r$ وأن $b^2 = 4r^2 = 4pq = 4m^2n^2$

$$b = 2mn$$

ولكي نلخص ما ذكر، نستطيع القول بأن لدينا الآن صياغات لتوليد ثلاثيات فيثاغورية:

$$c = m^2+n^2 \qquad b = 2mn \qquad a = m^2-n^2$$

إن العددين m و n لا يمكن أن يكون كل منهما زوجيا، نظراً لكونهما أوليان نسبيا، كما لا يمكن أن يكون كل منهما فرديا، لأن هذا سوف يحيل قيمة $c = m^2+n^2$ إلى عدد زوجي، وهو أمر أثبتنا استحالته مبكرا. ونظرا لأن هذا الأمر يعد مؤشرا على ضرورة كون أحدهما فرديا والآخر زوجيا،

$b = 2mn$ ينبغي أن يكون قابلا للقسمة على 4. وعليه لا يمكن أن تتألف ثلاثيات فيثاغورث من ثلاثة أعداد طبيعية. إلا أن هذا لا يعني استحالة كون بقية أعضاء الثلاثيات الفيثاغورية يمكن أن تكون أحادية.

دعنا نقوم بعكس العملية لفترة قصيرة من الوقت، ونأخذ بعين الاعتبار عددين أوليين نسبيا m و n (حيث $m > n$) وأن يكون أحدهما فرديا والآخر زوجيا. وسنقوم الآن ببيان أن (a, b, c) هي عبارة عن ثلاثية فيثاغورية أولية. حيث

$$c = m^2 + n^2, \quad b = 2mn, \quad a= m^2 - n^2$$

إنه من السهل للتحقق جبرياً أن:

$$(m^2 + n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

وأن تتكون ثلاثية فيثاغورية. وما يتبقى هو برهنة أن (a, b, c) ثلاثية فيثاغورية أولية.

افترض أن لكل من a و b عامل مشترك هو $h>1$. بما أن a هو عدد فردي، ينبغي أن يكون h زوجيا. ولكون $a^2+b^2=c^2$، فإن h سوف يكون عاملا لـ c. ولدينا أيضاً h عامل لكل من m^2-n^2 وكذلك m^2+n^2 بالإضافة إلى مجموعهما، $2m^2$، والفرق بينهما $2n^2$.

بما أن h عدد فردي، فإنه سيكون عاملا مشتركا لكل من m^2 و n^2. ولكن m و n (وكنتيجة لذلك m^2 و n^2) يعدان عددين أوليين نسبيا لذا لن يكون h عاملا مشتركا لكل من m و n. إن هذا التناقض ينشأ عنه كون a و b أوليان نسبيا.

أخيراً وبعد إنشاء طريقة لتوليد ثلاثيات فيثاغورية أولية، يجب على الطلبة أن يكونوا متلهفين لوضعها موضع التطبيق. إن الجدول الآتي يوفر بعضا من اصغر الثلاثيات الفيثاغورية الأولية.

(ثلاثيات فيثاغورية)

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85

إن الفحص السريع لهذا الجدول يظهر بأن ثلاثيات فيثاغورية – أولية محددة (a, b, c) فيها $c = b+1$.

دع الطلبة يكتشفون العلاقة بين m و n في هذه الثلاثيات.

ينبغي عليهم أن يلاحظوا بأن $m = n+1$ بالنسبة لهذه الثلاثيات. للبرهنة على صحة ذلك بالنسبة لثلاثيات فيثاغورية – أولية أخرى (لا توجد في هذا الجدول)، دع $m = n+1$ وقم بتوليد الثلاثيات الفيثاغورية.

$a= m^2 - n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$
$b= 2mn = 2n\,(n+1) = 2n^2 + 2n$
$c= m^2 + n^2 = (n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1$

يبدو واضحا بأن $c = b+1$، وهو الذي يجب علينا بيانه!.

إن السؤال الطبيعي الذي يجب أن تطرحه على طلبتك هو إيجاد جميع الثلاثيات الفيثاغورية الأولية والتي تعد أعداد أولية متتابعة باستخدام طريقة تشابه تلك التي استخدمناها أعلاه، سينجح الطلبة في تحديد وجود ثلاثية واحدة تحقق هذا الشرط وهي (3, 4, 5).

يمكن اقتراح تحريات أخرى لكي يأخذها الطلبة في اعتباراتهم. وفي أي حالة من الحالات ينبغي أن يبدي الطلبة اهتماما كبيرا بالثلاثيات الفيثاغورية، ونظرية الأعداد الأولية بعد انتهائهم من هذه الوحدة.

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد ستة ثلاثيات فيثاغورية – أولية والتي لم يتضمنها الجدول أعلاه.
2. جد طريقة لتوليد ثلاثيات فيثاغورية أولية بصيغة : (a, b, c) حيث $b =a+1$.
3. برهن بأن أي ثلاثية فيثاغورية – أولية يوجد فيها عضو واحد قابل للقسمة على 3.
4. برهن بأن أي ثلاثية فيثاغورية - أولية يوجد فيها عضو واحد قابل للقسمة على 5.
5. برهن بأنه في أي ثلاثية فيثاغورية – أولية يكون حاصل ضرب أعضائها من مضاعفات 60.
6. جد الثلاثية الفيثاغورية (a, b, c) حيث $a^2 = b+2$.

84 قابلية القسمة Divisibility

ستعرض هذه الوحدة طرائقاً لإيجاد القاسم دون إجراء القسمة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1- بإعطاء أي عدد صحيح، سيقوم الطلبة بتحديد عوامله الأولية، دون القيام بأي نوع من القسمة.
2- سيقوم الطلبة بإنتاج قواعد لفحص القابلية على القسمة بواسطة جميع الأعداد الطبيعية التي تقل عن 49، وبعض آخر يزيد على 49.

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة ببيان أي من الأعداد التالية يقبل القسمة على 2، أو 3، أو 5 دون إجراء القسمة.

(أ). 792 (ب). 835 (ج). 356
(د). 3890 (هـ). 693 (و). 743

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لاشك بأن الطلبة يدركون أن أي عدد زوجي يقبل القسمة

على 2، وعليه فإن الأعداد أعلاه (أ، ج، د) تقبل القسمة على 2. كذلك سيدرك جزء كبير منهم بأن العدد الذي يكون آخر مراتبه صفرا أو 5 (مرتبة الآحاد) يقبل القسمة على 5. عند هذه النقطة سيكون الطلبة متلهفين إلى توسيع هذه القاعدة لكي تصح في فحص قابلية القسمة على 3. أما الأعداد (ج، هـ، و) فهي الأعداد الوحيدة من الأعداد أعلاه التي آخر مراتبها من مضاعفات العدد 3، ولكن أحدها فقط، 693، ويقبل القسمة على 3. ينبغي أن تثير هذه الأمور ميلا كافيا نحو تطوير قواعد لاختبار قابلية القسمة على أعداد غير 2 أو 5 بين الطلبة.

توجد طرق مختلفة لتطوير قواعد تختبر قابلية القسمة على أعداد متنوعة. ويمكن أن تطور هذه القواعد بدلالة مقدار الأعداد. قد تروق هذه الطريقة للبعض، ولكنها تنقص من الأنماط المختلفة والتي غالبا ما يفضلها الطلبة في التطوير الرياضي. في هذه الوحدة سنأخذ القواعد بعين الاعتبار ضمن مجاميع من الطرائق المتقاربة.

<u>قابلية القسمة على قوى الـ 2:</u> إن عددا معلوماً يقبل القسمة على 2^1 أو (2^2، 2^3، ...، 2^n، على التوالي) إذا كانت المرتبة الأخيرة 1 (أو 2، 3، ...، n، على التوالي) تقبل القسمة على 2^1 (أو 2^2، 2^3، ...، 2^n، على التوالي).

<u>البرهان Proof:</u> تأمل العدد الآتي والذي يتألف من n مراتب عشرية، $a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3} \ldots a_2\, a_1\, a_0$ والذي يمكن كتابته كما يأتي: $10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \ldots + 10^2a_2 + 10^1a_1 + 10^0a_0$ بما أن جميع الحدود، باستثناء الأخير تكون دائما قابلة للقسمة على 2، ينبغي علينا أن نتأكد من قابلية قسمة العدد الأخير عندما سنقوم باختبار قابلية القسمة على 2. وبنفس الطريقة، بما أن جميع الحدود باستثناء الحدين الأخيرين تقبل القسمة على 2^2 دائما، يجب علينا تحديد إذا كانت المرتبتين الأخيرتين (تعامل كأعداد) قابلة للقسمة على 2^2. إن هذا الأسلوب يمكن توسيعه بسهولة لغاية الحالة النونية n^{th} Case.

<u>قابلية القسمة على قوى الـ 5:</u> إن عدداً معلوما يقبل القسمة على 5^1 (أو 5^2، 5^3، ...، 5^n، على التوالي) إذا كانت المرتبة الأخيرة 1 (أو 2، 3، ...، n، على التوالي) تقبل القسمة على 5^1 (أو 5^2، 5^3، ...، 5^n، على التوالي).

<u>البرهان Proof:</u> إن البرهان على هذه القواعد يتبع نفس الأسلوب كما في البرهان الخاص باختبار القسمة على قوى الـ 2. باستثناء أن العدد 2 يستبدل بالعدد 2.

<u>قابلية القسمة على 3 و 9:</u> إن رقما معلوما يقبل القسمة على 3 (أو 9) إذا كان مجموع المراتب العشرية يقبل القسمة على 3 (أو 9).

<u>البرهان Proof:</u> تأمل العدد $a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ (الحالة العامة $a_na_{n-1} \ldots a_3a_2a_1a_0$ والتي تشبه صيغة العدد). إن هذه الصيغة يمكن أن تكتب كما يأتي:

$$a_8(9+1)^8 + a_7(9+1)^7 + \ldots + a_1(9+1) + a_0$$

باستخدام الصيغة $M_i(9)$ لمتوسط مضاعفات 9، بالنسبة لـ $i=1,2,3,4,5,..7,8$، نستطيع إعادة كتابة العدد كما يأتي:

$$a_8[M_8(9)+1]+a_7\,[M_7(9)+1] + \ldots + a_1\,[M_1(9)+1] + a_0$$

(إن ذكر نظرية ذات الحدين في هذا الموضوع قد يكون لها فوائد ملموسة)

إن العدد يساوي:

$$M(9) + a_8+a_7+a_6+a_5 +a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$$

حيث يمثل $M(9)$ مضاعفا للعدد 9. إذن العدد يقبل القسمة على 9 (أو 3) إذا كان مجموع المراتب العشرية للعدد يقبل القسمة على 9 (أو 3).

إن قاعدة لاختبار قابلية القسمة على 11 قد برهن عليها بأسلوب يشابه البرهان لقابلية القسمة على 3 و 9.

<u>قابلية القسمة على 11:</u> إن رقما معلوما يقبل القسمة على 11 إذا كان الفرق بين مجموع المرتبيتين المتناوبتين يقبل القسمة على 11

<u>البرهان Proof:</u> تأمل العدد $a_8a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0$ (باستخدام الحالة العامة يكون مشابها له). إن هذه الصيغة يمكن كتابتها كما يأتي:

$$a_8\,(11\text{-}1)^8 + a_7\,(11\text{-}1)^7 + \ldots + a_1\,(11\text{-}1) + a_0$$
$$=a_8[M_8(11)\text{-}1]+a_7[M_7(11)\text{-}1]+\ldots+a_1[M_1(11)\text{-}1]+ a_0$$

بعدئذ ستكون هذه الصيغة مساوية

$M(11)+a8+a7+a6+a5+a4+a3+a2+a1+a0$ والذي يقبل القسمة على 11.

سوف تكون على جانب الصواب إذا بينت التوسعات في الأسس غير العشرة لكل من قواعد قابلية القسمة المذكورة سابقا. وغالبا ما يكون الطلبة قادرين على صياغة هذه التعميمات بجهد ذاتي (خصوصا مع توفر الملاحظة المناسبة). إن المتبقي من هذا الأنموذج سوف يتعامل مع قواعد اختبار قابلية القسمة للأعداد الأولية ≤ 7 ومركباته.

<u>قابلية القسمة على 7:</u> قم بالغاء آخر مرتبة من العدد المعلوم، بعدئذ اطرح ضعف الرقم الملغي من العدد المتبقي. إذا كانت النتيجة تقبل القسمة على 7، فإن العدد الأصلي يقبل القسمة على 7. إن هذه العملية يمكن تكرارها إذا كانت النتيجة كبيرة جدا للفحص البسيط على قابلية القسمة على 7.

<u>البرهان Proof:</u> لتبرير التقانة، تأمل المراتب المنتهية المكنة المختلفة والطرح الذي يقابل كل منها:

المرتبة المنتهية	عدد المطروح من الأصلي
1	20+1 = 21 = 3*7
2	40+2 = 42 = 6*7
3	60+3 = 63 = 9*7
4	80+4 = 84 = 12*7
5	100+5 = 105 = 15*7
6	120+6 = 126 = 18*7
7	140+7 = 147 = 21*7
8	160+8 = 168 = 24*7
9	180+9 = 189 = 27*7

في كل من مضاعفات العدد 7 قد تم الطرح لمرة واحدة، أو عدة مرات من العدد الأصلي. وعليه. إذا كان العدد المتبقي يقبل القسمة على 7. بعدئذ. سيكون كذلك العدد الأصلي.

قابلية القسمة على 13: إن هذه القاعدة تشبه القاعدة المستخدمة في اختبار القسمة على 7. باستثناء استبدال العدد 7 بالعدد 13. وبدلا من طرح ضعف المرتبة الملغاة، سوف نقوم بطرح العدد الملغي تسعة مرات لكل مرة.

البرهان Proof: مرة ثانية تأمل المراتب المنتهية الممكنة – المختلفة والطرح الذي يقابل كل منها:

المرتبة المنتهية	عدد المطروح من الأصلي
1	90+1 = 91 = 7*13
2	180+2 = 182 = 14*13
3	270+3 = 273 = 21*13
4	360+4 = 364 = 28*13
5	450+5 = 455 = 35*13
6	540+6 = 546 = 42*7
7	630+7 = 637 = 49*7
8	720+8 = 728 = 56*7
9	810+9 = 819 = 63*7

في كل حالة من مضاعفات العدد 13 قد تم طرح مرة واحدة أو عدة مرات من العدد الأصلي. وعليه، إذا كان العدد المتبقي يقبل القسمة على 13، بعدئذ سيكون العدد الأصلي قابلا للقسمة على 13 أيضاً.

قابلية القسمة على 17: إن هذا الأمر يشابه القاعدة المستخدمة في اختبار قابلية القسمة على 7 باستثناء استبدال 7 بالعدد 17. وبدلا من طرح ضعف المرتبة الملغاة، وسوف نقوم بطرح المرتبة الملغاة خمسة مرات في كل مرة.

البرهان Proof: إن البرهان على قاعدة قابلية القسمة على 17 يتبع نمطا مشابها لكل من برهاني 7 و 13.

إن الأنماط المستحدثة في قواعد القسمة السابقة – الثلاثة (لكل من 7، 13، 17) ينبغي أن تؤدي بالطالب إلى تطوير قواعد مشابهة لاختبار قابلية القسمة على أعداد أولية أكبر. إن الجدول الآتي يعرض "مضاعفات Multipliers" المرتبة الملغاة لأعداد أولية مختلفة.

لاختبار قابلية القسمة بواسطة	المضاعف
7	2
11	1
13	9
17	5
19	17
23	16
29	26
31	3
37	11
41	4
43	30
47	14

لملء الفراغات في مجموعة الأعداد الصحيحة، تصبح عملية اخذ قابلية قسمة الأعداد غير الأولية أمرا ضروريا.

قابلية القسمة على الأعداد غير الأولية Composites:

إن رقما معلوما يقبل القسمة على عدد غير أولي، إذا كان يقبل القسمة على كل من عوامله الأولية النسبية. إن الجدول الآتي يوفر عرضا لهذه القاعدة. وعليك، أو على طلبتك إكمال الجدول لغاية العدد 48.

يقبل القسمة على	ينبغي أن يقسم العدد على
6	2.3
10	2.5
12	3.4
15	3.5
18	2.9
21	3.7
24	3.8
26	2.13
28	4.7

عند هذه النقطة سيكون الطالب قد امتلك مجموعة من القواعد لاختبار قابلية القسمة، وعينة شاملة لنظرية العدد الأولي. ليقم الطلبة بالتمرن على استخدام هذه القواعد (لكي تنغرس فيهم معرفة كافية بالموضوع) مع محاولة تطوير قواعد لاختبار قابلية القسمة على أعداد أخرى في الأساس 10. وكذلك تعميم هذه القواعد على أسس أخرى. إن عدم توفر مساحة كافية بالكتاب. لمناقشة أكثر تفصيلا للموضوع قد حالت

دون اعتماد مبدأ تطوير أكثر تفصيلا للقواعد في هذه الوحدة.

التقييم اللاحق Postassessment

إن الطلبة الذين قد أدركوا أهداف أداء هذه الوحدة سيكونون قادرين على حل هذه التمارين:

1. قرر قاعدة لاختبار قابلية القسمة على:
(أ) 8 (ب) 18 (ج) 13 (د) 23 (هـ) 24 (و) 42
2. جد العوامل الأولية لكل مما يأتي:
(أ) 280 (ب) 1001 (ج) 495 (د) 315 (هـ) 924

إن مراجعا إضافية على هذا الموضوع يمكن أن تعثر عليها في:

Posamentier, A.S., and S.Krulik, Teachers: Prepare Your Students for the Mathematics for SAT 1: Methods and Problem Solving, Strategies. Thousand Oaks, CA: Corwin, 1996.

Posamentier, A.S. and C.T. Salkind, Challenging Problem in Algebra, New York: Dover, 1996



متتابعة فايبوناشي
Fibonacci Sequence

هدف الأداء Performance Objective

سيقوم الطلبة بما يأتي:

1. تعريف تتابع فايبوناشي.
2. إيجاد مجموع جملة من أعداد فايبوناشي.
3. إيجاد مجموع مربعات أعداد فايبوناشي الأولى.
4. اكتشاف خصائص أعداد فايبوناشي.

التقييم اللاحق Postassessment

ليحاول الطلبة حل المسألة الآتية: كم عدد أزواج الأرانب التي سوف تتكاثر خلال سنة، مبتدئين بزوج واحد منها، إذا كان الزوج يلد في الشهر الواحد زوجا آخر، يصبح قادرا على التكاثر من الشهر الثاني التالي؟

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

عرض الرياضي الإيطالي ليوناردو من مدينة بيزا Pisa (وكان ابن، Figlio، للمواطن Bonaccio، ومن اجل ذلك عرف باسم Fibonacci) المسألة أعلاه في كتابة LIBER ABACI المنشور عام 1202.

تأمل حله للمسألة مع الطلبة مبتدئا برسم مخطط بياني كما يظهر أدناه.

Month	Pairs	No of A's	No of B's	Total prs of rabbits
Jan	A	1	0	1
Feb	A B	1	1	2
March	A B A	2	1	3
April	A B A A B	3	2	5
May	A B A A B A B A	5	3	8
June	A B A A B A B A A B A A B	8	5	13

أبدأ بالشهر الأول، واستمر إلى الشهور التي تليه موضحا الطريقة عند تقدمك في شرح الموضوع. وذكر الطلبة بأن زوج الصغار ينبغي أن ينضج ويكتمل لمدة شهر واحد قبل أن يصبح مهيئا للتكاثر.

استمر في المخطط التوضيحي لغاية الشهر الثاني عشر حيث سيكتشف الطلبة بأن 370 زوجا من الأرانب قد نتج خلال مدة سنة واحدة.

والآن حاول أن تركز انتباه الطلبة على العمود الثالث (عدد A)، تتابع فايبوناشي، ودعهم يحاولون اكتشاف قاعدة لاستمرار هذا التتابع. اخبر الطلبة بضرورة ملاحظة أن كل حد هو عبارة عن مجموع الحدين السابقين. ويمكن كتابة هذا كصيغة عامة $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$، حيث يمثل f_n عدد فايبوناشي النوني n^{th}. على

سبيل المثال. $f_3 = f_1+f_2$ ، $f_4 = f_2+f_3$ ؛ $f_7 = f_5+f_6$. كذلك $f_1=f_2=1$

يمتلك تتابع فايبوناشي مجموعة من الخصائص المتعة والتي يستطيع الطلبة ملاحظتها عند دراسة العلاقات القائمة بين الحدود. يمكن البرهنة على أن مجموع n من أعداد فايبوناشي الأولى سيكون.

$$f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n = f_{n+2} - 1 \qquad (A)$$

لقد لوحظ سابقا صحة العلاقات الآتية:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 - f_2 \qquad (\text{عينا لأن } f_3=f_1+f_2)\\ f_2 &= f_4 - f_3\\ f_3 &= f_5 - f_4\\ &\vdots\\ f_{n-1} &= f_{n+1} - f_n\\ f_n &= f_{n+2} - f_{n+1} \end{aligned}$$

بإضافة حدود هذه المعادلات بصورة متتابعة سينتج عن ذلك $f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n=f_{n+2} - f_2$ ، ولكن نحن على علم بأن: $f_2 = 1$. وعليه $f_1+f_2+f_3+\ldots+f_n = f_{n+2} - 1$.

بنفس الأسلوب نستطيع إيجاد صيغة لمجموع n الأولى من أعداد فايبوناشي وبأدلة إبهامية (indices) معاملات فردية:

$$f_1+f_3+f_5+ \ldots +f_{2n-1} = f_{2n} \qquad (B)$$

ولإنجاز ذلك نقوم بكتابة:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2\\ f_3 &= f_4 - f_2 \qquad (\text{عينا لأن } f_4 = f_2 + f_3)\\ f_5 &= f_6 - f_4\\ f_7 &= f_8 - f_6\\ f_{2n-3} &= f_{2n-2} - f_{2n-4}\\ f_{2n-1} &= f_{2n} - f_{2n-2} \end{aligned}$$

مرة ثانية. بإضافة حدود هذه المعادلات بصورة متتابعة، سيكون لدينا:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

إن مجموع n الأولى من أعداد فايبوناشي وبأدلة إبهامية هو:

$$f_2+f_4+f_6+ \ldots +f_{2n} = f_{2n+1} - 1 \qquad (C)$$

للبرهنة على ذلك سنقوم بطرح معادلة (B) من ضعف معادلة (A). يعني: $f_1+f_2+f_3+\ldots+f_{2n} = f_{2n+2} - 1$ ، للحصول على:
$f_2+f_4+f_6+\ldots+f_{2n}= f_{2n+2} - 1 - f_{2n} = f_{2n+2} - f_{2n}^{-1} = f_{2n+1}^{-1}$
(لأن $f_{2n+2} = f_{2n} + f_{2n+1}$ وأن $f_{2n+1} = f_{2n+2} - f_{2n}$) وهو الأمر الذي نريد البرهنة عليه.

وبتطبيق آخر الجمع المتتابع لحدود المعادلات نستطيع اشتقاق صيغة لمجموع مربعات n الأولى من أعداد فايبوناشي. وعلينا أن نلاحظ في أول الأمر بالنسبة $K>1$:

$$f_K f_{K-1} - f_{K-1} f_K = f_K(f_{K+1} - f_{K-1}) = f_K \bullet f_K = f_K^2$$

إن هذا سوف يمنحنا العلاقات الآتية:

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1 f_2 - f_0 f_1 \qquad (\text{حيث } f_0 = 0)\\ f_2^2 &= f_2 f_3 - f_1 f_2\\ f_3^2 &= f_3 f_4 - f_2 f_3\\ &\vdots\\ f^2_{n-1} &= f_{n-1} f_n - f_{n-2} f_{n-1}\\ f_n^2 &= f_n f_{n+1} - f_{n-1} f_n \end{aligned}$$

بإضافة الحدود المتتابعة، نحصل على:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \ldots + f^2_n = f_n \bullet f_{n+1}$$

يمكن أن نصل تتابع فايبوناشي بموضوع قديم في الرياضيات. باختبار نسب الأزواج الأولى المتتابعة للأعداد في التتابع سنحصل على الآتي:

$$\frac{1}{1} = 1.0000 \qquad \frac{2}{1} = 2.0000$$
$$\frac{3}{2} = 1.5000 \qquad \frac{5}{3} = 1.6667$$
$$\frac{8}{5} = 1.6000 \qquad \frac{13}{8} = 1.6250$$
$$\frac{21}{13} = 1.6154 \qquad \frac{34}{21} = 1.6190$$
$$\frac{55}{34} = 1.6176 \qquad \frac{89}{55} = 1.6182$$
$$\frac{144}{89} = 1.6180 \qquad \frac{233}{144} = 1.6181$$

إن النسب f_n/f_{n-1} $(n>0)$ تؤلف تتابعا تنازليا لقيم n الفردية، وتتابعا تصاعديا لقيم n الزوجية. إن كل نسبة على الجهة اليسرى اكبر من النسبة المقابلة في الجهة اليمنى. تصل النسبة إلى قيمة محددة بين 1.6180 و 1.6181. ويمكن أن يعرض بأن هذه النهاية هي $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ أو 1.61803 مقربا إلى خمسة مراتب عشرية.

كانت النسبة ذات أهمية بالغة لدى اليونان بحيث أطلقوا عليها تسمية "النسبة الذهبية Golden Ratio" أو "القسم الذهبي The Golden Section". ولم يلجأ اليونان إلى وصف العلاقة في صيغة عشرية ولكنهم استخدموا إنشاءً هندسيا بحيث تتناسب فيه قطعتي مستقيم بنسبة ذهبية مضبوطة، ...1,6618033 إلى 1.

ينتج عن النسبة الذهبية الارتباط الأساسي بين تتابع فايبوناشي والهندسة. تأمل ثانية نسب أعداد فايبوناشي

المتتابعة. وكما ذكرنا سابقا، فإن جدول الكسور المذكورة أعلاه يبدو بانها تقارب النسبة الذهبية. دعنا نتعمق في بحث هذه الملاحظة متأملين قطعة المستقيم $\overline{APB}$، وتكون النقطة P مقسمة لقطعة المستقيم $\overline{AB}$ بحيث $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}$.

B ——— P ——— A

لنفترض $\frac{AB}{AP}=x$. وعليه فإن:

$$x=\frac{AB}{AP}=\frac{AP+PB}{AP}=1+\frac{PB}{AP}=1+\frac{AP}{AB}=1+\frac{1}{x}$$

إذن $x=1+\frac{1}{x}$ أو $x^2-x-1=0$.

إن جذري هذه المعادلة هي:

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887$$ وكذلك

$$b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-0.6180339887$$

نظراً لكوننا مهتمين بأطوال قطعتي المستقيم، ينبغي أن تستخدم الجذر الموجب، a، فقط. ولما كان a، و b يمثلان جذور المعادلة $x^2-x-1=0$، $a^2=a+1$ (1)، $b^2=b+1$ (2).

بضرب (1) بـ a^n (حيث تمثل n عددا صحيحا) $a^{n+2}=a^{n+1}+a^n$

بضرب (2) بـ b^n (حيث تمثل n عددا صحيحا) $b^{n+2}=b^{n+1}+b^n$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1).

$$a^{n+2}-b^{n+2}=(a^{n+1}-b^{n+1})+(a^n-b^n)$$

والآن. بالقسمة على $\sqrt{5}=a-b$ (لا يساوي صفرا !):

$$\frac{a^{n+2}-b^{n+2}}{a-b}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}+\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

وإذا قمنا الآن بافتراض $t_n=\frac{a^n-b^n}{a-b}$، بعدئذ :

$t_{n+2}=t_{n+1}+t_n$ (تشابه تعريف تتابع فايبوناشي). إن كل هذا يبقى لكي يعرض بالترتيب فنكون قادرين على إنشاء t_n كالحد النوني n^{th} لعدد فايبوناشي، f_n، ويكون $t_1=1$ و $t_2=1$.

$$t_1=\frac{a^1-b^1}{1-b}=1$$

$$t_2=\frac{a^2-b^2}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=\frac{(\sqrt{5})(1)}{\sqrt{5}}=1$$

وعليه فإن $f_n=\frac{a^n-b^n}{a-b}$ حيث $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$، وأن $b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ... ,n=1,2,3.

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد مجموع أعداد فايبوناشي التسعة الأولى.
2. جد مجموع أعداد فايبوناشي الخمسة الأولى بمعاملات فردية.

مراجع References

Brother, U. Alfred, An Introduction to Fibonacci Discovery, San Jose, Calif.: The Fibonacci Association, 1965.

Bicknell, M. and Verner E. Hoggatt, Jr., A Primer for The Fibonacci Numbers, San Jose, California: The Fibonacci Association, 1972.

Hoggatt, Verner E. Jr, Fibonacci and Lucas Numbers, Boston: Houghton Mifflin, 1969.

Posamentier, A.S., Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Emeryville, CA: Key College Publishing, 2002.

N.N. Vorob'ev, Fibonacci Numbers, New York: Blaisdell Publishing, 1961.

T.H. Garland, Fascinating Fibonaccis, Palo Alto, CA: Dale Sevmour Public, 1987.



معادلات دايوفانتين
Dophantine Equations

يمكن أن تعرض هذه الوحدة على أي صف قد أتقن المبادئ الأساسية للجبر.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. لديك معادلة بمتغيرين. وسيقوم الطلبة بإيجاد الحلول العددية الصحيحة (إذا وجدت).
2. لديك مسألة لفظية والتي تتطلب حلا لمعادلة دايوفانتين، وسيحدد الطلبة (حيث يكون ملائما) عدد الحلول الممكنة.

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة بحل المسألة الآتية: افترض قد طلب منك رب العمل الذهاب إلى دائرة البريد لشراء طوابع بريد فئة 6¢ و 8¢. وأعطاك 5 دولارات لكي تنفقها لأجل ذلك. كم عدد مجموعات الطوابع البريدية فئة 6¢ و 8¢ تستطيع اختيارها لكي تنجز عملية الشراء؟.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيدرك معظم الطلبة، مباشرة، بأن هناك متغيرين يجب تحديدهما: لنقل x و y. وبافتراض x يمثل عدد طوابع فئة 8¢. وأن لا يمثل عدد طوابع فئة 6¢، وستكون المعادلة $8x+6y=500$. ويمكن أن تحول هذه المعادلة إلى $4x+3y=250$ عند هذا المفترق ينبغي أن يدرك الطلبة بأنه رغم أن هذه المعادلة تمتلك عددا غير محدود من الحلول، لكنها قد تمتلك. أو لا تمتلك عددا غير محدود من الحلول العددية الصحيحة. يضاف إلى ذلك، إنها قد تمتلك أولاً تمتلك عددا غير محدود من الحلول العددية الصحيحة الموجبة (كما طلب في المسألة الأصلية). إن المسألة الأولى التي يجب أن نأخذها بعين الاعتبار فيما إذا كانت الحلول العددية الصحيحة موجودة بالفعل.

ولأجل ذلك يمكن توظيف نظرية مفيدة، والتي تنص على انه إذا كان العامل المشترك الأكبر لكل من a و b معاملاً للمتغير k حيث تمثل a، و b، و k أعداد صحيحة، بعدئذ يوجد عدد غير محدود من الحلول العددية الصحيحة لكل من x و y في $ax+by=k$. إن معادلات من هذا النوع، والتي يجب أن تكون حلولها أعدادا صحيحة تعرف "بمعادلات دايوفانتين" تقديرا للرياضي اليوناني دايوفانتوس Diophantus، والذي دارت كتاباته حولها.

عينا لكون العامل المشترك الأكبر لكل من 3 و 4 هو 12، وهو عامل لـ 250، يوجد عدد غير محدود من الحلول العددية الصحيحة للمعادلة $4x+3y=250$. إن السؤال الذي يواجه طلبتك هو كم عدد (إذا كانت) الحلول العددية الصحيحة الموجبة الموجودة؟. إن إحدى الطرق المتاحة للحل غالبا ما تعرف بطريقة أويلر Euler's Mathod (ليونارد أويلر، 1707-1783).

لكي تبدأ، ينبغي على الطلبة حل المعادلة بالنسبة للمتغير بالمعامل صاحب القيمة المطلقة الأقل، في هذه الحالة y. إذن $y=\frac{250-4x}{3}$. يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة لفصل الأجزاء الصحيحة كما يأتي:

$$y=83+\frac{1}{3}-x-\frac{x}{3}=83-x+\frac{1-x}{3}$$

والآن اعرض متغيرا جديدا، لنقل t، بحيث يكون $t=\frac{1-x}{3}$. وبحل المعادلة بالنسبة لـx ينتج $x=1-3t$. بما انه لا يوجد معامل كسري في هذه المعادلة، فليس ثمة حاجة إلى إعادة العملية والتي يجب إجرائها في حالة عدم الحصول إلى هذه الحالة (يعني، يعرض متغير جديد في كل مرة، كما في المتغير t أعلاه).

والآن بالتعويض عن x في المعادلة أعلاه سنحصل على: $y=\frac{250-4(1-3t)}{3}=82+4t$. وبالنسبة لقيم صحيحة مختلفة للمتغير t، يمكن استخراج القيم المقابلة لكل من x و y. إن جدولا يحوي هذه القيم قد يبرهن على فائدته وأهميته.

...	2	1	0	-1	-2	...	t
...	-5	-2	1	4	7	...	x
...	90	86	82	78	74	...	Y

ربما بتوليد جدول أكثر شمولا، سيلاحظ الطلبة لأي قيمة موجبة للمتغير t يمكن الحصول على قيم صحيحة لكل من x و y. ولكن هذه الطريقة لاحتساب عدد القيم الصحيحة– الموجبة لكل من x و y لن تكون أنيقة لحد كبير. ينبغي أن يرشد الطالب إلى التباينات الآتية والتي ينبغي حلها بصورة آنية:

$1-3t > 0$ وأن $82+4t > 0$

إذن $\frac{1}{3} > t$ وأن $t > -20\frac{1}{2}$

أو ($\frac{1}{3} > t > -20\frac{1}{2}$). إن هذا يؤشر إلى وجود 21 مجموعة من طوابع فئة 8¢ و 6¢ يمكن شرائها بمبلغ كلي مقداره 5 دولارات.

قد يجد الطلبة أن من الأفضل ملاحظة حل معادلة دايوفانتين أكثر تعقيدا، إن الآتي يعد مثالا واضحا على هذا:

حل معادلة دايوفانتين: $5x - 8y = 39$

1. حل المعادلة بدلالة x نظراً لأن معامله يمتلك القيمة المطلقة الأقل بين المعاملين.

$$x = \frac{8y+39}{5} = y+7+\frac{3y+4}{5}$$

2. افترض $t = \frac{3y+4}{5}$، بعدئذ حل المعادلة بدلالة y:

$$y = \frac{5t-4}{3} = t-1+\frac{2t-1}{3}$$

3. افترض $u = \frac{2t-1}{3}$، بعدئذ حل المعادلة بدلالة t:

$$t = \frac{3u+1}{2} = u+\frac{u+1}{2}$$

4 افترض $v = \frac{u+1}{2}$، بعدئذ حل المعادلة بدلالة u:

$$u = 2v-1$$

نستطيع الآن عكس العملية بعد أن أصبح معامل v عددا صحيحا.

5. والآن باعتماد التعويض في ترتيب معكوس:

$$t = \frac{3u+1}{2}$$

وعليه $t = \frac{3(2v-1)+1}{2} = 3v-1$

كذلك $y = \frac{5t-4}{3}$

وعليه $y = \frac{5(3v-1)-4}{3} = \boxed{5v-3 = y}$

وبالمثل $x = \frac{8y+39}{5}$

وعليه $x = \frac{8(5v-3)+39}{5} = \boxed{8v+3 = x}$

v	...	-2	-1	0	1	2	...
x	...	-13	-5	3	11	19	...
y	...	-13	-8	-3	2	7	...

وعليه فإن الجدول أعلاه يبين كيف أن حلولا مختلفة لمعادلة دايوفانتين هذه يمكن أن تولد بهذه الطريقة. وينبغي أن يشجع الطلبة على تفحص طبيعية أعضاء مجموعة الحل. وسيتم عرض طريقة أخرى لمعادلات دايوفانتين في وحدة 87.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بحل كل من معادلات دايوفانتين الآتية، ثم حدد عدد الحلول الموجبة التامة لكل منها (إذا توافرت).

1. $2x+11y = 35$.
2. $7x-3y = 23$
3. $3x-18y = 40$
4. $4x-17y = 53$

مرجع Reference

إن أحد الأعمال المشابهة بواسطة المؤلف:

Posamentier, Alfred S., and Charles T.Salkind, Challenging Problems in Algebra, New York: Dover,1996



الكسور المستمرة ومعادلات دايوفانتين
Continued Fractions and Diophantine Equations

ينبغي أن يأخذ هذا الدرس بعين الاعتبار بعد عرض الوحدة المرافقة "معادلات دايوفانتين". إن هذه الوحدة تصف طريقة أخرى لحل معادلات دايوفانتين.

أهداف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء معادلة ذات متغيرين، سيقوم الطلبة بإيجاد الحلول العددية الصحيحة (إذا وجدت).
2. لديك مسألة لفظية والتي تتطلب حلا لمعادلة دايوفانتين، وسيقوم الطلبة بتحديد (حيثما يكون ملائما) عدد الحلول الممكنة
3. لديك كسر غير حقيقي Improper fraction، وسيقوم الطلبة بكتابة كسر مكافئ مستأنف.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يتقن الطلبة مبادئ وحدة "معادلات دايوفانتين" بصورة جيدة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

قبل مناقشة هذه الطريقة، والخاصة بحل المعادلات دايوفانتين، فإن إجراء جولة في الكسور المستمرة سيكون أمراً مناسبا. إن أي كسر غير حقيقي (يختصر إلى اقل حدود) يمتلك كسرا مستمرا مكافئاً له. على سبيل المثال:

$$\frac{11}{7}=1+\frac{4}{7}=1+\frac{1}{7/4}=1+\frac{1}{1+3/4}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{4/3}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1/3}}$$

إن الصيغة الأخيرة يطلق عليها "الكسر المستمر البسيط Simple Condtion Fraction"، نظراً لأن جميع البسوط بعد الحد الأولي تساوي 1.

إن هذه هي الأنواع الوحيدة من الكسور المستمرة التي ستؤخذ بعين الاعتبار في هذه الوحدة.

تأمل صيغة عامة لكسر غير حقيقي (اختصر إلى أدنى حدوده) وكسره المستمر البسيط المكافئ له:

$$\frac{r}{s}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5}}}}$$

سوف نطلق $c_1=a_1$ المقاربة الأولى First Convergent.

المقاربة الثانية $$C_2=a_1+\frac{1}{a_2}$$

المقاربة الثالثة $$C_3=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}}$$

المقاربة الرابعة $$C_4=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}$$

المقاربة الأخيرة $$C_5=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5}}}}$$

على سبيل المثال، بالنسبة للكسر المستمر أعلاه يكافئ: $\frac{11}{7}$

$$C_1=1;\ C_2=2;\ C_3=\frac{3}{2};\ C_4=\frac{11}{7}$$

يبدو مناسبا عند هذه النقطة اشتقاق طريقة لإيجاد المقاربة النونية n^{th} Convergent للكسر المستمر العام:

افترض $c_n=\frac{r_n}{s_n}$ (المقاربة النونية)

$c_1=a_1$، وعليه فإن $r_1=a_1$ وأن $s_1=1$

$$c_2=a_1+\frac{1}{a_2}=\frac{a_1a_2+a_2}{a_2}$$

وعليه فإن $r_2=a_1a_2+1$ وأن $s_2=a_2$.

$$c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2a_3+1}{a_3}} = a_1 + \frac{a_3}{a_2a_3+1}$$

$$= \frac{a_1a_2a_3 + a_1 + a_3}{a_2a_3+1} = \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3a_2+1}$$

وبما أن $r_2 = a_1a_2+1$، $a_1=r_1$، $a_2=s_2$، $1=s_1$، نحصل على

$$c_3 = \frac{a_3r_2 + r_1}{a_3s_2 + s_1}$$

إذن $r_3 = a_3r_2 + r_1$ ، وأن $s_3=a_3s_2+s_1$.

بنفس الطريقة $c_4 = \frac{a_4r_3+r_2}{a_4s_3+s_2}$. يتبع هذا النمط:

$$\boxed{c_n = \frac{a_nr_{n-1}+r_{n-2}}{a_ns_{n-1}+s_{n-2}} = \frac{r_n}{s_n}}$$

(يمكن البرهنة على ذلك بواسطة الاستقراء الرياضي).

والآن تأمل الحالة بالنسبة لـ $n=2$.

$c_2 = \frac{a_2r_1+r_0}{a_2s_1+s_0}$. وقد وجدنا سابقا بأن c2 تساوي $\frac{a_1a_2+1}{a_2}$

إن مساواة الطرفين المتقابلين ينتج عنها:

$$a_2r_1 + r_0 = a_1a_2 + 1$$

وعليه $r_1 = a_1$ وأن $r_0=1$، وكذلك $a_2s_1 + s_0 = a_2$ وعليه $s_1 = 1$ وأن $s_0=0$.

بنفس الطريقة تأمل الحالة العامة بالنسبة لـ $n=1$:

$c_1 = \frac{a_1r_0+r_{-1}}{a_1s_0+s_{-1}}$ قد اكتشف هذا الأمر مبكرا مساويا $\frac{a_1}{1}$ إن مساواة الطرفين المتقابلين ينتج عنها:

$$a_1r_0+r_{-1} = a_1$$

وعليه، $r_0 = 1$ وأن $r_{-1}=0$ كذلك $a_1s_0 + s_{-1} = 1$ وعليه، $s_0 = 0$ وأن $s_{-1}=1$.

ليقم الطلبة بتحويل $\frac{117}{41}$ إلى الكسر المستمر المكافئ،

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}$$

والآن قم بإعداد جدول:

n	-1	0	1	2	3	4	5
a_n			2	1	5	1	5
r_n	0	1	2	3	17	20	117
$c_n = \frac{r_n}{s_n}$	1	0	1	1	6	7	41

إن العموديين الأولين بالنسبة لكل من r_n و s_n ثابتان. ولكن القيم الأخرى تتغاير مع الكسر المحدد. إن قيم a_n قد التقطت مباشرة من الكسور المستمرة. وأن كل قيمة من قيم r_n و s_n قد تم الحصول عليها من الصيغة العامة التي اشتقت مبكرا. للتأكد من صحة أعداد الجدول، وينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن المقاربة الأخيرة هي بالحقيقة الكسر الأصلي غير الحقيقي.

إن فحص الضرب المتبادل (المتصالب) يقترح:

$r_n.s_{n-1}-r_{n-1}.s_n=(-1)^n$. ومع دراسة هذه المادة وتعلمها بصورة صحيحة، سيكون الطلبة جاهزين الآن لتطبيق معرفتهم بالكسور المستمرة في حل معادلات دايوفانتين ذات الصيغة $ax+by=k$، حيث يكون العامل المشترك الأكبر لكل من a و b عاملا لـ k. في البداية يجب أن يعد الطلبة كسرا غير حقيقي باستخدام العاملين، قل $\frac{a}{b}$. بعدئذ قم بتحويل هذا الكسر إلى كسر مستمر: $\frac{a}{b} = \frac{r_n}{s'_n}$.

وباستخدام الصيغة المكتشفة سابقا:

$$r_n.s_{n-1} - r_{n-1}.s_n=(-1)^n$$

وبتعويض $a.s_{n-1}-b.r_{n-1}=1$ (أو الضرب بـ -1). والآن بالضرب بواسطة k:

$$a(k.s_{n-1})-b(k.r_{n-1})=k$$

إذن $x=k.S_{n-1}$ وأن $y=-k.r_{n-1}$ هو حل معادلة دايوفانتين. على سبيل المثال، تأمل معادلة دايوفانتين: $41x-117y=3$

بعد أعداد الجدول السابق، تستخدم المقاربة (n-1). يعني، $r_{n-1}=20$ وأن $s_{n-1}=7$. إن العلاقة أعلاه:

$$a(k.s_{n-1})-b(k.r_{n-1})=k$$

سينتج عنها بعد اعتماد التعويض المناسب:

$$41(3.20)-117(3.7)=3$$

إذن الحل الأول للمعادلة $41x-117y=3$ هو $x=60$، $y=21$.

ولغرض إيجاد بقية الحلول، استخدم الأسلوب الآتي:

اطرح $3 = 41(60)-117(21)$ من $41x-117y=3$ للحصول على $41(x-60)-117(y-21)=0$ وعليه فإن $41(x-60)=117(y-21)$،

أو $\frac{x-60}{117} = \frac{y-21}{41} = t$

إذن $t = \frac{x-60}{117}$ وأن $\boxed{x = 117t + 60}$

كذلك $t = \frac{y-21}{41}$ وأن $y = 41t + 21$

بعدئذ يمكن إعداد جدول بالحلول الممكنة.

t	...	-2	-1	0	1	2	...
x	...	-174	-57	60	177	294	...
y	...	-61	-20	21	62	103	...

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بتغيير كل من الكسور غير الحقيقية لكي تكافئ كسورا مستمرة.

1. $\frac{37}{13}$
2. $\frac{47}{23}$
3. $\frac{173}{61}$

ليقم الطلبة بحل معادلات دايوفانتين الآتية ثم القيام بتحديد عدد الحلول الموجبة الموجودة. (إذا تحقق وجودها).

4. $7x-31y=2$
5. $18x-53y=3$
6. $5x-2y=4$
7. $123x-71y=2$



تبسيط صيغ تتضمن اللانهاية
Simplifying Expressions Involving Infinity

تعرض هذه الوحدة طرائق جبرية بسيطة (مناسبة لطلبة الجبر الأولي) لحل المسائل والتي تبدو صعبة لحد ما وتتضمن اللانهاية.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء مسألة جبرية تتضمن اللانهاية، سيستخدم الطلبة طريقة جبرية سهلة لحلها.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على التعامل مع المعادلات الجذرية والمعادلات التربيعية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اعرض المسألة الآتية على طلبتك لغرض حلها:

جد قيمة x إذا كان:

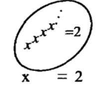
$$x^{x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

سيكون رد الفعل الأولي لغالب الطلبة بشكل من أشكال الذهول والارتباك. نظراً لأنهم لم يتعاملوا مع صيغة غير متناهية، ولا شك، بانهم سيعانون من الإرباك لحد واضح. قد يحاول الطلبة التعويض في الصيغة قيما للمتغير x، لغرض الحصول على تقريب للإجابة على المسألة. وقبل أن يصاب الطلبة بالإحباط، بصورة كلية، ابدأ بتوضيح الطبيعة غير المتناهية للصيغة. ووضح لهم أيضا بأن:

$3^{3^3} \neq 27^3 = 19,683$ ولكن على الأصح

$3^{3^3} = 3^{27} = 7,625,597,484,989$.

والآن دع الطلبة يتفحصون الصيغة الأصلية بالطريقة الآتية: إذا $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2,$ بعدئذ، نظراً لوجود عدد غير متناهي من الـ x، فإن تقليل x واحدة لن يؤثر على الصيغة. وعليه فإن أس x الأولى (الأس الأصغر) هو 2



إذن، يمكن أن تبسط هذه الصيغة إلى $x^2=2$، وأن $x = \sqrt{2}$. ينبغي أن يسأل الطلبة اخذ احتمال $x < 0$ بعين الاعتبار.

إن من الطبيعي، بالنسبة للطلبة، إن يتساءلوا عن قدرتهم على تكوين مسألة مشابهة باستبدال العدد 2، قل، بالعدد 5 أو 7. وبدون تفصيل أو توسيع بين لهم، بأن القيم التي ستحل محل 2 لن يتم اختيارها بصورة اختيارية، وأن قيم الاستبدال سوف لن تتجاوز e (يعني، قاعدة النظام الطبيعي للوغاريتمات، والتي تساوي تقريبا 2.7182818284).

لتعميق المنهج المستخدم في حل المسألة أعلاه، دع الطلبة يتأملون قيمة الجذور المتداخلة

$$\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots}}}}}$$

ولغرض إيجاد قيمة x، حيث:

$x=\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+}}}}}$، دع الطلبة يدركون بأنه لن يضيع شئ بإلغاء الجذور المتداخلة الخمسة-الأولى، نظراً لوجود عدد لامتناهي منهم. إذن:

$$x=\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\ldots}}}}}=x$$

أو $x=\sqrt{5+x}$ والتي تعد معادلة جذرية بسيطة. سيقوم الطلبة بتربيع طرفي المعادلة وحل المعادلة التربيعية الناتجة عنها:

$$x^2=5+x$$

$$x^2-x-5=0$$

$$x=\frac{1\mp\sqrt{21}}{2}$$

بما أن قيمة x موجبة، $x=\frac{1+\sqrt{21}}{2}\approx 2.79$.

إن منهجا بديلا لتحديد الجذور المتداخلة سيكون بتربيع طرفي المعادلة الأصلية أولاً للحصول على :

$x^2=5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5}}}}$، وبعدئذ يتم تعويض x، بحيث $x^2=5+x$، أما المتبقي فيتم التعامل معه بنفس الأسلوب السابق. إن من الضروري قيامك بالتأكيد على تفحص معقولية قيمة الجذور المتداخلة. يعني، هل أن القيمة ستكون موجبة أو سالبة، حقيقية، أو خيالية، ...الخ. إن تطبيقا آخر لهذه الطريقة في تقييم الصيغ التي تتضمن اللانهاية سيكون بواسطة الكسور المستمرة. وقبل تقديم الكسور المستمرة — غير المتناهية يجب أن تقوم بتنشيط ذاكرة طلبتك حول الجذور المستمرة. وقد ترغب في جعلهم يكتبون $\frac{13}{5}$ ككسر مستمر:

$$\frac{13}{5}=2+\frac{3}{5}=2+\frac{1}{\frac{5}{3}}=2+\frac{1}{1+\frac{2}{3}}$$

$$=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

علاوة على ذلك قد ترغب أيضا في جعلهم يمارسون تبسيطا للكسر المستمر، $1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$

$$1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{4}}}=1+\frac{1}{2+\frac{4}{13}}=1+\frac{1}{\frac{30}{13}}=1+\frac{13}{30}=\frac{43}{13}$$

والآن دع الطلبة يتأملون الكسر المستمر غير المتناهي:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}}$$

سوف يدركون بسرعة بأن طريقة التبسيط السابقة لن تكون صالحة بعد الآن. وعند هذه النقطة ينبغي أن تعرض لهم الطريقة الآتية:

دع:

$$x=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$$

ومرة أخرى فإن حذف "الجزء" الأول من الكسر اللا نهائي المستمر لن يؤثر في قيمته (نظراً لطبيعة اللانهائية) وعليه فإن:

$$x=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots=x}}}$$

أو أن $x=1+\frac{1}{x}$ التي سينتج عنها $x^2=x+1$، $x^2-x-1=0$ وأن $x=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$، ولكن بما أن $x>0$ فإن $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

قد يدرك بعض طلبة صفك بأن هذه القيمة تشابه قيمة النسبة الذهبية. أما الطلبة الأكثر تفوقا فقد يتساءلون عن كيفية احتساب صيغة غير متكررة لا متناهية، وقد ترغب بدورك أن تعرض لهؤلاء الطلبة ما يأتي:

احسب : $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots}}}}}$

لاحتساب هذه الصيغة ينبغي إنجاز بعض الإجراءات التمهيدية أولاً. بما أن :

$(n+2)^2 = n^2+4n+4 = 1+(n+1)(n+3)$

$n+2 = \sqrt{1+(n+1)(n+3)}$

افترض $f(n) = n(n+2)$ بعدئذ

إذن $f(n+1) = (n+1)(n+3)$

إذن :

$$f(n)=n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$

$$f(n)=n\sqrt{1+f(n+1)}$$

$$f(n)=n\sqrt{1(n+1)\sqrt{1+f(n+2)}}$$

$$f(n)=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+f(n+3)}}}$$

ويستمر العمل على هذا المنوال.

والآن، إذا كان $n=1$، بعدئذ $f(n) = 1(1+2) = 3$ وأن

$$3=1\sqrt{1+(1+1)\sqrt{1+(1+2)\sqrt{1+(1+3)\sqrt{1+\ldots}}}}$$

$$=1\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}$$

كنتيجة لعرض الطرائق التي أخذت بعين الاعتبار في هذا الأنموذج، ينبغي أن يكون طلبتك قد اكتسبوا فهما مركزا بمبادئ الصياغات غير المتناهية.

التقييم اللاحق Postassessment

1. بسط ما يأتي: $\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\ldots}}}}$

2. بسط ما يأتي: $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+1\ldots}}}}$

3. بسط ما يأتي: $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+1\ldots}}}}}}$



توسيع الكسور المستمرة للأعداد غير القياسية
Continued Fraction Expansion of Irrational Numbers

أهداف الأداء Performance Objectives

1. لديك عدد غير قياسي، وسيقوم الطلبة بكتابة الكسر المستمر المكافئ له.
2. لديك مفكوك غير متناهي، وسيسترجع الطلبة العدد غير القياسي.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالكسور المستمرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن طريقة فك العدد غير القياسي تشابه لحد كبير تلك التي تستخدم مع الأعداد القياسية. دع x تمثل العدد غير القياسي المعلوم. جد a_1، اكبر عدد صحيح يقل عن x، وصف x في الصيغة :

$$x=a_1+\frac{1}{x_2} \quad , \quad 0<\frac{1}{x_2}<1$$

حيث أن العدد $x_2=\frac{1}{x-a_1}>1$ هو عدد غير قياسي، لأنه، إذا طرح عدد صحيح من عدم أصم، فإن الفرق بينهما ومقلوب الفرق يكون غير قياسي.

جد a_2، اكبر عدد صحيح يقل عن x_2، وصف x_2 بصيغة :

$$x_2 = a_2+\frac{1}{x_3} \quad , \quad 0<\frac{1}{x_3}<1, \quad a_2 \ge 1$$

حيث للمرة الثانية، يكون العدد

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} > 1$$

يمكن أن تكرر هذه الحسابات بصورة غير متناهية، فينتج عنها المعادلات:

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} \quad , \quad x_2 > 1$$

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3} \ , \quad x_3 > 1 \quad , \quad a_2 \geq 1$$

$$x_3 = a_3 + \frac{1}{x_4} \ , \quad x_4 > 1 \quad , \quad a_3 \geq 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = a_n + \frac{1}{x_n + 1}, \quad x_{n+1} > 1, \quad a_n \geq 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

حيث a_1، a_2، a_3،....، a_n... أعداد صحيحة، وأن الأعداد x_1. x_2، x_3، ... جميعها أعداد غير قياسية. إن هذه العملية لا يمكن أن تنتهي لأن الطريقة الوحيدة التي يحدث فيها ذلك ستكون بالنسبة لعدد صحيح ما a_n بحيث يساوي x_n. وهذا أمر لا يمكن نواله نظراً لأن كل x_1 تكون غير قياسية.

بتعويض x_2 من المعادلة الثانية أعلاه في المعادلة الأولى، بعدئذ x_3 من المعادلة الثالثة في هذه النتيجة، وهكذا، ينتج الكسر المستمر البسيط المطلوب.

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{x_4}}}}$$

أو قد يكتب في بعض الأحيان بصيغة:

$x = [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$، حيث تبين النقاط الثلاثة بأن العلمية مستمرة بصورة غير متناهية.

مثال Example1:

أوجد مفكوك $\sqrt{3}$ إلى كسر بسيط مستمر-غير متناهي

الحل Solution: إن أكبر عدد صحيح يقل عن $\sqrt{3}$ هو 1.

وعليه $a_1=1$ وأن

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_2}$$

بحل المعادلة بدلالة x_2، نحصل على:

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{3} = a_1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}$$

وعليه فإن $x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}$ حيث $a_2=1$ لأنه اكبر عدد صحيح يقل عن $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. وعليه:

$$x_3 = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}}$$

باستمرار في هذه العملية:

$x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$، $a_3=2$ نظراً لأن 2 هو أكبر عدد صحيح يقل عن $\sqrt{3}+1$.

$$x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$$

بما أن $x_4 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ يشابه $x2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$، نستنتج x5 نفس النتيجة كما هو الحال مع x_3، أي، $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. إن جميع خوارج القسمة الجزئية ستكون 1، 2، 1، 2، وأن الفك غير التناهي لـ $\sqrt{3}$ سيكون

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + .}}}} = [1,1,2,1,2,\ldots] = [1,\overline{1,2}]$$

إن الخط الموجود أعلى 1 و 2 يؤشر بأن هذين العددين يتكرران بصورة غير متناهية.

مثال Example2:

جد مفكوك الكسر المستمر غير التناهي لما يأتي

$$x=\frac{\sqrt{30}-2}{13}$$

الحل Solution:

بما أن $\sqrt{30}$ يقع بين 5 و 6، لذا فإن اكبر عدد صحيح يقل عن x هو $a_1=0$. بعدئذ، $x=\frac{\sqrt{30}-2}{13}=0+\frac{1}{x_2}$ ، حيث

$$x_2=\frac{1}{x}=\frac{13}{\sqrt{30}-2}\cdot\frac{\sqrt{30}+2}{\sqrt{30}+2}=\frac{\sqrt{30}+2}{2}>1.$$

إن أكبر عدد صحيح يقل عن x_2 هو $a_2=3$، وعليه فإن

$$x_2=a_2+\frac{1}{x_3}=3+\frac{1}{x_3}$$

إذن:

$$x_3=\frac{1}{x_2-3}=\frac{1}{\frac{\sqrt{30}+2}{2}-3}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{30}-4}\cdot\frac{\sqrt{30}+4}{\sqrt{30}+4}$$

$$=\frac{2(\sqrt{30}+4)}{14}=\frac{\sqrt{30}+4}{7}$$

إن أكبر عدد صحيح يقل عن x_3 هو $a_3=1$ وعليه فإن

$$x_4=\frac{1}{x_3-1}=\frac{1}{\frac{\sqrt{30}+4}{7}-1}$$

$$=\frac{7}{\sqrt{30}-3}\cdot\frac{\sqrt{30}+3}{\sqrt{30}+3}=\frac{\sqrt{30}+3}{3}$$

بنفس الطريقة نحصل على $x_5=\frac{\sqrt{30}+3}{7}$ ، $x_6=\frac{\sqrt{30}+4}{2}$

وأن $x_7=\frac{\sqrt{30}+4}{7}=x_3$.

إن المزيد من البحث والاستقصاء سوف يظهر بأن التابع 1، 2 . 1 . 4 يتكرر على الدوام، لذا فإن التوسيع المطلوب هو:

$$x=0+\frac{1}{x_2}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x_4}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_5}}}}$$

$$=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x_6}}}}}=0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{x_7}}}}}}$$

وفي النهاية سنحصل على:

$$x=\frac{\sqrt{30}-2}{13}=[0,3,\overline{1,2,1,4}]$$

لقد برهن الطلبة بأن كسرا مستمرا غير محدود يمثل بالواقع عدداً غير قياسي. خذ بعين الاعتبار بيان أن $[2,\overline{2,4}]$ يمثل $\sqrt{6}$.

ابدأ بكتابة:

ليكن

$$x=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}$$

حيث

$$y=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\ddots}}}$$

إذن،

$$y=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{y}}=2+\frac{y}{4y+1}$$

بحل المعادلة بدلالة y ينتج: $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$ ولكن

$$x=2+\frac{1}{y}=2+\frac{2}{2+\sqrt{6}}$$

إذن

$$x=2+\sqrt{6}-2=\sqrt{6}$$

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بتغيير ما يأتي إلى جذر مستمر بسيط-غير متناهي.

1. $\sqrt{2}$
2. $\sqrt{43}$
3. $\frac{25+\sqrt{53}}{22}$

ليقم الطلبة ببيان أن الكسر المستمر-غير المتناهي $[3,\overline{6}]=\sqrt{10}$



تتابع فاري

The Farey Sequence

تعرض هذه الوحدة مناقشة لتتابع غير مألوف من الأعداد لحد ما. إن هذا الموضوع يمكن عرضه على الطلبة بمستويات ومراحل مختلفة، ولكن التأكيد سوف يتغير مع القابليات المختلفة، ومستويات إدراك الطلبة ونضجهم.

هدف الأداء Performance Objective

1. سيبين الطلبة بأن الكسر قبل $\frac{1}{2}$ وأن خلفه المباشر لتتابع فاري متتامان.
2. سيقوم الطلبة بإنشاء العلاقة بين π وعدد الحدود في تتابع فاري.

التقييم السابق Preassessment

باستخدام تتابع الكسور المبين أدناه، ليقم الطلبة بإيجاد مجموع الكسرين:

أ- الحد الخامس إلى يسار والحد الثالث إلى يمين $\frac{1}{2}$؛

ب- الحد الثالث إلى يسار والحد الثالث إلى يمين $\frac{1}{2}$؛

ج- الحد الثاني إلى يسار والحد الثاني إلى يمين $\frac{1}{2}$،

$$\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4}$$

إسأل الطلبة تعميم نتائجهم.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن استعراض نشاط التقييم السابق سوف يظهر بأن مجموع الثلاثة التي طلب من الطلبة إيجادها تنتج جميعها 1. يعني أن:

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1; \qquad \frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1; \qquad \frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$$

ينبغي أن نشير إلى زوج الكسور التي يبلغ مجموعها 1 على أنها متتامة Complementary. دعنا الآن نتفحص التتابع الموجود لدينا.

إذا قمنا بإدراج جميع الكسور المشتركة – الحقيقية في حدودها الدنيا لغرض الزيادة إلى نهاية قيمة اختيارية – كأن لا تزيد قيمة المقام على 7 سيكون لدينا الكسور الـ 17 الآتية:

$$\frac{1}{7},\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}$$

إن هذه الكسور يطلق عليها "تتابع فاري " Farey Sequence"، Fn، بالدرجة النونية n، ويعرف بأنه عبارة عن مجموعة مرتبة تتألف من $\frac{0}{1}$، الكسور الحقيقية التي لا تقبل اختصارا والتي تتراوح مقاماتها بين 2 إلى n، ومرتبة بحسب ازدياد مقدارها، وكذلك 1/1.

هناك الكثير من الخصائص المميزة لتتابع فاري، أحدها العلاقة التي اكتشفها الطلبة مبكرا؛ والتي تنص على أن الكسور التي تبعد مسافة ثابتة عن $\frac{1}{2}$ تكون متتامة، أي مجموعها يساوي 1. وتتضمن العلاقة المثيرة الأخرى عدد الحدود في تتابع فاري بالدرجة النونية و π.

وقبل المباشرة بتطوير هذه التتابع، ينبغي أن يعطى للطلبة معلومات إضافية تعمق فهمهم بتتابع فاري. فيجب بالبداية إخبارهم أن Farey قد اكتشف، عام 1816، التتابع عندما كان يدرس جداول مفصلة لبواقي كسرية، ويظهر بجلاء بأن بسط أي كسر في تتابع فاري يمكن الحصول عليه بإضافة قيم البسطين الموجودين على جانبيه، وتصح نفس الطريقة مع المقام. وبما أن النتيجة يجب أن تكون بحدودها الدنيا، فإن هذا الأمر يصبح بالنسبة لثلاثية: $\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{3}{7}$، حيث $\frac{3+1}{3+7}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$. سيشاهد الطلبة بأن مجموع الكسور التي تبعد بنفس المسافة عن $\frac{1}{2}$ يساوي 1. ويمكن البرهنة على ذلك بعدة طرق.

افترض بأن $\frac{\ell}{n}$ هو عدد في السلسلة والذي يقل عن $\frac{1}{2}$ بحيث أن ℓ و n هما عددان أوليان نسبيا. وبمقارنة الرقم المقابل للجانب الثاني من $\frac{1}{2}$، سنجد $\left(\frac{n-\ell}{n}\right)$. وبما أن هذا يعود إلى تتابع فاري فإن من الضروري أن القاسم المشترك الأعظم:

$$g.c.d\ (n-\ell\ n)=1$$

بافتراض أن $n-\ell$ و n ليسا عددان أوليان نسبيا، بعدئذ

وإن $n-\ell=qd$ وأن $n=qd+\ell$. وكذلك n=rd وإذن سيكون $rd=qd+\ell$. وعليه d تقسم ℓ وإذن d تقسم $(n-\ell)$ لأن d تقسم n. ولكن هذا يناقض حقيقة أن $(n-\ell)/n$ كانت بحدودها الدنيا (والتي تعد تعريف الحدود في تتابع فاري) وعليه فإن $g.c.d=(n-\ell n)=1$. والآن لكي نبرهن بأن $\frac{\ell}{n}+\frac{a}{b}=1$ ، افترض كون $\frac{\ell}{n}$ السابق المباشر للكسر $\frac{1}{2}$. فإذا كان هناك حد يلي $\frac{1}{2}$ مباشرة ويعود إلى F_n، بعدئذ ترتب الكسور كما يأتي:

$\frac{\ell}{n},\frac{1}{2},\frac{a}{b}$ حيث $\frac{1}{2}=\frac{\ell+a}{n+b}$ (إحدى خصائص التتابع).

وللبرهنة على أن $\frac{\ell}{n}+\frac{a}{b}=1$ ، ينبغي أن تكون في أبسط شكل لها إذا كانت تنتمي لـ F_n، وإذا كان مجموع كسرين مساوياً في أبسط حالة لهما، فإن مقاميها يكونا متساويين. إذن إذا كان $\frac{\ell}{n}+\frac{a}{b}=1$ ، فإن b يجب أن تكون مساوية لـ n. إذن $\frac{\ell+a}{n}=1$ وأن $\ell+a=n$ ، أو $a=\ell-n$.

إذن فإن السلف المباشر لـ $\frac{1}{2}$ ، $\frac{a}{b}=\frac{n-\ell}{n}$

ولكن $\frac{\ell}{n}$ كان السلف المباشر بالنسبة لـ $\frac{1}{2}$ وأن الخلف المباشر متتامان لأن مجموعهم يساوي 1.

إن الخاصية الأخرى الجذابة لهذا التتابع تنشأ بين π ومجموع الحدود في تتابع فاري. إن عدد الكسور بالمرتبة النونية يمكن الحصول عليه كما يلي: بما أن الكسور جميعا في حدودها الدنيا، يعقب ذلك بالنسبة لمقام معلوم b، فإن عدد البسوط هو عدد الأعداد الصحيحة التي تقل عن، وتكون أولية بالنسبة لـ b.

بعدئذ ينبغي أن يلاحظ الطلبة بأن عدد الكسور، N، في تتابع فاري يساوي $\phi(2)+\phi(3)+\phi(4)+...+\phi(n)$، حيث $\phi(n)$ هو عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن أو تساوي n والتي تكون أولية نسبيا إلى n. إذا كانت n=7، وستكون:

$$N=\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\phi(4)+\phi(5)+\phi(6)+\phi(7)$$
$$=1+2+2+4+2+6 .$$

إن قيمة N، تزداد بصورة سريعة عندما تزداد n وعندما تكون n=100 N=3043. إذن هناك العدد من الكسور المشتركة غير قابلة للاختصار ببسط ومقام لا يزيد على 100.

إن هذه صيغة مهمة تتضمن دالة φ و π (نسبة محيط الدائرة إلى قطرها). تشير دالة φ إلى دالة أويلر Euler Function. ويمكن كتابة مجموع تتابع فاري باستخدام صيغة بدلالة دالة أويلر φ. إذا كان $\frac{h}{k}$ حدا في تتابع فاري، بعدئذ g.c.d (h,k)=1. بالنسبة لأي عدد محدد k>1 فإن عدد الحدود بصيغة $\frac{h}{k}$ هو $\phi(k)$.

يمكن أن يعرض بأن المجموع $\phi(1)+\phi(2)+...+\phi(n)$ قد تم تقريبه بواسطة الصيغة $3n^2/\pi^2$، وسيزداد التقريب دقة كلما ازدادت قيمة n. باستثناء الحد الأول فإن المجموع يمثل عدد الحدود، N في تتابع فاري بالمرتبة النونية. وبما أننا نعرف قيمة π إلى الحد المطلوب من الدقة، فإن هذا يعني قدرتنا على إيجاد عدد الحدود، بصورة تقريبية، في تتابع فاري دون أن نقوم بحساب $\phi(1)$، $\phi(2)$، ...، $\phi(n)$ بصورة مستقلة. إذن بالنسبة لـ n=100 سيكون لدينا $N=3*100^2/\pi^2=3039.6355...$ في حين أن القيمة الحقيقية هي 3043.

إذن عدد حدود سلسلة فاري يقارب $\frac{3n^2}{\pi^2}$.

التقييم اللاحق Postassessment

1. لديك n=200، n=8، جد عدد الحدود في تتابع فاري باستخدام $\frac{3n^2}{\pi^2}$.
2. ليقم الطلبة بإيجاد خصائص أخرى لتتابع فاري.



غلاف القطع المكافئ
The Parabolic Envelope

تصف هذه الوحدة. باختصار، الإنشاء الميكانيكي لغلاف القطع المكافئ ،مع بيان كيفية استخدام الطلبة للغلاف في اشتقاق حشد من المنحنيات ذات الصلة.

هدف الأداء Performance Objective

باستخدام الغلاف كأساس ترتكز إليه، سيقوم الطلبة برسم مجموعة من المنحنيات بتقانات مختلفة دون اللجوء إلى الرسم عن طريق إيجاد نقطة منقطة من معادلة المنحنى. خلال العملية، سوف يعرض للطلبة المفاهيم المرئية لغلاف ما، والذي يعد تطورا وموطئا لمنحنى معلوم.

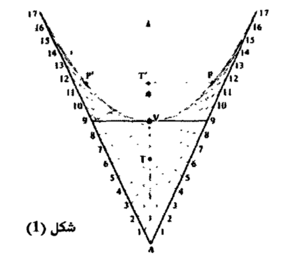
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد اكملوا المنهج الدراسي الأساسي للهندسة وعلى معرفة جيدة بالمقاطع المخروطية Conic Sections.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم طلبتك بإنشاء مماس للقطع المكافئ بالأسلوب الآتي:

ارسم زاوية بأي قياس، وقم بتقسيم كل ضلع من أضلاعها إلى نفس العدد من المسافات المتساوية. في شكل 1، لدينا زاوية، A، بقياس 50°، تم تقسيم ضلعيها إلى 17 مسافة متساوية. نبدأ عند الجهة اليسرى-السفلى من الزاوية، ونرسم خطوطا تصل النقاط



شكل (1)

1 إلى 17،2 إلى 16،3 إلى 15 وهكذا، منتهين بـ 1-17 (حيث أن الرمز "1-17" يعني قطعة المستقيم التي تصل بين النقطتين 17 و 1، أو بالعكس). إن الشعاع الناتج من المستقيمات تكون مماسة لغلاف القطع المكافئ.

إن نقطة المنتصف، V، للخط 9-9، هي راس القطع المكافئ، وأن 9-9 هي مماس للقطع المكافئ عند النقطة V. إن مستقيما من A إلى V، يمتد إلى ما وراء V، وهو محور تناظر القطع المكافئ Axis of Symmetry، وقد تم تضمينه في شكل 1. اسأل الطلبة عن سبب كون 9-9 المماس العمود على AV.

أنشئ عمودا على كل من ضلعي الزاوية عند النقطة 9. لقد ذكرنا، وبدون برهان، بأن نقطة تقاطع هذا العمود مع محور التناظر تعد بؤرة Focus، القطع المكافئ، F. إن الطلبة الأكثر فضولا قد يرغبون في برهنة هذا الأمر. وعند أي مستوى من المستويات ، فإن من الضروري بيان الخصائص الانعكاسية والمكانية للبؤرة.

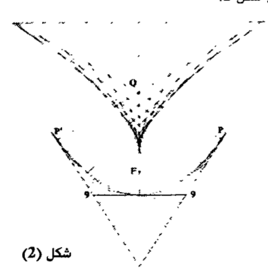
يمكن أن تقرّب كثير من النقاط المحددة للتماس على القطع المكافئ بصورة مباشرة ومرئية من شكل 1. ويمكن أن يحدد موقعها بصورة أكثر دقة في ضوء الحقيقة التي تنص على أن مماس القطع المكافئ يقطع المحور عند مسافة من الرأس تساوي إحداثي نقطة التماس.

كمثال على ذلك في شكل 1، المماس 4-14 يقطع المحور عند النقطة T. حدد النقطة T′ على المحور فوق V بحيث TV=VT′. ارسم مستقيما يمر خلال T′ موازيا 9-9 بحيث يقطع الغلاف عند النقطتين P، P′، بعدئذ ستكون النقطتان P، P′ على القطع المكافئ حيث 4-14، 14-4 مماسان. ويمكن تحديد بقية النقاط على القطع المكافئ بنفس الطريقة.

منشئ القطع المكافئ Evolute to the Parabola

بعد تحديد جميع نقاط التماس مثل P، P′ على القطع المكافئ، استخدم مثلثا قائم الزاوية، أو مربع النجار Carpenter's Sequare لإنشاء أعمدة على كل من هذه النقاط. يطلق على الأعمدة الموجودة على المنحنى وعند نقاط التماس

متعامدات Normals. إن غلاف جميع هذه المتعامدات يعرف منشئ المنحنى. يعني. إن المتعامدات بعدئذ تكون مماسة للمنشئ الخاص بالمنحنى المعطى. إذن، منشئ إلى القطع المكافئ يمكن أن يعرض بوصفه منحنى بطرف واحد one cusped ويطلق عليه القطع المكافئ- شبه مكعب Semi-cubic Parabola. ويظهر هذا في شكل 2.



شكل (2)

لإدراك المنشئ المرسوم بصورة صحيحة: استخدم تناظر القطع المكافئ حول المحور

إذن. المتعامدات إلى P و 'P تتقاطع عند النقطة Q على محور التناظر

منحنيات الدواسة إلى القطع المكافئ
Pedal Curves to the Parabola

يظهر في الشكل 3 منحنى معلوم، C، والنقطة المحددة F، على. أو في جوار C. بإسقاط أعمدة من النقطة F على كل مماسات المنحنى، سنجد بأن محل قدم الأعمدة، P، يعرف منحنى الدواسة Pedal Cuve، إلى المنحنى المعلوم وبالنسبة للنقطة F. وبالنسبة لمنحنى معلوم، هناك خيارات متعددة لـ F والتي ستنتج منحنيات دواسة مختلفة.


شكل (3)

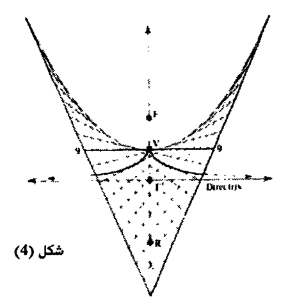
والآن اعتبر البؤرة F، للقطع المكافئ في شكل 1 وستأخذ نقطة ثابتة بعين الاعتبار. فإذا أسقطت أعمدة على كل من الأعمدة، سيلاحظ الطلبة بأن محل قدم هذه الأعمدة هو المستقيم 9-9. يعني. المماس إلى الرأس هو منحنى الدواسة إلى القطع المكافئ بالنسبة إلى بؤرته. وبالعكس، يمكن بيان أن العمود المقام على المماس مع 9-9 سوف يمر خلال النقطة F. إن الحقيقة الأخيرة تبرر التقانة المستخدمة مبكرا في تحديد موقع بؤرة القطع المكافئ (ينبغي أن يتذكر الطلبة بأنه لكي نبرهن على محل ما، يجب أن نبرهن على قضية ذات شرطين).

بعد ذلك دع V تكون النقطة الثابتة. ونسقط من النقطة V أعمدة على المماسات التي حصلنا عليها في شكل 1. إن محل القدم قد تم عرضه في شكل 4 لمنحنى يحوي طرفا مستدقا عند النقطة V، ويناظر المحور.

لقد ذكرنا، بدون برهان، بأن المحل هو البادئ Cissoid للـ Diocles. حدد موقع النقطة 'F على المحور، تحت V، بحيث أن 'FV=VF. ثم ارسم مستقيما يمر بالنقطة 'F ويوازي 9-9. إن هذا المستقيم يمثل الخط الدليلي للقطع المكافئ Parabola's Directrex، ويمكن عرضه بوصفه الخط المحاذي asymptotic line الذي يقارب البادئ Cissoid.

قد ترغب عند هذه النقطة فتح باب المناقشة حول الخصائص المختلفة للقطع المكافئ، مثل خصائصه الانعكاسية. كما تستطيع أيضاً تعريف القطع المكافئ بدلالة المحل، بحيث يكون الاتجاه والبؤرة معلومين.

إذن نستطيع القول بأن القطع المكافئ هو عبارة عن نقاط المحل التي تبعد بمسافات متساوية عن نقطة ما (البؤرة)، ومستقيم (الخط الدليلي)، الذي لا يحتوي النقطة. إن طي الورق الشمع سوف يعرض بوضوح هذا المحل الهندسي. ارسم مستقيما ونقطة على قطعة ورق مشمع. ثم أبدا بطي الورقة، بصورة متكررة، بحيث أن النقطة تقع على المستقيم. إن الثنيات الناتجة Creases تؤلف غلاف القطع المكافئ.



شكل (4)

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة برسم منحنى دواسة إضافية للقطع المكافئ.

واخبرهم حول ضرورة استخدام ما يأتي كدليل يسترشد به:

أ- لتكن النقطة F′ النقطة الثابتة. وسوف يشاهد منحنى الدواسة على يمين الشجيرة Strophoid.

ب- حدد موقع R (شكل 4)، انعكاس F خلال الخط الدليلي بحيث أن FF′=F′R. ودع النقطة R تكون النقطة الثابتة. سيكون منحنى الدواسة هو خط دليل التقسيم الثلاثي لماكلورين Trisectrix of MacLaurin.

ج- إن الدواسة المقابلة لمنحنى معلوم هي المحل الهندسي لقاعدة الأعمدة المقامة من نقطة ثابتة معلومة على المتعامدات المقامة على منحنى معلوم في شكل 2، حيث تكون F نقطة ثابتة، حدد محل الدواسة المقابلة. ومن النقطة F، اسقط أعمدة على كل متعامد قمت برسمه لتحصل على المنشئ. إن المحل الهندسي للدواسة المقابلة هو عبارة عن قطع مكافئ والذي تلتقي نقطة انقلابه مع F.

د- عزز بواسطة القياس بأن محل الدواسة المقابلة في C يناظر المحل الهندسي لنقاط منتصف قطعة التعامد من نقطة التماس على القطع المكافئ إلى نقطة تقاطعه مع محور تناظر القطع المكافئ.

مرجع Reference

Lockwood, E.H., A Book of Curves, Cambridge University Press, 1961.

Zwikker, c., The Advanced Geometry of Plane Curves and their Application, Dover Publication, 1963.

Posamentier, A.S., and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concept in Mathematics, Thousand Oaks, AC: Corwin, 2001



تطبيق التطابق على قابلية القسمة
Application of Congruence to Divisibility

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء عدد صحيح، سيقوم الطلبة بتحديد عوامله الأولية دون استخدام أي نوع من القسمة.
2. سيقوم الطلبة بصياغة قواعد لاختبار قابلية القسمة بواسطة الأعداد الطبيعية غير تلك التي عرضت في هذه الوحدة.

التقييم السابق Preassessment

1 ليقم الطلبة بإيجاد العوامل الأولية لكل مما يأتي:

(أ) 144 (ب) 840 (ج) 360

2. ليقم الطلبة ببيان، دون استخدام أي نوع من القسمة، أي من الأعداد الآتية يقبل القسمة على 2، 3، 5:

(أ). 234 (ب) 315

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بتقديم مفهوم تطابقات العدد. إن أي عددين يمتلكان نفس الباقي عندما يقسمان على 7 يقال عنهما تطابق معامل 7 *Congruent Modulo 7*، على سبيل المثال، 23 و 303 لهما نفس الباقي عند القسمة على 7. لذا تقول بأن 23 و 303 يمثلان تطابق معامل 7. إن هذه العبارة يمكن تمثيلها بالرموز كما يأتي: $23 \equiv 303 (\mathrm{mod}\ 7)$

بصورة عامة، العددان a، b يعدان تطابق معامل m (تكتب بصيغة $a \equiv b\ (\mathrm{mod}\ m)$) إذا كان لهما نفس الباقي غير السالب عندما يقسمان على عدد صحيح $m \neq 0$.

وبسبب هذا التعريف، سيكون لدينا التضمين الثنائي الآتي:

$$a \equiv b \ (\text{mod } m) \Leftrightarrow \begin{cases} a = mk + r \\ \qquad\qquad 0 \le r < |m| \\ b = mk' + r \end{cases}$$

إن الرمز "≡" قد استخدمه للمرة الأولى عام 1801 الرياضي الألماني ذائع الصيت كارل فردريش كاوس (1777–1855). وقد اقترح الرمز لمشابهته رمز المساواة التقليدي، ولا علاقة له بالتطابق الهندسي. إن العلامة "≢" تعني "غير متطابق مع".

مثال **Example 1**:

$17 \equiv -4 \ (\text{mod } 7)$

لأن
$$17 = 7 \cdot 2 + 3$$
$$-4 = 7(-1) + 3$$

في هذا المثال، ينبغي علينا استخدام (−1) كحامل قسمة. وإذا استخدمنا 0، سيكون المتبقي سالبا إزاء تعريف التطابق.

مثال **Example 2**: $a \equiv 0 \ (\text{mod } a)$ إن هذا صحيح لأن كلا منهما يعطي نفس الباقي 0.

تعريف آخر للتطابقات

Another Definition of Congruences

يعد العددان متطابقان بمعامل m، إذا كان الفرق بينهما يقبل القسمة على m. نريد البرهنة على أن :

$$a = b(\text{mod } m) \Leftrightarrow a - b = \overline{m}$$

(تقرأ $\overline{m}$ "مضاعف لـ m").

البرهان **Proof**

إذا كان:

$$a \equiv b \ (\text{mod } m) \Leftrightarrow \begin{matrix} a = mk_1 + r \\ b = mk_2 + r \end{matrix}$$

بالطرح: $a - b = m(k_1 - k_2)$ أو $a - b = \overline{m}$

وعليه:

$$a \equiv b \ (\text{mod } m) \Rightarrow a - b = \overline{m}$$

وعلى العكس: إذا كان

$$a - b = \overline{m} \qquad \Rightarrow a = b + \overline{m}$$
$$\Rightarrow a = b + km \qquad (1)$$

ولكن
$$b = mk' + r \qquad (2)$$

إذن من المعادلتين (1)، (2) سيكون لدينا:

$$a = b + km \qquad = (mk' + r) + km$$
$$= m(k' + k) + r$$
$$= mk' + r \qquad (3)$$

من المعادلتين (2) و (3) سيكون لدينا بعدئذ،

$$a = mk'' + r$$

$$b = mk' + r$$ وعليه $$a \equiv b \ (\text{mod } m)$$

إذن: $a - b = \overline{m} \Rightarrow a \equiv b \ (\text{mod } m)$

وعليه

$$\text{Q.E.D}, \ a \equiv b \ (\text{mod } m) \Rightarrow a - b = \overline{m}$$

والآن ينبغي على الطلبة أن يكونوا على أهبة الاستعداد لكي نأخذ بعين الاعتبار ما يأتي:

بعض الخصائص الأولية للتطابقات

Some Elementary Properties of Congruences

إذا كان، $a \equiv b \ (\text{mod } m)$ & $c \equiv d \ (\text{mod } m)$، بعدئذ:

$$a + c \equiv b + d \ (\text{mod } m) \qquad (I)$$
$$ac \equiv bd \ (\text{mod } m) \qquad (II)$$
$$ka \equiv kb \ (\text{mod } m) \qquad (III)$$ لكل عدد صحيح k

إن هذه الخصائص نشأت عن تعريف التطابقات. وينبغي أن نبرهن (II)، أما البقية فيمكن البرهنة عليها بنفس الطريقة الآتية:

بما أن:

$$a \equiv b \ (\text{mod } m) \Leftrightarrow a = b + \overline{m} \qquad (1)$$
$$c \equiv d \ (\text{mod } m) \Leftrightarrow c = d + \overline{m} \qquad (2)$$

بعدئذ، نضرب (1) و (2):

$$ac = bd + b\overline{m} + b\overline{m}$$
$$= bd + (b+d)\overline{m}$$
$$= bd + \overline{m}$$

وعليه،
$$ac \equiv bd \ (\text{mod } m)$$

إن جانبا ممتعا آخر لنظام العامل Modular System هو بواقي الأسس Power Residues. إن باقي الأس لعدد ما (a) بالنسبة إلى عدد آخر m هو عبارة عن البواقي التي نحصل عليها عندما تقسم الأسس المتتالية لـ a: $a^0, a^1, a^2, \ldots$ على m.

مثال **Example 3**: جد بواقي الأسس للعدد 5 بالنسبة إلى العدد 3 بما أن:

$$5^0 : 3 = 1 : 3 = 0.3 + 1$$

وعليه $r_0 = 1$

$$5^1 : 3 = 5 : 3 = 1.3 + 2$$

وعليه $r_1 = 2$

$$5^2 : 3 = 25 : 3 = 8.3 + 1$$

وعليه $r_2 = 3$

$$5^3 : 3 = 125 : 3 = 41.3 + 2$$

وعليه $r_3 = 2$

ويستمر الأمر على هذا المنوال.

وعليه، فإن بواقي الأس 5 بالنسبة لـ 3 ستكون: 1، 2، 1، 2،... ليأخذ الطلبة بعين الاعتبار سبب عدم ظهور سوى العددين 1، 2 في هذا التتابع.

مثال Example 4:

جد بواقي الأس 10 معامل تطبيق 2. كذلك بين التطابقات المختلفة. يوجد لدينا:

$10^0 : 2 \;= 1 : 2 \;= 0.2 + 1$

وعليه $r_0 = 1$

$10^1 : 2 \;= 10 : 2 \;= 5.2 + 0$

وعليه $r_1 = 0$

$10^2 : 2 \;= 100 : 2 = 50.2 + 0$

وعليه $r_2 = 0$

من أجل هذا فإن بواقي الأس هي: 1. 0 . 0 ، ....

إذن ستكون التطابقات كما يأتي:

$10^0 \equiv 1, \quad 10^1 \equiv 0, \quad 10^2 \equiv 0, \ldots, (\text{mod } 2)$

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تبرير مظهر هذا التتابع. وبعد أن يتقن الطلبة مفهوم الأس، ينبغي أن يكونوا على أهبة الاستعداد لتأمل الخصائص المختلفة لبواقي الأس.

I) عندما يقسم باقي الأس a^0 على m يكون دائما 1.

البرهان Proof: لدينا $a^0 : m=1 : m=0.1+1$، يعني متبقي مقداره 1. إذن $a^0 \equiv 1$.

II) إذا كان باقي الأس صفرا، بعدئذ ستكون بواقي الأس اللاحقة مساوية للصفر أيضاً.

البرهان Proof: افترض أن a^h يعطي باقي أس مقداره صفرا عندما يقسم على m. بعدئذ $a^h \equiv 0 \ (\text{mod } m)$. إذا ضرب الطرفان بالعدد a، سيكون لدينا :

$a.a^h \equiv a.0 \ (\text{mod } m)$ أو $a^{h+1} \equiv 0 \ (\text{mod } m)$. وعليه فإن $a^{h+1}, a^{h+2}, \ldots$ سوف تعطي باقي أس مقداره صفر أيضاً. وهذا أمر لا غبار عليه في مثال 4 أعلاه.

معيار لقابلية القسمة Criteria for Divisibility

ليأخذ الطلبة بعين الاعتبار أي عدد من الأعداد $N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ مكتوبا بالأس العشري. وعليه،

$$N = a_0 10^0 + a_1 10^1 + a_2 10^2 + .. + a_n 10^n.$$

لتكن $r_0, r_1, \ldots, r_n$ بواقي الأس $10 (\text{mod } m)$. وعليه فإن:

$$10^0 \equiv 1, 10^1 \equiv r_1, \ldots, 10^n \equiv r_n \ (\text{mod } m)$$

ليقم الطلبة بضرب كل تطابق بـ $a_0, a_1, \ldots a_n$، على التوالي لنحصل على:

$a_0 10^0 \equiv a_0, a_1 10^1 \equiv a_1 r_1, \ldots, a_n 10^n = a_n r_n \ (\text{mod } m)$

وإذا تم جمعها حسب الترتيب، سنحصل على:

$a_0 10^0 + \ldots + a_n 10^n \equiv a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n \ (\text{mod})$

إذن،

$N \equiv a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots a_n r_n$

ومن التطابق الأخير، N ستكون قابلة للقسمة على m فقط إذا كان $a_0 + a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n$ يقبل القسمة على m. ويمكن أن تستخدم هذه العبارة لإيجاد معيار مختلف لقابلية القسمة بالطريقة الآتية:

قابلية القسمة على 2 و 5 Divisibility by 2 and 5

لدينا بالنسبة لأي عدد N أنه:

$$N \equiv a_0 + a_1 r_1 + .. + a_n r_n \ (\text{mod } m).$$

وإذا اخذ الطلبة بعين الاعتبار m=2 (أو m=5)، وسيكون لديهم $r_1 = 0$ لأن :

$$10^1 \equiv 0 \ (\text{mod } 2) \quad \text{أو} \quad (\text{mod } 5)$$

وعليه $r_2=0, r_3=0, \ldots$. إذن سيكون لديهم (5 أو mod 2) $N \equiv a_0$. وهذا يعني بأن: العدد يقبل القسمة على 2 أو 5، وإذا كان فقط، إذا كانت المرتبة الأخيرة فيه تقبل القسمة على 2 أو 5.

قابلية القسمة على 3 أو 9 Divisibility by 3 and 9

لدينا بأن:

$$10^0 \equiv 1, 10^1 \equiv 1, \ldots (\text{mod } 3 \text{ أو } 9).$$

وبما أن :

$$N \equiv a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n \ (\text{mod } m).$$

إذن،

$$N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad (\text{mod } 3 \text{ أو } 9).$$

من أجل هذا فإن عدد ما يقبل القسمة على 3 أو 9، فقط وإذا كان فقط مجموع مراتبه العشرية يقبل القسمة على 3 أو 9.

قابلية القسمة على 11 Divisibility By 11

بما أن:

$$10^0 \equiv 1, \quad 10^1 \equiv -1, 10^2 \equiv 1, \quad \ldots, (\text{mod } 11).$$

إذن،

$$N \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n \ (\text{mod } 11).$$

وعليه، فإن عدد ما يقبل القسمة على 11، فقط وإذا كان فقط الفرق بين مجموعي المراتب المتقابلة يقبل القسمة على 11.

إن الطريقة السابقة سوف تأخذ بيد الطالب نحو تطوير قواعد مشابهة لاختبار قابلية القسمة على أعداد أولية أخرى. وينبغي أن يؤكد على، ويبرر بأن عدد ما يقبل القسمة على عدد مركب إذا كان يقبل القسمة على كل من عوامله الأولية – النسبية.

من أجل هذا، إذا أردنا تحديد فيما إذا كان هناك عدد ما يقبل القسمة على 6، يجب علينا أن نختبر قابليته للقسمة على العددين 2 و 3 فقط.

وبتوظيف المناقشة المناسبة سيكون الطلبة قادرين على أعداد قائمة تفصيلية بقواعد اختبار قابلية القسمة، بالإضافة إلى تطوير عينة أكثر عمقا لبعض مبادئ وأوليات نظرية التطابقات.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بإنجاز التمارين الآتية:

1. قم بصياغة قاعدة لاختبار القسمة على:

(أ) 4 و 25 (ب) 7

(ج) 13 (د) 101

2. حدد العوامل الأولية لكل مما يأتي:

(أ) 1220 (ب) 315

(ج) 1001

3. جد المعيار لقابلية القسمة على 6 و 11 في الأساس 7.

93 حل المسائل - استراتيجية معاكسة
Problem Solving - A Reverse Strategy

طالما يسئل معلموا الرياضيات " كيف تستطيع معرفة أي منهج ينبغي أن تتبناه لكي تبرهن على أن قطعتي المستقيم هاتين متوازيتان؟" بصورة عامة. يريد المعلم اعتقاد أن الخبرة تحث الاستنتاج الصحيح. بيد أن هذا الأمر لا يمتلك أي قيمة في ميزان فهم الطالب الذي آثار السؤال.

إن الطالب أو الطالبة يرغبان بتعلم طريقة إجرائية يستطيعان اتباعها في حل المسألة التي تشخص امامهما. لذا فإن المعلم الحكيم سيجد بأن الواجب عليه وصف استراتيجية معاكسة للطالب تأخذ بيده للبداية بالاستنتاج المطلوب واكتشاف كل مرحلة من المراحل اللاحقة بتتابع يضمن نجاحها.

هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء حالة مسألة ما والتي توجه ذاتها صوب حل يفتقر إلى استراتيجية معاكسة. سيحاول الطلبة توظيف هذه الاستراتيجية لحل المسألة بنجاح.

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة بحل المسالة الآتية:

إذا كان مجموع عددين يساوي 2، وحاصل ضربهما هو 3، جد مجموع مقلوب هذين العددين.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

لا تعد الاستراتيجيات المعاكسة أمرا جديدا فقد أخذها بعين الاعتبار بابوس Pappus الإسكندرية حوالي 320 بعد الميلاد. ونجد في الكتاب VII من مجموعة بابوس وصفا تفصيليا، لحد ما، لطرائق "التحليل Analysis" و "التركيب Synthesis". وقد زودنا T.L. Heath في كتابه:

A Manual of Greek Mathematic, Oxford University Press, 1931, P.452.3

بترجمة دقيقة لتعاريف بابوس لهذه الاصطلاحات.

يأخذ التحليل ما تبحث عنه كما لو انه أمر مسلم به، فيعبر منه وخلال نتائجه المتتابعة إلى شيء يسلم به كنتيجة للتركيب؛ وبالنسبة للتحليل فأننا نفترض بأن ما نبحث عنه كما لو انه موجود فعلا، فنبحث عن ما هيته التي نجم عنها، ومرة ثانية فإن الحالة السابقة هي سبب ما سوف يحدث لاحقا، وهلم جرا، لحين، وبواسطة تراجع خطواتنا القهقرى، سوف نصل إلى شيء معروف مسبقا أو ذو صلة بمرتبة المبادئ الأولية، ونطلق على مثل هذا المنهج تحليل كما لو انه حل المسألة بطريقة ارتجاعية.

ولكن في "التركيب"، تنعكس العملية، فنتناول ما تم التوصل إليه أخيراً في عملية التحليل، ونباشر عملية إعادة ترتيب مكوناته الطبيعية مثل التتابع المنطقي لما كان متقدما، وربطها على التوالي، الواحدة مع الأخرى، لنصل أخيراً إلى إنشاء نسق لما نريد الوصول إليه، وهو ما نطلق عليه التركيب.

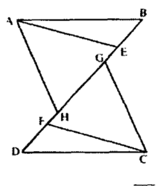
ولكن لسوء الحظ لم تلق هذه الطريقة الاهتمام والتأكيد الذي تستحقه في مادة الرياضيات الصفية. وسوف تعزز هذه المناقشة قيمة الاستراتيجية المعاكسة في حل المسائل.

ولكي نحسن فهم هذه التقانة والتي تختص بحل المسائل، فإننا سنقوم بعرض مجموعة من المسائل المناسبة. حيث ستسهم

مناقشة حلولها في مساعدة الطلبة على الوصول إلى فهم اعمق بهذه الطريقة.

دعنا في البداية نتأمل المسالة البسيطة الآتية من الهندسة الأولية

مسألة 1 Problem:



المعطى: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

$\overline{AB} // \overline{DC}$

$\angle BAH \cong \angle DCG$

$\overline{BEGHFD}$

$\overline{GE} \cong \overline{HF}$

برهن **Prove**: $\overline{AE} // \overline{CF}$

الحل Solution:

إن الأفكار الأولى التي تراود ذهن الطالب الذي يحاول العمل على هذا البرهان ستتوجه صوب تأمل المعلومات المتوفرة، وما هي النقاط التي ينبغي البرهنة عليها. وبعد اخذ المعلومات المتوفرة بعين الاعتبار، فإن الطالب ذو المهارات المتدنية سوف يستمر بصورة عمياء، في البرهنة على تطابق قطع المستقيمات، والزوايا، والمثلثات لحين (إذا حصل) سيصل الاستنتاج المطلوب.

من جهة ثانية، فإن الطالب الذي يتمتع بمهارات عالية، وبعد أن يتأمل المعلومات المتوفرة لفترة قصيرة من الزمن، سوف يطالع فورا الاستنتاج المطلوب ويبدأ العمل بصورة معاكسة من ذلك الاستنتاج ("تحليل"). في البداية سيتساءل هذا الطالب عن ماهية الطرق المتوفرة للبرهنة على توازي المستقيمات، وهذا سيؤدي غالبا إلى البرهنة على تطابق الزوايا. وسيدرك الطلبة الأذكياء، عند هذا البرهان، بأنهم إذا كانوا قادرين على برهنة أن $\angle AED \cong \angle CFB$ ، بعدها سيكونون قادرين على برهنة أن $\overline{AE}$ يوازي $\overline{CF}$. ولكن كيف يستطيع الطلبة البرهنة على أن $\angle AED \cong \angle CFB$؟ في ضوء التدريب والمهارات التي تلقاها الطلبة في الصف، فإن معظمهم سوف يتعامل –بصورة عامة– مع هذا السؤال بمحاولة إيجاد زوج من المثلثات المتطابقة، والتي تحوي على الزاويتين $\angle AED$ و $\angle CFB$ كزوج من الزوايا المتقابلة. وبالاستمرار على هذا المنهج المعاكس، ينبغي على الطلبة أن يحددوا، الآن، هذا الزوج من الزوايا المتطابقة. إن من المفيد جدا إذا استطاع الطلبة البرهنة على أن $\Delta GFG \cong \Delta AEH$، لأن هذين المثلثين يمتلكان الزاويتين $\angle AED$ و $\angle CFB$ كزوج من الزوايا المتقابلة. فهل يمكن البرهنة على أن هذين المثلثين متطابقان؟ ومن الجلي عدم وجود مثل هذه الإمكانية. إن جميع الطلبة لديهم معرفة عن هذين المثلثين وأن $\overline{HE} \cong \overline{GF}$. باستخدام هذا النوع من الاستدلال العقلي هو/أو هي سيفلحان قريبا في البرهنة على أن $\Delta ABH \cong \Delta CDG$، والتي ستساعدهما على برهنة أن $\Delta AEH \cong \Delta CFG$. بعدئذ، وبتتبع خطوات الاستدلال المعاكس بالترتيب المقلوب ("التركيب") سيبلغ الطلبة الاستنتاج المطلوب بسهولة.

يبدو واضحا بأن الاستراتيجية المعاكسة كانت مساعدة ومفيدة في إرساء مسار نحو الاستنتاج المطلوب. وقد اصبح المنهج المعاكس لحل المسائل أكثر رسوخا، بعد أن أصبحت الحلول الناتجة أكثر أناقة وامتيازا معنويا. كمثال على ذلك، دعنا نأخذ بعين الاعتبار المسألة الآتية والتي قد طرحت في التقييم السابق.

مسألة 2 Problem

إذا كان مجموع عددين يساوي 2، وحاصل ضربهما هو 3، جد مجموع مقلوب هذين العددين.

الحل Solution

إن أول رد فعل لدى الطالب، بعد قراءة هذه المسألة سيكون بأعداد المعادلتين $x+y=2$، $xy=3$. إن الطالب المتمرس في مادة الجبر سوف يتهيأ مباشرة لحل هاتين المعادلتين آنيا. قد يحل/تحل المعادلة الأولى بدلالة y ليحصل على $y=2-x$، بعدئذ سيقوم بالتعويض في المعادلة الثانية بحيث أن $x(2-x)=3$ أو $x^2-2x+3=0$. ولما كان $x=1\mp\sqrt{-2}$ فإن العددين سيكونان $1+i\sqrt{2}$ و $1-i\sqrt{2}$. والآن سيكون مجموع مقلوبيهما:

$$\frac{1}{1+i\sqrt{2}}+\frac{1}{1-i\sqrt{2}}=\frac{(1-i\sqrt{2})+(1+i\sqrt{2})}{(1+i\sqrt{2}).(1-i\sqrt{2})}=\frac{2}{3}$$

إن هذا الحل ممتاز دون شك.

وإذا استخدم الطلبة الاستراتيجية المعاكسة ("التحليل")، سيقومون بداية بتفحص الاستنتاج المطلوب، يعني، $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. إن مجموع هذين الكسرين هو $\frac{x+y}{xy}$. إن المعادلتين الأصليتين تظهران بسط ومقام هذا الكسر، وهذا سوف ينتج الجواب $\frac{2}{3}$ مباشرة. من الواضح انه بالنسبة لهذه المسألة المخصوصة، وجود تفوق ملحوظ للاستراتيجية المعاكسة على الطريقة التقليدية – المباشرة.

مسألة Problem 3

إذا كان مجموع عددين 2، وأن حاصل ضربهما 3، جد مجموع مربعي هذين العددين.

الحل Solution

لإيجاد مجموع مربعي مقلوب (العددين المذكورين في المسألة أعلاه) باستخدام المنهج المعاكس، ينبغي أن يأخذ الطلبة بعين الاعتبار، في البداية. الاستنتاج $(\frac{1}{x})^2+(\frac{1}{y})^2$ أو $(\frac{1}{x^2})+(\frac{1}{y^2})$ مرة ثانية يجب على الطلبة جمع الكسرين للحصول على $\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$. وعليه فإن مقام الجواب هو $(xy)^2 = 9$. ولكن احتساب البسط يمتاز بصعوبة ملحوظة. لذا ينبغي على الطلبة، الآن، إيجاد قيمة x^2+y^2. مرة ثانية يجب أن يعاود الطلبة بالنظر إلى وراء. كيف يستطيعون توليد x^2+y^2؟ سيتعجل الطالب في اقتراح أن $(x+y)^2$ سوف ينتج عنه $x^2+2xy+y^2$، والذي ينتج جزئيا x^2+y^2.يضاف إلى ذلك أن $(x+y)^2=(2)^2=4$ وأن $2xy=2\text{-}3=6$. إذن $x^2+y^2=-2$. وعليه تكون المسألة قد تم حلها كما يأتي:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\frac{-2}{9}$$

يمكن توظيف طريقة مشابهة لإيجاد قيمة $(\frac{1}{x})^3+(\frac{1}{y})^3$ من المعادلتين الأصليتين $x+y=2$، $xy=3$. مرة ثانية، فإن البدء بالاستنتاج والعمل بصورة معاكسة $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}$ نظراً لأن الطلبة يعلمون مسبقا $(xy)^3=(3)^3=27$، فانهم بحاجة فقط إلى إيجاد قيمة x^3+y^3. وكيف يستطيعون توليد x^3+y^3؟

من المعادلة: $(x+y)^3 = x^3+y^3+3x^2y+3xy^2$

نحصل على: $x3+y3 = (x+y)^3 - 3xy\ (x+y)$

$x3+y3 = (2)^3 - 3(3)(2)$

$x3+y3 = -10$

وعليه سيكون:

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{x^3+y^3}{(xy)^3}=\frac{-10}{27}$$

يمكن أن تستخدم هذه الطريقة، أيضاً، في إيجاد مجموع أسس اكبر لهذه المقلوبات.

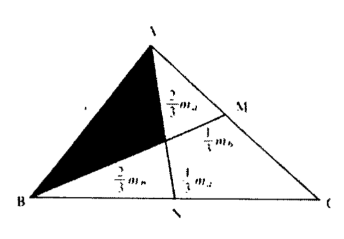
إن مسألة أخرى، والتي يؤدي حلها بنا إلى استراتيجية معاكسة لطيفة ("التحليل")، تتضمن إنشاءات هندسية.

مسألة Problem 4

أنشئ مثلثا لديك طول مستقيميه المتوسطين m_a، m_b وطول c الذي يمثل الضلع التي تعد نقطتا نهايته نقطة نهاية لكل مستقيم متوسط.

الحل Solution

بدلا من إنجاز الإنشاء المطلوب فورا، يجب أن يكون الطلبة أكثر حكمة في استخدام الاستراتيجية المعاكسة. حيث يستطيع الطلبة افتراض الإنشاء وتفحص النتائج.



يدرك الطلبة بسرعة بأنهم يستطيعون إنشاء المثلث المظلل – أعلاه– كما انهم يستطيعون الحصول على أطوال أضلاعه $\left(c,\frac{2mb}{3},\frac{2ma}{3}\right)$. بعدئذ يمكن تثبيت مواقع النقطتين M، و N باستخدام خاصية مركز الثقل. بعد ذلك يمكن أن تحدد النقطة C بتقاطع $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BN}$. إن البدء من الاستنتاج والعمل بأسلوب معاكس، قد جعل الطلبة ينجحون في صياغة خطة لإنشاء المثلث المطلوب، بتتبع الخطوات في اتجاه معاكس ("التركيب").

وبالرغم من وجود كثير من المسائل يمكن تبسيط حلولها، بشكل ملحوظ، باستخدام الاستراتيجية المعاكسة، فهناك بالمقابل عدد كبير من المسائل تكون الطريقة التقليدية – المباشرة للحل مناسبة لها. إن من الأمور الطبيعية بالنسبة للطالب محاولة العمل على المسألة بالأسلوب المباشر. والآن بات لزاما علينا، نحن المدرسين، تشجيع طلبتنا على ترك الطريقة المباشرة عندما يصعب نوال الحل، واللجوء إلى تطبيق الحل المعاكس.

إن بعض المسائل تتطلب استراتيجية معاكسة بصورة جزئية، لذا فإن المفيد بالنسبة لهذه المسائل المباشرة بالاستنتاج ثم العمل ارتجاعيا لحين إنشاء مسار واضح نحو الاستنتاج.

دعنا نتأمل المسائل الآتية:

مسألة Problem 5

جد حل المعادلة الآتية: $(x\text{-}y^2)^2+(x\text{-}y\text{-}2)^2=0$ حيث x، y أعداد حقيقية.

الحل Solution

إن طالب مادة الجبر سيستخدم الأسلوب المباشر لحل هذه

المعادلة. وبعد تربيع كل متعدد حدود بصورة منفردة، سيزداد الارتباك!.

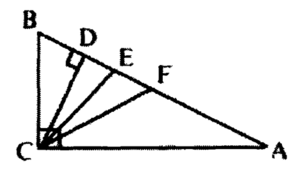
إن الطلبة الذين تعرفوا، سابقا، على الاستراتيجية المعاكسة سيحاولون بعدئذ تحليل الحل المعد للمعادلة. ينبغي أن تكون قيمتي x و y بحيث يكون مجموع مربعات متعددات الحدود يساوي صفرا. كيف يمكن لمجموع مربعات متعددات الحدود أن يساوي صفرا؟ يستطيع الطلبة الإجابة على هذا السؤال بقول أن $x-y^2=0$ وأن $x-y-2=0$. لغاية هذه النقطة استخدم الطلبة الاستراتيجية المعاكسة ("التحليل"). ولكن، ينبغي أن يستمر الطلبة الآن بأسلوب مباشر ("التركيب") لحل المعادلتين $x-y^2=0$ و $x-y-2=0$ انيا.

ناقش جورج بوليا George Polya في كتابه البحث عن الحل How to Solve It الطريقة الارتجاعية في حل المسائل والتي تشابه لحد كبير الاستراتيجية المعاكسة التي نوقشت في هذا المقال. وقد أكد بوليا على أهمية دور المدرس في عرض هذه الطرق على الطلبة عندما نص في كتابه على أن "هناك نوع من المقت والكراهية السيكولوجية لهذا الترتيب المعاكس، والذي قد يمنع الطالب ذو القابلية الجيدة من فهم الطريقة إذا لم يحسن عرضها بصورة واضحة".

إنها مسؤولية معلم الرياضيات في بذل جهد مدرك للتأكيد على أهمية، وفوائد، والمحددات المحتملة للاستراتيجية المعاكسة في حل المسائل.

التقييم اللاحق Postassessment

1. إذا كان $x+y=2$ وأن $xy=3$، جد $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}$.
2. أنشئ مثلث لديك طول ضلعين من أضلاعه وطول الارتفاع إلى أحد هذين الضلعين.
3. ليستخدم الطلبة التحليل والتركيب لبرهنة ما يأتي: "في المثلث قائم الزاوية ΔABC، $\overline{CF}$ هو المستقيم المتوسط المرسوم إلى الوتر $\overline{AB}$، و $\overline{CE}$ هو المستقيم المنصف للزاوية $\angle ACB$، و $\overline{CD}$ هو الارتفاع للضلع $\overline{AB}$. برهن أن $\angle DCE \cong \angle ECF$."



4. احسب: $x^5+\frac{1}{x^5}$، إذا كان $x^2+\frac{1}{x^2}=7$ (الجواب: ± 123).

مرجع Reference

Posamentier, A. S., S. Krulik, Problem-Solving Strategies of Efficient and Elegant Solution:

A Resource for the Mathematics Teachers, Thousand Oaks, CA: Corwin, 1998.



المراتب العشرية والكسور في أساسات أخرى
Decimals and Fractions in Other Bases

هدف الأداء Performance Objective

سيسوغ الطلبة المراتب العشرية المتكررة Repeating Decimals والكسور المكررة Repeating Fractions في أساسات أخرى.

التقييم السابق Preassessment

اسأل الطلبة إيجاد العدد العشري الذي يكافئ $\frac{87}{99}(=\frac{87}{10^2-1})$. وتحدى الطلبة بعرض مراتب عشرية متكررة بواسطة عدد نسبي (قياسي) Rational بسيط.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

بصورة عامة تصنف الأعداد العشرية إلى أعداد عشرية متكررة، وغير متكررة. ثم تقسم الأعداد العشرية المتكررة إلى أعداد عشرية منتهية terminating وغير منتهية Non-terminating وغالبا ما يدرك الطلبة مباشرة بأن المراتب العشرية المنتهية تعرض عدداً نسبياً (قياسياً) خاصاً. لكن طبيعة العدد الكسري – غير المنتهي هو أكثر إثارة للاهتمام. لقد بدأنا هذا الاستكشاف بتحديد أنفسنا إلى الكسور العشرية المتكررة – غير المنتهية: $.1212\overline{12}$ (الخط الذي يعلو آخر مرتبتين يظهر الرقمين المتكررين). ما نريد عمله هو عرض هذا الكسر العشري بواسطة كسر نسبي بسيط. فإذا افترضنا .... $x=.12\overline{12}$ وانه بعدئذ، .... $100x=12.12\overline{12}$ بطرح الأول من الأخير ينتج عنه المعادلة: $100x-x=12$ أو $x=\frac{12}{100-1}=\frac{12}{99}$. لقد وجدنا الآن بأن نسبة العرض للكسر ... 1212.

لا زالت عملية الاستكشاف مستمرة بنسق محدد، والآن لاحظ بأن $\frac{12}{99}+\frac{88}{99}=1$، ولكن إذا قمنا بإضافة الكسر العشري المكافئ

$$\begin{array}{r} .1212\overline{12} \\ +.878787 \\ \hline .9999\overline{99} \end{array}$$

وقد يظن المرء بأن $1.0=.9999\overline{99}$. لا ريب بأن تطبيق التقانة أعلاه سينجم عنه: $x=.9999\overline{99}$ وأن $10x=9.999\overline{9}$، وعليه فإن $10x-x=9$، وأن $x=\frac{7}{10-x}$، x=1.

إن هذا العرض التوضيحي سيرشدنا إلى نظرية مهمة مفادها: إن أي عدد كسري متكرر يمكن عرضه كعدد نسبي (يعني، نسبة بين عددين صحيحين، شريطة أن لا يساوي المقام صفرا).

البرهان Proof

ليكن وصف الكسر العشري المتكرر بالصيغة.... $a_1\ a_2\ \dots\ a_n$، حيث يمثل a_1 مرتبة عشرية وأن n يمثل طول التكرار. وكما فعلنا سابقا، دع ... $x=.a_1\ a_2\ \dots\ a_n$ وأن:

$$10^n x=a_1\ a_2\ \dots\ a_n.a_1\ a_2\ \dots\ a_n\ \dots$$

والآن

$$10^n x-x=a_1a_2\dots a_n$$
$$x(10^n-1)=a_1a_2\ \dots\ a_n$$
$$x=\frac{a_1a_2\dots a_n}{10^n-1}$$

إن المرتبة العشرية المتكررة قد تم عرضها الآن بواسطة عدد نسبي. وسيرغب الطلبة الآن بتأمل الكسور المتكررة بأساسات غير 10 (لن نطلق عليها بعد هذا كسورا عشرية!). افترض أن لدينا في الأساس 3 الكسر المتكرر: $.12\overline{12}$.. ينبغي أن نرشد الطلبة إلى طرح الأسئلة الآتية:

(1) هل يمكن عرض هذه الكسور المتكررة بواسطة عدد نسبي بالأساس 3؟.

(2) بصورة عامة، هل يمكن لأي كسر متكرر، بأي أساس كان، إن يوصف بواسطة عدد نسبي؟

ابدأ باستخدام المنهج الذي طبق مبكرا على الكسور العشرية المتكررة. دع $x=.12\overline{12}$. اسأل الطلبة كيف يمكن نقل النقطة الثلاثية Ternany Point مرتبتين إلى اليمين (لاحظ بأن النقطة الثلاثية في الأساس 3 تناظر الفارزة العشرية بالأساس 10). كيف

$3^2x = 12.1\overline{212}$. عن طريق طرح x نحصل على: $3^2x - x = 12$ ، $x(3^2-1) = 12$. إذن يمكن وصف الكسر المتكرر بالأساس 3 $x = \frac{12}{3^2-1} = \frac{12}{22}$ بواسطة عدد نسبي. دع الطلبة يلاحظون الصيغة المناظرة بالأساس 10. باستخدام هذه الأمور التوضيحية كنماذج Models وسوف نبرهن بأن الكسر المتكرر بأي أساس يمكن وصفه بواسطة عدد نسبي بذلك الأساس.

البرهان Proof

تأمل أي أساس B وأي كسر متكرر في ذلك الأساس: $.a_1a_2...a_n..$ ، حيث a_i هي المرتبة الكسرية للعدد وأن n هو عدد صحيح يمثل طول التكرار $x = .a_1a_2...a_n...$

$B^nx = a_1a_2 \ldots a_n.a_1a_2 \ldots a_n \ldots$

$B^nx - x = a_1a_2 \ldots a_n$

$$x = \frac{a_1a_2...a_n}{B^n-1}$$

وهذا يبرهن بأن أي كسر متكرر يمكن وصفه بواسطة عدد نسبي.

التقييم اللاحق Posatassessment

ليقم الطلبة بحل التمارين الآتية:

1. إذا كانت $x = \frac{123}{10^3-1}$ ما هو وصفها بالمرتبة العشرية؟
2. إذا كانت $x = \frac{11256}{7^4-1}$ ، صف x ككسر نسبي.
3. برر الكسر المتكرر $x = .23\overline{23}$ عندما تكون x بالأساس 10، أو 8، أو 5.

95 الأعداد المضلعة Polygonal Numbers

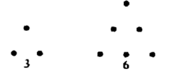
يمكن أن تدرس هذه الوحدة لصف يمتلك سيطرة كافية على المهارات الأساسية بمادة الجبر الأولي. وبما ان جل محتويات الوحدة توظف التفكير الحدسي، فإنها سوف تثمر عن درجة مقبولة من التدريب. وسيكون من المفيد جدا إذا كان الطلبة على علم كاف بالمتواليات الرياضية، وصيغة مجموع سلاسلها. ولكن إذا كان الطلبة يفتقرون إلى معرفة كافية بهذا الموضوع، ينبغي إعطاءهم الأوليات خلال فترة قصيرة ومعقولة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. لديك مجموعة من متعددات أضلاع منتظمة، وسيقوم الطالب بإيجاد العدد الذي يقابلها.
2. سيكتشف الطالب العلاقات بين اثنين، أو اكثر من أعداد مضلعة مختلفة لرتب معلومة.

التقييم السابق Preassessment

اكتشف البابليون الأوائل بأن بعضا من الأعداد التامة يمكن تقسيمها إلى أنماط من الوحدات. كانت هذه الصلة بين الحساب والهندسة موضع اهتمام اليونانيين القدماء. فعلى سبيل المثال، يمكن وصف العدد 3 بثلاثة نقاط تؤلف مثلثا، كما هو الحال بالنسبة للعدد 6.



أي نوع من متعددات الأضلاع يمكن أن يمثل العدد 4؟ والعدد 9 ؟. بعد أن يتوفر وقت كاف للطلبة لإيجاد متعددات الأضلاع المطلوبة، اسأل الطلبة عرض إجاباتهم.

إن الأعداد التي يمكن أن تكون ذات صلة بالأشكال الهندسية يطلق عليها أعداد مضلعة Polygonal Numbers أو رمزية Figurate.

استراتيجيات التدريس Teaching Strategies

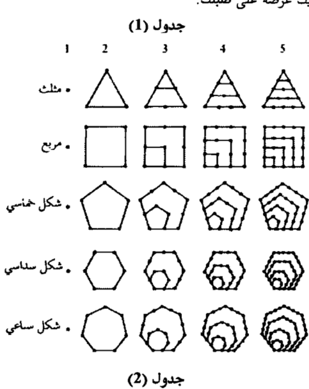
اخبر الطلبة بأن من السهل جدا إيجاد العدد الذي يقابل

شكل متعدد الأضلاع – معلوم، وإذا استطعنا العثور على صيغة بحيث من خلال المعلومات التي تخص أي شكل متعدد الأضلاع–منتظم، والمرتبة التي ينتمي إليها نستطيع الحصول على ذلك العدد منها.

ابدأ بأخبار الطلبة ماذا تعني مرتبة من متعددات الأضلاع–المنتظمة. وبالنسبة لأي متعدد أضلاع منتظم، فإن المرتبة تعني، في ضوء ترتيبها، العدد المضلع المناظر لها. على سبيل المثال، بالنسبة لمثلث ما. فإن مرتبة 1=3 (العدد المثلثي الأول)، مرتبة 2=6 (العدد المثلثي الثاني)، مرتبة 3=10، ... الخ.

والآن قم برسم الأشكال التي ستعرض كيفية الحصول على المراتب الخمسة الأولى للأعداد الرمزية – الأولى الخمسة (المثلثية، والمربعة، والمخمسة، والمسدسة، والمسبعة). ولاستثمار الوقت تستطيع استخدام جهاز الإسقاط الضوئي، أو يمكنك توزيع أوراق مذكرات مع الرسوميات، واصنع جدولا مقابلا لها. إن كل من الأشكال الرسومية والجدولين الآتيين يظهران بوضوح ماذا ينبغي عليك عرضه على طلبتك.

جدول (1)



جدول (2)

الشكل	عدد الأضلاع N	المرتبة r 1	2	3	4	5
مثلثي	3	1	3	6	10	15
مربع	4	1	4	9	16	25
مخمس	5	1	5	12	22	35
مسدس	6	1	6	15	28	45
مسبع	7	1	7	18	34	55

ينبغي أن يكون واضحا للطلبة بأن أعداد شكل للحصول على كل عدد: مثلثي، أو مربع، أو مخمس ... الخ، يعد مهمة بالغة الصعوبة. وبدلا من ذلك سوف نقوم بدراسة كيف أن الأعداد المضلعة المتعاقبة لمضلع ما يتبع بعضها الآخر، وبالنظر إلى التتابع الناتج، حاول الحصول على صيغة بالنسبة للمرتبة الرائية r^{th} Rank لكل متعدد أضلاع معلوم.

إذا ألقينا نظرة فاحصة على الصف الأول من الأعداد الرمزية التي تقابل الأعداد المثلثية، ثم عاودنا النظر إلى مراتبهم المقابلة (جدول 1) فسوف نلاحظ بأنه يمكن كتابتها كما يأتي:

$$1 = r$$
$$3 = (r-1) + r$$
$$6 = (r-2) + (r-1) + r$$
$$10 = (r-3) + (r-2) + (r-1) + r$$
$$15 = (r-4) + (r-3) + (r-2) + (r-1) + r$$

وإذا نظرنا إلى المراتب سنلاحظ أيضا بأن تعاقبها يؤلف تواليا حسابيا، وبأن كل عدد مثلثي بالمرتبة r يساوي مجموع المتوالية الحسابية $1,2,3,..,r$ من 1 إلى r.

إذن يمكننا الاستنتاج بأنه يمكن الحصول على العدد المثلثي الرائي r^{th} تسلسلا من المعادلة:

$$T_r = r(r+1) / 2$$

بعدئذ، دعنا نوجه أنظارنا نحو الأعداد المربعة:

$$1 = r^2 = 1^2$$
$$4 = r^2 = 2^2$$
$$9 = r^2 = 3^2$$
$$16 = r^2 = 4^2$$
$$25 = r^2 = 5^2$$

يبدو واضحا بأن كل عدد مربع يساوي مربع المرتبة المناظرة له. لذا فإن العدد المربع r هو r^2.

إن الصيغة المطلوبة بالنسبة العدد المخمس الرائي تسلسلا يمكننا الحصول عليها إذا قمنا بكتابة كل رقم بالطريقة الآتية:

$$1 = r^2 + 0 = 1 + 0$$
$$5 = r^2 + 1 = 2^2 + 1$$
$$12 = r^2 + 3 = 3^2 + 3$$
$$22 = r^2 + 6 = 4^2 + 6$$
$$35 = r^2 + 10 = 5^2 + 10$$

وإذا قمنا بدراسة القسم الثاني من المجموع 10،6،3،1،0. سوف نشاهد بأن كل من الأعداد المقابلة لمجموع المتوالية الحسابية $0,1,2,\ldots,(r-1)$ وهي $r/2\ (r-1)$. لذا فإن العدد المخمس الرائي تسلسلا هو:

$$r^2 + \frac{(r-1)r}{2} = \frac{2r^2 + (r-1)r}{2} = \frac{(2r^2 + r^2 - r)}{2} = \frac{(3r^2 - r)}{2} = \frac{r(3r-1)}{2}$$

لإيجاد صيغة للعدد المسدس الرائي تسلسلا r^{th}، تأمل الأعداد الخمسة الأولى كما يأتي:

$$1 = 1r$$
$$6 = 3r = 3(2)$$
$$15 = 5r = 5(3)$$
$$28 = 7r = 7(4)$$
$$45 = 9r = 9(5)$$

إن تفحص عوامل r: 1، 3، 5، 7، 9 سوف يظهر بأن كلا منها يقابل مجموع كل من المرتبة المقابلة، والمرتبة التي تسبقها مباشرة. يعني، إن كل معامل يساوي $r+(r-1)$. وعليه فإن العدد المسدس الرائي تسلسلا سيكون :

$$[r+(r-1)]r = (2r-1)r.$$

يمكن إيجاد العدد المسبع الرائي تسلسلا كما يأتي: اكتب الأعداد المسبعة-السبعة الأولى بالطريقة الآتية:

$$1 = 2r^2-1 = 2(1)^2-1$$
$$7 = 2r^2-1 = 2(2)^2-1$$
$$18 = 2r^2+0 = 2(3)^2+0$$
$$34 = 2r^2+2 + 2(4)^2+2$$
$$55 = 2r^2+5 = 2(5)^2+5$$

من المحتمل أن يكون من الصعب جدا على الطلبة التوصل إلى صيغة بالنسبة للقسم الثاني X لكل عدد $2r^2 + X$. من أجل هذا ينبغي على الطلبة إمعان النظر بالعدد لفترة قصيرة، بعدها يجب على المدرس أن يوضح مباشرة بأن كل x تساوي مجموع المتوالية الحسابية:

-1، 0، 1، 2، 3، ....، (r-2) مطروحا منها 1 وهي $\frac{(r-2)(r-1)}{2}-1$. وينبغي على الطلبة اختبار الصيغة على كل من الأعداد المذكورة أعلاه. لذا فإن العدد المسبع الرائي تسلسلا سيكون:

$$2r^2+\frac{(r-2)(r-1)}{2}-1 = 2r^2+\frac{(r-2)(r-1)-2}{2}$$
$$= 2r^2+\frac{r^2-3r+2-2}{2} = \frac{r(5r-3)}{2}$$

حاول أن تشد انتباه الطلبة إلى حقيقة أننا نمتلك صيغة للمرتبة الرائية للأعداد المخمسة الخمسة الأولى. وعليه نحن قادرون الآن على إيجاد أي عدد: مثلث، أو مربع، أو مخمس، أو مسدس، أو مسبع. ولكن توجد مضلعات منتظمة بأضلاع: 8، 9، .. 20، 100. . . الخ ونأمل أيضاً بالوصول إلى صيغة للمرتبة الرائية لكل منهم. إن خطوتنا اللاحقة سوف تركز اهتمامها بإيجاد مثل هذه الصيغ.

ولكي نحقق هذا الأمر دعنا نكتب الصيغ التي توصلنا إليها بمراحل سابقة.

عدد الأضلاع	المرتبة = r
3	$\frac{r(r+1)}{2}=\frac{r^2+r}{2}=\frac{1r^2}{2}+\frac{r}{2}$
4	$r^2=\frac{2r^2}{2}=\frac{2r^2}{2}+\frac{0}{2}$
5	$\frac{r(3r-1)}{2}=\frac{3r^2-r}{-2}=\frac{3r^2}{2}-\frac{r}{2}$
6	$r(2r-1)=\frac{(4r^2-2r)}{2}=\frac{4r^2}{2}-\frac{2r}{2}$
7	$\frac{r(5r-3)}{2}=\frac{5r^2-3r}{2}=\frac{5r^2}{2}-\frac{3r}{2}$
.	
.	
.	
.	
N	

والآن، دعنا نلقي نظرة على العمود الأخير، سوف نلاحظ بأن معاملات الحد $\frac{r^2}{2}$ يمكن كتابتها بصيغة (N-2). كذلك فإن معاملات الحد $\frac{r}{2}$ يمكن كتابتها بصيغة (N-4)-. وعليه فإن المرتبة الرائية للعدد المضلع النوني N-gonal هي:

$$\frac{(N-2)r^2}{2}-\frac{(N-4)r}{2}=\frac{(N-2)r^2-(N-4)r}{2}$$

$$(\frac{r}{2})[(N-2)r-(N-4)]=(\frac{r}{2})[(r-1)N-(r-2)]$$

إن الجدول المكتمل (يتضمن المراتب الخمسة الأولى للعدد المضلع النوني) سيبدو بالصيغة الآتية:

عدد الأضلاع	1	2	3	4	5	r
3	1	3	6	10	15	$\frac{r(r+1)}{2}$
4	1	4	9	16	25	r^2
5	1	5	12	22	35	$\frac{r(3r-1)}{2}$
6	1	6	15	28	15	r(2r-1)
7	1	7	18	34	55	$\frac{r(5r-3)}{2}$
.						
.						
.						
N	1	.	.			$(\frac{r}{2})[(r-1)N-2(r-2)]$

عند هذه النقطة فإن من المفيد بالنسبة للطلبة العمل على بعض الأمثلة البسيطة باستخدام صيغة للعدد المضلع النوني.

مثال 1 Example:

جد الرقم المثمن الثالث Third Octagonal.

الحل Solution:

دع N=8 وان r=3. عوض هذين العددين في الصيغة

$$\frac{r}{2}[(r-1)N-2(r-2)]=\frac{3}{2}[(3-1)8-2(3-2)]=\frac{3}{2}(2)8-2(1)$$

$$=\frac{3}{2}[16-2]=\frac{3\times 14}{2}=21$$

مثال 2 Example:

أي متعدد أضلاع منتظم يقابل العدد 40 إذا كانت r=4 ؟.

الحل Solution:

في هذه الحالة نحن على معرفة بالمرتبة والعدد، ولكن ينبغي علينا إيجاد N. سنقوم بالتعويض وحل المعادلة الآتية:

$$(\frac{r}{2})[(r-1)N-2(r-2)]=40$$

$$(\frac{4}{2})[(4-1)N-2(4-2)]=40$$

$$2[3N-2(2)]=40 \quad و \quad N=8$$

إذن سيكون الشكل مثمن الأضلاع-المنتظم.

إن الأمثلة الآتية تمتاز بكونها اكثر صعوبة، لحد ما، من سابقاتها وتتطلب عدة تطبيقات للصيغ لإيجاد علاقات بين الأعداد المضلعة المختلفة.

مثال 3 Example:

بين بأن العدد المخمس الرائي تسلسلا يساوي r مضافا إليها ثلاثة أضعاف العدد (r-1) المثلثي.

الحل Solution:

لغرض إكمال هذه المسألة ينبغي علينا، في البداية، كتابة صيغة للعدد المخمس الرائي تسلسلا:

$$P_r=\frac{r(3r-1)}{2}=\frac{3r^2}{2}-\frac{r}{2}$$

بإعادة كتابة $\frac{-r}{3}$ بصيغة $\frac{-3r}{2}+r$، سيكون لدينا:

$$\frac{3r^2}{2}-\frac{3r}{2}+r=\frac{3(r^2-r)}{2}+r$$

$\frac{3r(r-1)}{2}+r=3T_{r-1}+r$، حيث يمثل T_{r-1} العدد $(r-1)^{st}$ المثلثي.

مثال 4 Example:

بين أن أي عدد سداسي يساوي مجموع العدد المخمس من نفس المرتبة والعدد المثلث بالمرتبة التي تليها.

الحل Solution:

$$(Hex)_r=r(2r-1)=2r^2-r$$

$$=\frac{3r^2-r}{2}+\frac{r^2-r}{2}=\frac{r(3r-1)}{2}+\frac{r(r-1)}{2}=P_r+T_{r-1}$$

التقييم اللاحق Postassessment

بعد أن أكمل الطلبة دراسة الأمثلة السابقة، ينبغي أن يكونوا قادرين على حل الأمثلة الآتية:

1. ارسم مثمن منتظم يقابل العدد المثمن بالمثال 1 (ادرس الرسوميات الخمسة الأولى للأعداد المجازية قبل مباشرة هذه المسألة).
2. جد الأعداد المضلعة (بعشرة أضلاع) الثلاثة الأولى.
3. بين بأن أي عدد مسبع يساوي مجموع العدد المسدس بنفس المرتبة والعدد المثلث بالمرتبة التي تسبقها (يعني، برهن: $(Hep)_r=(Hex)_r+T_{r-1}$).
4. بين بأن أي عدد نوني الأضلاع $(N \geq 5)$ يساوي مجموع العدد بأضلاع (N-1) بنفس المرتبة والعدد المثلث بالمرتبة التي تسبقها. (تلميح: ابدأ بعدد مضلع (N-1) بالمرتبة r ومثلث T_{r-1}. ثم باشر عملية الإضافة).
5. بين أن مجموع أي عدد من الأعداد الصحيحة المتعاقبة، مبتدئا بـ 1 هو مربع تام (يعني، عدد مربع).



الشبكـــــات Networks

تعد هذه الوحدة درسا استهلاليا في الطوبولوجيا.

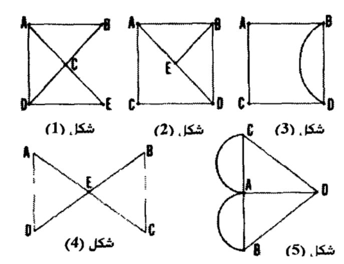
هدف الأداء Performance Objective

بإعطاء منحنى مغلق، سيقوم الطلبة بتحديد فيما إذا كان يمكن اجتيازه versableTra، أو لا يمكن اجتيازه.

التقييم السابق smentassesPre

ليحاول الطلبة استخدام قلم الرصاص في تتبع كل من التشكيلات الآتية دون تكرار المرور بنفس النقطة في أي جزء من أجزائه.

واسأل الطلبة تحديد عدد الأقواس أو قطع المستقيم التي تمتلك نقطة نهاية عند كل من E,DA,B,C,



استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن تشكيلات مثل الأشكال (1-5)، والتي صنعت من قطع مستقيمات و/أو أقواس مستمرة يطلق عليها شبكات Networks. إن عدد الأقواس أو قطع المستقيم التي تمتلك نقطة نهاية عند رأس محدد يطلق عليها درجة الرأس Degree of The Vertex. وبعد محاولة تتبع هذه الشبكات دون رفع أقلامهم عن الورقة، ودون معاودة عبور الخط لمرة ثانية، يجب أن يلاحظ الطلبة نتيجتين مباشرتين هما أن الشبكات يمكن تتبعها (أو اجتيازها) إذا كانت:

(1) جميع درجات الرؤوس زوجية. (2) هناك درجتا رؤوس فردية بالضبط. وسيأتي برهان هاتين النتيجتين لاحقا. ***"هناك عدد زوجي من درجة الرؤوس الفردية في شبكة مترابطة".***

البرهان Proof:

دع V_1 تمثل عدد الرؤوس للدرجة 1، و V_3 تمثل عدد الرؤوس للدرجة 3، و V_n عدد الرؤوس للدرجة n. كذلك لتكن $N=V_1+V_3+V_5+\ldots+V_{2n-1}$. حيث N هي عدد رؤوس الدرجة الفردية في شبكة مترابطة-معلومة ("مترابطة" تعني لا تحوي نهايات سائبة). ونظرا لوجود ثلاثة نقاط نهاية للأقواس عند V_3، وخمسة عند V_5، و n عند V_n، فإن مجموع نقاط نهاية الأقواس بشبكة مترابطة هو:

$$M=V_1+2V_2+3V_3+\ldots+4V_4+\ldots+2nV_{2n}$$
$$M-N=2V_2+2V_3+4V_4+5V_5+\ldots+(2n-2)\,V_{2n-1}+2nV_{2n}$$
$$=2(V_2+V_3+2V_4+2V_5+\ldots+(n-1)V_{2n-1}+nV_{2n})$$

وبما أن الفرق بين عددين زوجيين هو عدد زوجي أيضاً، $M-(M-N)=N$ أي أن N سيكون عددا زوجيا.

"إن شبكة مترابطة يمكن اجتيازها، فقط إذا كانت تحوي، كحد أعلى، اثنان من درجة الرؤوس الفردية".

البرهان Proof:

يجب المرور خلال الرؤوس على مسار مستمر. يعني، إذا "ولج" خط في نقطة فإن آخر ينبغي أن "يغادر" النقطة ذاتها. إن هذا يفيد في تحديد نقاط النهاية. إن الرؤوس الوحيدة ، والتي لا تتوافق مع هذه القاعدة، هي بدايات ونهايات عملية الاجتياز. إن هاتين النقطتين قد تكون بترتيب فردي. تم بواسطة النظرية السابقة إرساء حقيقة ضرورة وجود عدد فردي برؤوس فردية؛ وعليه هناك إمكانية وجود 2 أو 5 من الرؤوس بالترتيب الفردي لغرض اجتياز شبكة ما. والآن ليقم الطلبة برسم كل من الشبكات التي يمكن اجتيازها والتي لا يمكن اجتيازها (باستخدام هاتين النظريتين). الشبكة 1 في التقييم السابق تمتلك خمسة رؤوس. الرؤوس B، و C، و E تمتاز بدرجة زوجية والرأسين A، و D لهما درجة فردية. وبما أن شكل 1 يمتلك رأسان بدرجة فردية،

بالضبط. بالإضافة إلى ثلاثة رؤوس بدرجة زوجية فإنه قابل للاجتياز.

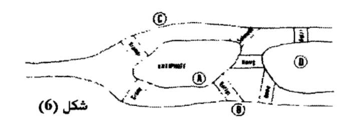
إذا بدأنا عند A ثم توجهنا إلى اسفل نحو D، عابرين نحو E، ثم نقفل راجعين إلى A، عابرين نحو B ثم إلى اسفل نحو D، نكون قد اخترنا المسار المطلوب.

تمتلك الشبكة 2 خمسة رؤوس، ويعد الرأس C الوحيد بدرجة الرأس الفردية. إن الرؤوس A، و B، و E، و D جميعا ذات درجة فردية. وهكذا، بما أن الشبكة تحوي أكثر من رأسين فرديين. فلا يمكن اجتيازها.

الشبكة 3 يمكن اجتيازها لاحتوائها على رأسين زوجيين وبالضبط على رأسين بدرجة فردية.

الشبكة 4 تحوي على خمسة رؤوس بدرجة زوجية، لذا يمكن اجتيازها. الشبكة 5 تحوي على أربعة رؤوس بدرجة فردية ولا يمكن اجتيازها. ولغرض توليد مناخ مناسب يشد الطلبة للموضوع اعرض لهم مسألة جسر كونيجسبرغ Konigsberg الشهير. حيث واجهت في القرن الثامن عشر مدينة كوينجسبرغ البروسية، والتي تقع حيث ينقسم نهر بريجل Pregel إلى رافدين. معضلة ترفيهية مفادها: هل يستطيع المرء السير عبر كل من الجسور السبعة في جولة مستمرة خلال المدينة دون أن يمر بأحد الجسور مرتين؟. في عام 1735 برهن الرياضي الشهير ليونارد أويلر Leonhard Euler (1707–1783) بأن هذه الجولة لا يمكن أن تتم وفق ما ذكر.

بين للطلبة بأن عقد مناقشة سوف يلم شمل عملهم السابق على الشبكات فيؤدي إلى حل معضلة جسر كوينجسبرغ.



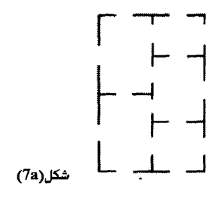
شكل (6)

اخبر الطلبة بضرورة تمثيل المدينة بواسطة A، والضفة اليسرى للنهر B، والضفة اليمنى بواسطة C، والمساحة بين ذراعي المجرى الأعلى بواسطة D. فإذا بدأنا عند هولزت Holzt وسرنا نحو سوهيمدي Sohemde، ثم خلال هونيج Honig، وخلال هوهي Hohe، وخلال كوتل Kotel، وخلال جروني Grune سوف لن نعبر كرامر Kramer. من جهة ثانية، إذا ابتدأنا سيرنا عند كرامر وغذينا السير إلى هوينج، وخلال هوهي، وخلال كوتيل، وخلال سوهيمدي، وخلال هولزت، سوف لن نمر خلال جروني.

إن معضلة جسر كونيجسبرغ تشابه المسألة المطروحة في شكل 5. إذن دعنا نلقي نظرة على الشكلين 5 و 6 ونلاحظ اوجه الشبه بينهما. هناك سبعة جسور في شكل 6، وسبعة خطوط في شكل 5. كل رأس في شكل 5 بدرجة فردية. فإذا بدأنا في شكل 6 عند نقطة D سيكون لدينا ثلاثة خيارات، نستطيع الذهاب إلى هوهي، هوينج، أو هولزت. وإذا بدأنا في شكل 5 عند نقطة D سيكون لدينا ثلاثة مسارات لكي نختار من بينها. وفي كلا الشكلين إذا كنا عند النقطة C سيكون لدينا إما ثلاثة جسور نستطيع العبور خلالها، أو ثلاثة خطوط.

وتوجد نفس الحالة بالنسبة للموقعين A و B في شكل6، والرأسين A و B في شكل 5. ينبغي أن تشدد على أن هذه الشبكة لا يمكن اجتيازها.

إن مثالا آخر على معضلة حيث يتبوأ موضوع قابلية اجتياز الشبكة جانبا مهما منها هي معضلة المسكن بخمسة غرف. ليتأمل الطلبة المخطط الخاص بالمنزل ذي الغرف الخمسة، حيث تحتوي كل غرف على مدخل لكل غرفة مجاورة، ومدخل آخر يؤدي إلى خارج المنزل. تكمن المعضلة في أن يكون لدينا رجل يبدأ إما من داخل المنزل، أو خارجه ويسير خلال كل مدخل مرة واحدة فقط.

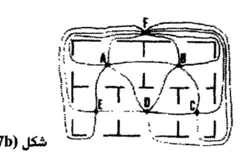

شكل(7a)

ينبغي أن يشجع الطلبة على محاولة عدة مسارات، وسوف يدركون رغم أن عدد المحاولات محدود، بأن هناك الكثير من المحاولات التي يجب أن نجريها بأسلوب المحاولة – و – الخطأ لكي يكون الحل عمليا.

يجب أن يرشد الطلبة إلى مخطط شبكة يماثل هذه المسألة.

يظهر شكل 7b مجموعة من المسارات المكنة التي تربط الغرف الخمسة A، و B، و C، و O، و E، والخارج F. لقد تم تقليص المسألة، الآن، إلى الحد الذي يمكننا تحديد فيما إذا كانت الشبكة قابلة للاجتياز أم لا. فهناك أربعة رؤوس بدرجة

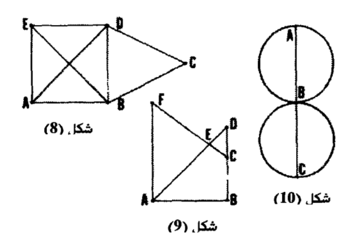
فردية، ورأسان بدرجة زوجية. ونظرا لعدم وجود اثنان أو صفر من الرؤوس بالدرجة الفردية، بالضبط، فإن هذه الشبكة لا يمكن اجتيازها، وعليه فإن معضلة المنزل بخمسة غرف لا تمتلك مسارا للحل. والآن يمكن عرض مسائل ذات طبيعة مشابهة على الطلبة.



شكل (7b)

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقم الطلبة بإيجاد إذا كانت الأشكال الآتية قابلة للتتبع دون رفع أقلامهم عن الورقة، ودون المرور فوق أي خط مرتين (يعني، قابلة للاجتياز).



شكل (8) شكل (9) شكل (10)

2. ليقم الطلبة برسم مخطط أرضية منزل، ثم تحديد إذا كان سير شخص ما ممكنا خلال كل مدخل بمرحلة واحدة فقط.

مرجع Reference

Posamentier, A. S., and W. Schulz (Eds.), The Art of Problem-Solving: A Resource for the Mathematics Teacher, Thousand Oaks, CA: Corwin, 1998.



التقسيم الثلاثي للزاوية – ممكن أم غير ممكن؟ Angle Trisection - Possible or Impossible?

إن أكثر المسائل الثلاثة التي تخص العصور القديمة، والتي تعد ذات اثر يفتح أذهان طالب المدارس الثانوية، هي مسألة التقسيم الثلاثي للزاوية. وسوف تعرض هذه الوحدة مناقشة وبرهانا ينص على أن أية زاوية لا يمكن تقسيمها ثلاثيا بواسطة مسطرة عدلة وفرجار فقط.

هدف الأداء Performance Objective

سيضع الطلبة الخطوط العريضة لبرهان على أن زاوية بقياس 120° لا يمكن أن تقسم ثلاثيا.

التقييم السابق Preassessment

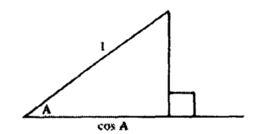
ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بإنشاءات الجبر الأولي.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اسأل الطلبة تقسيم زاوية بقياس 90° إلى ثلاثة أقسام متساوية باستخدام مسطرة عدلة وفرجار فقط. وببذل قليل من المشقة ينبغي أن يكونوا قادرين على إنشاء زاوية بقياس 60° عند رأس زاوية معلومة، وهذا يكمل – افتراضيا عملية التقسيم الثلاثي. ولكن، ادع الطلبة الآن إلى تقسيم زاوية بقياس 120° إلى ثلاثة أقسام متساوية. سينشب عن هذا الأمر صعوبات جمة لأن من المستحيل إجراء ذلك بواسطة مسطرة عدلة وفرجار فقط.

ابدأ، عند هذه النقطة، مناقشة استحالة التقسيم الثلاثي للزاوية باستخدام المسطرة العدلة والفرجار فقط.

بمساعدة وحدة طول واحدة وزاوية بقياس A، يمكن إنشاء قطعة خط مستقيم بطول cos A (انظر الشكل أدناه)



إذا استطعنا تقسيم A إلى ثلاثة أقسام متساوية، بعدئذ نستطيع إنشاء $\cos\frac{A}{3}$ أيضاً. وإذا استطعنا بيان أن $\cos\frac{A}{3}$ لا يمكن إنشاؤه. بعدئذ نكون قد بينا عدم إمكانية التقسيم الثلاثي للزاوية A. هنا سنفترض بأن $m\angle A=120°$، ونبين عدم إمكانية تقسيم هذه الزاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية.

في البداية. ينبغي أن نحصل على صيغة لـ cos A بدلالة $\cos\frac{A}{3}$.

$$\cos 3y = \cos(2y+y) = \cos 2y \cos y - \sin 2y \sin y$$

ولكن،

$$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1$$

بالتعويض:

$$\cos 3y = \cos y\,(2\cos^2 y - 1) - \sin 2y \sin y$$
$$= [2\cos^3 y - \cos y] - \sin 2y \sin y$$

ولكن. $\sin 2y = 2\sin y \cos y$ وعليه سيكون،

$$\cos 3y = [2\cos^3 y - \cos y] - \sin y\,(2\sin y \cos y)$$
$$= [2\cos^3 y - \cos y] - 2\sin^2 y \cos y$$
$$= [2\cos^3 y - \cos y] - 2\cos y\,(1 - \cos^2 y)$$
$$= [2\cos^3 y - \cos y] - 2\cos y + 2\cos^3 y$$
$$= 4\cos^3 y - 3\cos y$$

افترض $3y = A$ لتحصل على:

$$\cos A = 4\cos^3\frac{A}{3} - 3\cos\frac{A}{3}$$

بضرب طرفي المعادلة في 2 واستبدال $\cos\frac{A}{3}$ بالرمز x لنحصل على:

$$2\cos A = x^3 - 3x$$

بما أن $\cos 120° = -\frac{1}{2}$ ، $x^3-3x+1=0$

والآن يجب أن يستذكر الطلبة بأن أحد معايير الإنشاء، تبين بأن الجذور التي يمكن إنشاؤها ينبغي أن تكون بصيغة $a+b\sqrt{c}$ ، حيث a و b أعداد نسبية وأن c قابلة للإنشاء.

إن أول شئ بعد هذا علينا بيانه هو أن $x^3-3x+1=0$ لا تمتلك جذورا نسبية. ولتحقيق ذلك، افترضنا وجود جذر نسبي، $\frac{p}{q}$ ، حيث لا تمتلك p و q أي عامل مشترك أكبر من 1.

وبتعويض ($\frac{p}{q}$)، سيكون لدينا:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right) + 1 = 0$$
$$p^3 - 3pq^2 + q^3 = 0$$
$$q^3 = 3pq^2 - p^3$$
$$q^3 = p\,(3q^2 - p^2)$$

وهذا يعني بأن q^3، وبالطبع q، تحوي العامل p. وعليه يجب أن تكون p مساوية ±1. كذلك، بحل المعادلة بالنسبة لـ p^3:

$$p^3 = 3pq^2 - q^3$$
$$p^3 = q^2(3p - q)$$

وهذا يعني بأن p و q ينبغي أن يمتلكان عاملا مشتركا، وعليه $q=\pm1$. ونستطيع الخروج باستنتاج من هذا بأن الجذر النسبي الوحيد للمعادلة x^3-3x+1 هو $r=\pm1$. وبالتعويض، نستطيع بيان أن كل من ±1، لا يمثلان الجذر المطلوب.

بعدئذ، افترض أن $x^3-3x+1=0$ تمتلك جذرا قابلا للإنشاء Constructible $a+b\sqrt{c}$. وبالتعويض في المعادلة المذكورة، نستطيع بيان انه إذا كان $a+b\sqrt{c}$ جذرا بعدئذ سيكون مرافقه Conjucate $a-b\sqrt{c}$ ، جذرا أيضاً. إن مجموع جذور المعادلة متعددة الحدود $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$ ، هو $r_1+r_2+r_3+\ldots+r_n = -a_1$. وسيلي ذلك بأن مجموع جذور المعادلة $x^3-3x+1=0$ يساوي صفرا. فإذا كان لدينا جذران $a+b\sqrt{c}$ و $a-b\sqrt{c}$ مع جذر ثالث r، سيكون لدينا

$$a+b\sqrt{c}+a-b\sqrt{c}+r=0$$
$$r=-2a$$

ولكن a عدد نسبي، وعليه سيكون r نسبيا، وسيكون لدينا تناقض. إذن الزاوية التي قياسها 120° لا يمكن تقسيمها ثلاثيا. إن هذا سيبرهن جوهريا على أن أية زاوية لا يمكن تقسيمها ثلاثيا بواسطة مسطرة عدلة وفرجار فقط.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بكتابة الخطوط العريضة للبرهان الذي عرض في هذه الوحدة بالإضافة إلى مناقشة أهميته.

98 مقارنات المتوسطات

Comparing Means



يمكن استخدام هذه الوحدة كجزء أساسي لدرس في مادة الإحصاء.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقارن الطلبة مقدار ثلاثة متوسطات لعددين أو أكثر.
2. سيبرهن الطلبة علاقات المقارنة بين المتوسطات.

التقييم السابق Preassessment

بعد أن استعرض الطلبة المتوسطات الحسابية والهندسية، دع الطلبة يصفون h بدلالة a، و b، حيث تمثل a، وh، و b تتابعاً توافقياً Harmonic sequence.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ بتعريف المتوسطات الثلاثة (الحسابي، والتوافقي، والهندسي) بالأسلوب الآتي: افترض a، و m، و b عبارة عن تتابع حسابي. يطلق على الحد الوسط (m) اصطلاح الوسط الحسابي Arithmetic Mean. وبما أن a، و m، و b تمتلك فرقا مشتركا

m- a= b- m، وأن $m=\frac{a+b}{2}$ = الوسط الحسابي (A.M.)

والآن، افترض a، و h، و b تمثل تتابعاً توافقياً. إن الحد الأوسط (h) يطلق عليه الوسط التوافقي Harmonic Mean. بما أن a، و h، و b تمتلك مقلوبات بفرق مشترك، $\frac{1}{h}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{h}$، وأن:

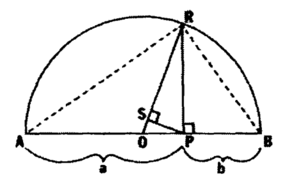
$h=\frac{2ab}{a+b}$ = الوسط التوافقي (H.M.)

أخيرا، افترض a، و g، و b تمثل تتابعاً هندسياً. وبما أن كل من a، و g، و b تمتلك نسبة مشتركة $\frac{g}{a}=\frac{b}{g}$، وأن:

$g=\sqrt{ab}$ = الوسط الهندسي (G.M)

ونظراً لأن النموذج التصويري Pictorial Model غالباً ما يبلور الفهم، فإن التفسير الهندسي Geometric Interpretation سيكون مناسبا في هذا المقام.

تأمل نصف الدائرة والتي قطرها $\overline{AOPB}$ وفيها $\overline{AO}\cong OB$ وأن $\overline{PR}\perp\overline{APB}$ (R تقع على نصف الدائرة). كذلك $\overline{PS}\perp\overline{RSO}$. افترض AP=a، PB=b.



بما أن:

RO=1/2AB=1/2(AP+PB)=1/2(a+b)

يمثل RO الوسط الحسابي (A.M.) بين a و b. تأمل المثلث قائم الزاوية ΔARB. بما أن ΔBPR~ΔRPA، $\frac{PB}{PR}=\frac{PR}{AP}$ أو $(PR)^2=(AP)(BP)=ab$. وعليه فإن $PR=\sqrt{ab}$. إذن PR هو الوسط الهندسي (G.M.) بين a و b.

وبما أن ΔRPO~ΔRSP، $\frac{RO}{PR}=\frac{PR}{RS}$. وعليه $RS=\frac{(PR)^2}{RO}$. ولكن $(PR)^2=ab$ و RO=1/2AB=1/2(a+b). إذن $RS=\frac{ab}{1/2(a+b)}=\frac{2ab}{a+b}$ والذي يعد الوسط التوافقي (H.M.) بين a و b.

إن هذا التفسير الهندسي يزود ذاته جيدا لحد بعيد إلى مقارنة مقادير هذه المتوسطات الثلاثة. وبما أن وتر المثلث قائم الزاوية يعد أطول أضلاعه، في المثلث ΔROP، RO>PR. وفي المثلث ΔRSP، PR>RS. وعليه فإن RO>PR>RS. ولكن بسبب وجود إمكانية بالنسبة لهذه المثلثات على الانحلال RO≥PR≥RS والذي يدل ضمنا على أن A.M.≥G.M.≥H.M.

نظراً لكون الطالب على معرفة كافية بكل من الوسط الحسابي، والهندسي (يطلق عليها في بعض الأحيان الوسط التناسبي Mean Proportional)، فإن مقدمة مختصرة إلى الوسط التوافقي ستأتي بالتسلسل. إن "الوسط التوافقي" بين عددين هو "مقلوب الوسط الحسابي لمقلوب هذين العددين". ويعود ذلك إلى كون التتابع التوافقي عبارة عن تتابع لمقلوبات أعضاء بتوافق حسابي. بالنسبة لكل من a، b

$$H.M.=\frac{1}{\frac{1/a+1/b}{2}}=\frac{2ab}{a+b}$$

مثال Example 1 :

جد الوسط التوافقي لكل من a، و b، و c.

الحل: بواسطة التعريف:

$$H.M.=\frac{1}{\frac{1/a+1/b+1/c}{3}}=\frac{3abc}{a+b+c}$$

يمتلك كل من المتوسط الحسابي والهندسي مجموعة من التطبيقات الشائعة في المنهج الدراسي للمدارس الثانوية. كذلك فإن المتوسط التوافقي يمتاز بتطبيقات مفيدة، وغالبا ما تكون مهملة في الرياضيات الأولية. إن المتوسط التوافقي هو عبارة عن "متوسط المعدلات Average of rates".

على سبيل المثال، افترض أن معدل السرعة بالنسبة لرحلة من و إلى مكان العمل مطلوب احتسابها، عندما كان معدل سرعة الذهاب إلى العمل 30 ميل/ساعة، ومعدل العودة (من خلال نفس المسار) هو 60 ميل/ساعة. فإن معدل السرعة هو الوسط التوافقي بين 30 و 60، يعني:

$$\frac{2(30)(60)}{30+60}=40$$

ولبيان أن معدل السرعة لسرعتين (أو أكثر) هو بالحقيقة الوسط التوافقي لهذه السرع، تأمل معدلات السرعة $r_1,r_2,r_3,\ldots r_n$، قطعت كل منها خلال زمن مقداره $t_1,t_2,t_3,\ldots,t_n$، على التوالي، وكل منها عبر مسافة مقدارهاd.

$$t_1=\frac{d}{r_1},t_2=\frac{d}{r_2},t_3=\frac{d}{r_3},\ldots t_n=\frac{d}{r_n}$$

إن معدل السرعة للرحلة بكاملها سيكون:

$$\frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلي}}=\frac{nd}{t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n}$$

$$=\frac{nd}{\frac{d}{r_1}+\frac{d}{r_2}+\frac{d}{r_3}+\ldots+\frac{d}{r_n}}=\frac{n}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\ldots+\frac{1}{r_n}}$$

والذي يمثل الوسط التوافقي.

مثال Example 2:

إذا أحضرت ليزا Lisa بقيمة 1.00 دولار ثلاثة أنواع من الحلوى بسعر 15¢، 25¢، 40¢ لكل باوند. ما هو معدل الثمن الذي دفعته لكل باوند؟.

الحل Solution:

بما أن الوسط التوافقي هو معدل السرع (التي تحدث على نفس القاعدة)، فإن معدل السعر لكل رطل هو:

$$\frac{(3)(15)(25)(40)}{(15)(25)+(15)(40)+(25)(40)}=22\frac{62}{79}¢$$

ولاستكمال المناقشة لمقارنة قيمة المتوسطات الثلاثة تأمل – بصحبة طلبة الصف – مناقشة عامة (جبرية). باستخدام حدود عامة،

$$A.M.=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$$

$$G.M.=\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n}$$

$$H.M.=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

نظرية Theorem 1: $A.M.\geq G.M.$

البرهان Proof: افترض $g=\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3\ldots.a_n}$ بعدئذ،

$$1=\sqrt[n]{\frac{a_1}{g}.\frac{a_2}{g}.\frac{a_3}{g}\ldots.\frac{a_n}{g}}$$

وعليه، $1=\frac{a_1}{g}\bullet\frac{a_2}{g}\bullet\frac{a_3}{g}.\bullet\ldots\bullet\frac{a_n}{g}$

ولكن $n\leq\frac{a_1}{g}+\frac{a_2}{g}+\frac{a_3}{g}+\ldots+\frac{a_n}{g}$ نظراً لأنه إذا كان حاصل ضرب n من الأعداد الموجبة يساوي 1، فإن مجموعها لا يقل عن n. وعليه: $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geq g$،

وعليه $\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3\ldots a_n}$

أو $A.M.\geq G.M.$

إن هذا البرهان بالنسبة لعددين a و b ($a>b$) هو ذكي وجذاب لحد ما:

نظراً لأن $a-b>0$، $(a-b)^2>0$، أو $a^2-2ab+b^2>0$.

بإضافة 4ab إلى طرفي التباين: $a^2+2ab+b^2>4ab$

وبأخذ الجذر الموجب يعطي: $\frac{a+b}{2}\rangle\sqrt{ab}$

وعليه $A.M.>G.M.$ (ملاحظة: إذا كان $a=b$ بعدئذ $A.M.=G.M.$)

نظرية Theorem 2:

G.M.≥H.M.

البرهان Proof:

بما أن A.M.≥G.M. بالنسبة لكل $a_1^b, a_2^b, a_3^b, ..., a_n^b$:

$$\frac{a_1^b + a_2^b + a_3^b + ... + a_n^b}{n} \geq \sqrt[n]{a_1^b . a_2^b . a_3^b ... a_n^b}$$

عندما $\frac{1}{b} < 0$،

$$\left[\frac{a_1^b + a_2^b + a_3^b + ... + a_n^b}{n}\right]^{\frac{1}{b}} \leq \left[\frac{a_1^b + a_2^b + a_3^b + ... + a_n^b}{n}\right]$$

خذ b=-1، بعدئذ

$$\sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 ... a_n} \geq \left[\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + ... + a_n^{-1}}{n}\right]^{-1}$$

إذن،

$$\sqrt[n]{a_1 . a_2 . a_3 ... a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

أو G.M. ≥ H.M.

مرة ثانية بالنسبة للعددين a، b (a>b) سيكون البرهان أكثر بساطة:

نظراً (مما ورد سابقا) $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$

$ab(a+b)^2 > (4ab)(ab)$

وعليه $ab > \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$ أو $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{(a+b)}$

إذن G.M.>H.M. (لاحظ إذا كان a=b بعدئذ G.M.=H.M.).

التقييم اللاحق Postassessment

1. جد A.M.، G.M.، H.M. لكل مما يأتي:

(أ) 20 و 60 (ب) 25 و 45 (ج) 3 و 15 و 45.

2. رتب G.M.، H.M.، A.M. بترتيب تنازلي لمقاديرها.
3. بين انه بالنسبة لعددين معلومين فإن G.M. هو الوسط الهندسي بين A.M. و H.M.
4. برهن بأن G.M.>H.M. بالنسبة لكل a، b، c.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

99 هرم باسكال
Pascal's Pyramid

إن القدرة على التوسيع والتعميم هي أكثر الأدوات المهمة التي يستطيع المعلم مساعدة الطلبة على تطويرها وتنميتها. تم في هذه الوحدة، توسيع التطبيق المعروف لمثلث باسكال في تحديد معاملات مفكوك متعدد الحدود $(a+b)^n$ باستخدام "هرم باسكال" لأخذ المعاملات (a+b+c) بنظر الاعتبار.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتقييم مفكوكات ثلاثية Trinomial Exapnsions $(a+b+c)^n$ بأسس اقل.
2. سيكتشف الطلبة علاقات مهمة بين مثلث باسكال وهرم باسكال.

التقييم السابق Preassessment

إذا كان طلبتك على معرفة كافية بمثلث باسكال، دعهم ينجزون التوسعات الآتية:

(أ) $(a+b)^3$ (ب) $(a-b)^4$ (ج) $(x+2y)^5$

اسأل طلبتك اختبار عمليات ضربهم الجبرية بواسطة التقييم:

(أ) $(a+b+c)^3$ (ب) $(a+b+c)^4$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

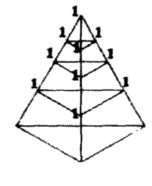
ابدأ باستعراض مثلث باسكال. وتستطيع الإشارة إلى إن هذا المثلث لا يعود إلى باسكال بمفرده. كان المثلث بالحقيقة، معروفا في الصين قبل عام 1300، وكان عمر الخيام، مؤلف الرباعيات،

على معرفة به قبل باسكال بـ 600 عام!. إذا تركنا الدقة التاريخية جانبا، فإن كل صف في مثلث باسكال (أو الخيام، أو ينج هوي Ying Hui) ينتج عنه معاملات $(a+b)^n$.

1	$(a+b)^0$
1 1	$(a+b)^1$
1 2 1	$(a+b)^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4$
1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5$

على سبيل المثال، لإيجاد $(a+b)^4$ استخدم المعاملات في الصف 5 بالمثلث: $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

في حين أن توسيع ذات الحدين يمكن تمثيله بواسطة مثلث منظور، فإن توسيع ثلاثي الحدود يمثل بهرم اشد تعقيدا. إن التوسيع الأول $(a+b+c)^0$ يمتلك معاملا واحدا 1 ونستطيع تخيله كرأس للهرم. إن كل من التوسيعين التاليين بمكن بعدئذ وضعهما بمقطع مثلثي في الهرم وبمعامل 1 عند كل رأس من رؤوسه.



شكل (1)

وعليه فإن كل حافة جانبية للهرم تتألف من تتابع من الوحدات، يمتلك المفكوك الثاني $(a+b+c)^1$ المعاملات a+1b+1c1، والتي يمكن تمثيلها بالطبقة الأولى من المثلث وبمدخلات مقدارها 1 عند الرؤوس،

$$\begin{matrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{matrix}$$

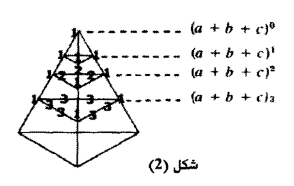
هناك طريقتان لتوليد معاملات الأسس الأعلى بواسطة الهرم. في الأولى تأمل ثانية كل توسيع بوصفه مقطعا مثلثيا بالهرم. إن الأعداد على الحافات الخارجية لكل طبقة (الأعداد بين الرؤوس) يمكن الحصول عليها بإضافة العددين اللذين يقعان فوقهما مباشرة. على سبيل المثال، 2(a+b+c) يمتلك واحدات عند كل رأس، واثنان بينهم:

$$\begin{matrix} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{matrix}$$

لحساب الحدود في داخل المثلث، اضف الحدود الثلاثة التي تقع فوقها، على سبيل الثالث $(a+b+c)^3$ تمتلك المعاملات الآتية:

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 6 & & 3 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

أو بالرجوع إلى الهرم:



شكل (2)

ولتحديد هذه المعاملات للمتغيرات الصحيحة:

1) لتكن المعاملات في الصف الأول من الهرم "a" إلى الأس الأعلى بذلك المفكوك؛
2) دع العناصر في الصف الثاني تكون معاملات حاصل ضرب "a" إلى ثاني أعلى أس ومتغير آخر إلى الأس الأول.
3) في الصف الثالث، قلل ثانية أس "a" ورتب بقيمة المتغيرات بحيث أن مجموع الأسس لكل حد يساوي أس المفكوك الأصلي والذي يرفع إلى،
4) في خلال كل صف تبقى أسس "a" كما هي، بينما يقل أس "b" من اليسار إلى اليمين، ويزداد أس "c".

تأمل، على وجه التخصيص، $(a+b+c)^3$ والذي يمتلك ترتيب المعاملات:

$$\begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 6 & & 3 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

إن المفكوك التام سيكون بعدئذ:

$a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$.

عند العمل مع هذه الأهرام سيلاحظ الطلبة بأن حافة كل مثلث تقابل، بالضبط، صفا بمثلث باسكال، يعني، حافة

$(a+b+c)^3$، 1 3 3 1، هي نفس الصف الرابع بمثلث باسكال. إن هذه الملاحظة سوف تؤدي إلى الطريقة الثانية لإنشاء الهرم.

دع الحافة اليسرى للتوسيع الثلاثي تمثل بواسطة صف مثلث باسكال المقابل. بعدئذ اضرب كل صف من صفوف مثلث باسكال بالعدد على الحافة اليسرى لتوليد المعاملات للمفكوك الثلاثي. على سبيل المثال، الحافة اليسرى لـ $(a+b+c)^4$ سوف تكون 1 4 6 4 1، فتقابل الصف الخامس بمثلث باسكال.

1	(1×1)
1 1	(4×1) (4×1)
1 2 1	(6×1) (6×2) (6×1)
1 3 3 1	(4×1) (4×3) (4×3) (4×1)
1 4 6 4 1	(1×1) (1×4) (1×6) (1×4) (1×1)

بضرب هذه العناصر على طول الحافة بالصفوف المتتابعة للمثلث ينتج $(a+b+c)^4$.

1
4 4
6 12 6
4 12 12 4
1 4 6 4 1

قد تبدو هذه الطريقة معقدة للوهلة الأولى، ولكن المران على استخدامها سيزيل الغموض والارتباك الأولي ويقدم تقانة سهلة ومفيدة.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن ينجز الطلبة التمارين الآتية:

1) ليقم الطلبة بمقارنة الوقت المطلوب لفك $(a+b+c)^4$ جبريا إزاء توسيع الهرم.
2) فك $(a+b+c)^5$، و $(a+b+c)^6$.
3) فك $(a+2b+3c)^3$، و $(a+4b+c)^4$.
4) قد يولع بعض الطلبة في إنشاء نماذج عملية للهرم، تتألف من مقاطع مثلثة قابلة للفصل وبمعاملات مناسبة مؤشرة على كل سطح.

111 نظرية متعدد الحدود
The Multinomial Theorem



ستستخدم هذه الوحدة مع الصف الذي درس نظرية ذات الحدين سابقا.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بإيجاد معامل أي حد معلوم بفك متعدد الحدود دون أن يقوموا بفكه فعلا.
2. سيبرر الطلبة وجود معاملات مفكوك متعدد الحدود.
3. سيطبق الطلبة، بنجاح، نظرية متعدد الحدود على ثلاثي الحدود معلوم.

التقييم السابق Preassessment

ليقم الطلبة بفك $(a+b)^4$ باستخدام نظرية ذات الحدين. اسأل الطلبة تحديد عدد الترتيبات المختلفة والتي يمكن أن تنشأ من الحروف AAA BBB CC.

استراتيجيات التعليم Teaching strategies

ابدأ باستعراض استجابة الطلبة بخصوص عدد ترتيبات AAA BBB CC. وينبغي على الطلبة إدراك أن هذه المسألة تختلف عن سؤالهم تحديد عدد ترتيبات ABCDEFGH (حيث أن كل رمز يجب ترتيبه بحيث يختلف عن البقية). وفي الحالة الأخيرة يمكن ملء المكان الأول (من الأماكن الثمانية) بأي طريقة من الطرق الثمانية، والمكان الثاني بأي من الطرق السبعة، والثالث بأي طريقة من الطرق الستة، والرابع في خمسة طرق، ...، والثامن بطريقة واحدة فقط. باستخدام مبدأ العد Counting Principle، فإن عدد الطرق سيكون8!=8.7.6.5.4.3.2.1 (يقرأ مضروب 8 Factorial). إن دراسة نظرية ذات الحدين سابقا ستجعل الطلبة مدركين تمام الإدراك المبادئ الأساسية للتوافيق Combinations. يعني،

$$nC_r = \binom{n}{r} = \frac{nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وسيكون الطلبة، بالوقت الحاضر، جاهزين لاعتبار المسألة الأصلية، بإيجاد عدد ترتيبات AAABBBCC.

ينبغي أن يرشد الطلبة بعناية خلال التطوير الآتي:

دع $\#(A)$ تمثل "عدد طرق اختيار مواقع لحروف A". نظراً لوجود ثلاثة رموز A، ينبغي اختيار 3 مواقع من 8 مواقع. يمكن أن يتم ذلك $_8C_3$ أو $\binom{8}{3}$ طرق. إذن $\#(A) = \binom{8}{3} + \frac{8!}{3!.5!}$

بنفس الطريقة $\#(B) = \binom{5}{3} + \frac{5!}{3!.2!}$، نظراً لأن 3 مواقع بالنسبة لرموز B ينبغي اختيارها من المواقع الخمسة المتبقية. إن هذا الأمر سيترك لنا موقعين لاختيارهما لرمزي C. ونظرا لبقاء موقعين فقط، فهناك طريقة واحدة لاختيار هذين الموقعين، يعني $\binom{2}{2} = \frac{2!}{2!.0!} = 1$ وضح بأن $0!=1$ في ضوء التعريف.

باستخدام مبدأ العد، $\#(A \& B \& C) = \#(A).\#(B).\#(C)$

$$= \frac{8!}{3!\bullet 5!} \bullet \frac{5!}{3!\bullet 2!} \bullet \frac{2!}{2!\bullet 0!} = \frac{8!}{3!\bullet 3!\bullet 2!}$$

إن الصيغة الأخيرة يرمز لها غالبا بما يأتي $\binom{8}{3,3,2}$ والتي تمثل عدد الطرق ترتيب ثمانية حدود تتألف من مكررات 3 حدود، 3 حدود، و 2 حد.

لتعزيز فهم هذه التقانة، اسأل طلبتك تحديد عدد الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب حروف كلمة Mississippi. إذا أخذنا بنظر الاعتبار المكررات (يعني 1-M, 4-I's, 4-S's, 2-P's) سيحصل الطلبة على

$$\frac{11\ 10\ 9\ \not{8}\ 7\ \not{6}\ 5\ \not{4}\ \not{3}\ \not{2}\ \not{1}}{1\ \not{4}\ \not{3}\ \not{2}\ 1\ \not{4}\ \not{3}\ \not{2}\ 1\ \ 2\ \not{1}} = 34.650$$

ينبغي أن يوجه الطلبة إلى تعميم هذا الأسلوب في عد لغاية n من الحدود، والتي تتضمن n_1 حدا من نوع ما، و n_2 حدا من نوع آخر، و n_3 حدا من نوع ثالث، ... , n_r حدا من آخر نوع. من الواضح أن $n_1+n_2+n_3+\ldots+n_r=n$. بتطبيق الأسلوب الذي ورد سابقا، ينبغي أن تمثل $\#(N_1)$ "عدد الطرق التي يمكن خلالها اختيار n_1 مواقع من n مواقع المتوفرة". إذن $\#(N_1) = \frac{n!}{n_1!.(n-n_1)!}$. وبنفس الطريقة $\#(N_2) = \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}$، ونظرا لأن هناك $(n-n_1)$ من المواقع المتبقية والتي من خلالها سيتم اختيار مواقع n_2. وبنفس الطريقة:

$\#(N_r) = \frac{(n-n_1-n_2-\ldots\ldots-n_{r-1})!}{n_r!(n-n_1-n_2-\ldots\ldots-n_r)!}$ وذلك لأن

$$n_1+n_2+n_3+\ldots+n_r = n, \#(N_r)\ldots 1, \frac{n_r!}{n_r!.0!} = 1$$

وباستخدام مبدأ العد بالنسبة لحالات r هذا، فإن عدد طرق ترتيب n من الحدود (وبتكرار r من الحدود) يمكن الحصول عليها:

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\ldots 1$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!..n_r!} = \binom{n}{n_1,n_2,n_3,\ldots\ldots n_r}$$

والذي يعد رمزا مناسبا للاستخدام في هذا المقام.

يجب أن يطبق الطلبة هذه الصيغة العامة على الحالة حيث $r=2$، وسوف يحصلون على:

$\binom{n}{n_1 n_2} = \frac{n!}{n_1!.n_2!} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}$ وهو الحد المألوف nC_{n1} أو $\binom{n_1}{n_2}$.

والآن، ينبغي أن يكون الطلبة على استعداد تام لمعالجة نظرية متعدد الحدود، فلقد طلب منهم في التقييم السابق فك $(a+b)^4$. والآن يجب عليهم ملاحظة ان هناك بعض الحدود التي قد تظهر لأكثر من مرة. على سبيل المثال، الحد aaab، والذي يكتب غالبا بصيغة a^3b يظهر $\binom{4}{3}$ مرات. إن هذا يقابل عدد ترتيبات aaab. وبالنسبة لمثل هذا الحد فإن نفس القضية تنطبق على الدوام.

والآن يجب أن يأخذ الطلبة بنظر الاعتبار فك $(a+b+c)^4$. ولحساب هذا التوسيع فعلا، يستطيع الطلبة ضرب تجمعات مختلفة لأعضاء كل عامل من العوامل للحصول على كل حد. على سبيل المثال، إن بعضا من 81 حدا سوف يبدو كما يأتي: aaaa، aaab، aabb، abac، abab، cbcb، .... إن هذه الحدود تكتب غالبا بصيغة a^4، a^3b، a^2b^2، a^2bc، a^2b^2، b^2c^2.

يظهر a^2b^2 في القائمة السابقة مرتين، ولكن في التوسيع التام (للـ 81 حدا) سوف يظهر $\binom{4}{2,2,0} = \frac{4!}{2!.2!.0!} = 6$ مرات. إذن إذا سئل طالب إيجاد معامل الحد a^3bc^2 في التوسيع $(a+b+c)^6$، سيقوم فقط بحساب $\binom{6}{3,1,2} = \frac{6!}{3!.1!.2!} = 60$. وعليه فإن التوسيع التام يمكن كتابته كما يأتي:

$$(a+b+c)^4 = \sum_{n_1+n_2+n_3=4} \frac{4!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} a^{n_1}.a^{n_2}.c^{n_3}.$$

من هنا فإن نظرية متعدد الحدود يمكن تتبعها بسهولة:

$$(a_1+a_2+a_3+...+a_r)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3+...+n_r} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!...n_r!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} a_3^{n_3} ... a_r^{n_r}$$

ورغم كونها مرهقة وثقيلة، فقد يرغب بعض الطلبة بالبرهنة على هذه النظرية بواسطة الاستقراء الرياضي.

يظهر أدناه تطبيقان لنظرية متعدد الحدود.

1. قم بفك وتبسيط: $(2x+y-z)^3$

$$=\binom{3}{3,0,0}(2x)^3(y)^0(-z)^0+\binom{3}{0,3,0}(2x)^0(y)^3(-z)^0+\binom{3}{0,0,3}(2x)^0(y)^0(-z)^3$$
$$+\binom{3}{2,1,0}(2x)^2(y)^1(-z)^0+\binom{3}{2,0,1}(2x)^2(y)^0(-z)^1+\binom{3}{1,1,1}(2x)^1(y)^1(-z)^1$$
$$+\binom{3}{0,2,1}(2x)^0(y)^2(-z)^1+\binom{3}{0,1,2}(2x)^0(y)^1(-z)^2$$
$$+\binom{3}{0,2,1}(2x)^1(y)^2(-z)^0+\binom{3}{1,0,2}(2x)^1(y)^0(-z)^2$$

$$(2x+y-z)^3 = 8x^3+y^3-z^3+12x^2y-12x^2z+6xy^2+6xz^2-12xyz-3y^2z+3yz^2$$

2. جد الحد في مفكوك:

$$(2x^2+y^3+\tfrac{1}{2}z)^7$$

والذي يحتوي على x^4 و z^4. إن الحد العام للمفكوك هو $\binom{7}{a,b,c}(2x^2)^a(-y^3)^b(\frac{1}{2}z)^c$ حيث $a+b+c=7$.

إذن الحد الذي يحتوي x^4 و z^4 فيه $a=2$، $c=4$، $b=1$.

بتعويضها في الحد العام أعلاه نحصل على:

$$\binom{7}{2,1,4}(2x^2)^2(-y^3)^1(\frac{1}{2}z)^4 = \frac{7!}{2!1!4!}(4x^4)(-y^3)(\frac{1}{16}z^4)$$
$$= \frac{-105}{4}x^4y^3z^4$$

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

1. ليقم الطلبة بإيجاد معامل a^2b^5d في مفكوك $(a+b-c-d)^8$.
2. اسأل الطلبة بيان كيفية اشتقاق معاملات أي حد من حدود مفكوك متعدد الحدود.
3. ليقم الطلبة بفك $(2x+y^2-3)^5$.



حل جبري لمعادلات تكعيبية
Algebraic Solution of Cubic Equations

يعود اهتمام الإنسان بالمعادلات التكعيبية إلى العصور الغابرة حيث البابليين القدماء حوالي 1800–1600ق.م. ولكن، الحل الجبري لمعادلات الدرجة الثالثة هو أحد نتاجات عصر النهضة الإيطالية.

لهذا فإن حل المعادلات التكعيبية يترافق مع أسماء رياضيين طليان لامعين مثل: سكيبيون ديل فيرو Scipione del Ferro، ونيقولودي برشيا Nicolo de Brescia (يعرف باسم تارتاجليا Tartaglia)، وجيرولامو كاردان Girolamo Cardan، وأخيرا رافائيل بومبيللي Rafael Bombelli.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء بعض المعادلات التكعيبية، سيقوم الطلبة بإيجاد حلولها.
2. بإعطاء مسألة حرفية والتي تتطلب حلا لمعادلة تكعيبية، سيقوم الطلبة بإيجاد الحلول الحقيقية (حيثما تطلب ذلك) للمسألة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا العمليات مع المعادلات التربيعية، كذلك ينبغي أن يكون لديهم خلفية جيدة في الأعداد المركبة وحساب المثلثات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض جذور الأعداد المركبة بالأسلوب الآتي:

يمكن الحصول على الجذر النوني nth للعدد المركب z عن طريق الجذر النوني للقيمة المطلقة Absolute Value ، r، وتقسيم النطاق ϕ بواسطة n. إن هذه العملية سوف تمنحك القيمة الرئيسية للجذر. إن الصيغة العامة للحصول على جميع جذور z هي:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\phi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right]$$

وبالنسبة لـ $k = 0$، فإن هذا ينتج القيمة الرئيسية، أما بالنسبة لقيم $k = 1,2,3,\ldots,n-1$ سنحصل على بقية الجذور.

مثال 1 Example:

جد جذور مكعب الواحد. لدينا:

$i=\cos 0°+i\sin 0°$، وعليه $\phi=0°$، وأن $r=1$. بعدئذ ستكون الصيغة العامة $z=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ حيث $k = 0,1,2$.

إذا كانت $k=0$، $z_1=\cos 0+i\sin 0=1$ (القيمة الرئيسية)

وإذا كانت $k=1$،

$$z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\cos 120°+i\sin 120°$$

$$=-\cos 60°+i\sin 60°=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اوذا كانت $k=2$،

$$z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos 240°+i\sin 240°$$

$$=-\cos 60°-i\sin 60°=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

لاحظ بأن كل من الجذور المركبة للواحد تولد الجذر الآخر. ولإجراء ذلك، سيكون علينا أخذ الأس الثاني والثالث لهذه الجذور فقط. على سبيل المثال، إذا أخذنا $\alpha=z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$، سنحصل على:

$$\alpha^2=(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2=(-\frac{1}{2})^2+2(-\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2$$

$\alpha^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2$، ولكن $i^2=-1$. إذن:

$$\alpha^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=z_3$$

وبنفس الطريقة،

$$\alpha^3=\alpha^2\bullet\alpha=(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$\alpha^3=(-\frac{1}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1=z_1$$

وعليه فإن الجذور الثلاثة للواحد هي: 1، و α، و α^2، حيث يمكن أن تكون $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3i}}{2}$ أو $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

مثال 2 Example:

جد الجذور التكعيبية للعدد الحقيقي a. ولدينا $a=a(\cos 0°+i\sin 0°)$، وعليه فإن

$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{r}(\cos\frac{2k\pi}{3}-i\sin\frac{2k\pi}{3})$ حيث $k=0,1,2$.

ولكن، $\cos\frac{2k\pi}{3}-i\sin\frac{2k\pi}{3}$ حيث $k=0,1,2$ سوف يعطي ثلاثة جذور للواحد (انظر مثال 1). إذن، إذا كان الجذر الحقيقي لـ a هو a'، فإن الجذور الثلاثة لـ a ستكون: a'، $a'\alpha$، $a'\alpha^2$، حيث تكون α أما $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ أو $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

والآن دعنا نأخذ بنظر الاعتبار المعادلة التكعيبية العامة:

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

حيث تمثل a، وb، وc، وd أعدادا مركبة اختيارية arbitrary ويمكن أن تختصر هذه المعادلة إلى صيغة ابسط دون الحد الثاني، وذلك عن طريق إجراء التحويل $x=y-\frac{b}{3a}$، وسيكون لدينا:

$$a(y-\frac{b}{3a})^3+b(y-\frac{b}{3a})^2+c(y-\frac{b}{3a})+d=0$$

$$a(y^3-\frac{b}{a}y^2+\frac{b^2}{3a^2}y-\frac{b}{27a^3})+b(y^2-\frac{2b}{3a}y+\frac{b^2}{9a^2})+c(y-\frac{b}{3a})+d=0$$

وسيكون لدينا،

$$ay^3+(\frac{b^2}{3a}-\frac{2b^2}{3a}+c)y+(-\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d)=0$$

والآن إذا أجرينا الآتي:

$\frac{b2}{3a}-\frac{2b^2}{3}+c=c'$ وأن $\frac{-b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d=d'$

وستصبح المعادلة العامة $ay^3+c'y+d'=0$

ولتجنب الكسور في حل هذه المعادلة، قمنا بتقسيمها على a، وكتابتها بالأسلوب الآتي: $y^3+3py+2q=0$

يطلق على المعادلة الأخيرة اسم "المعادلة التكعيبية المختصرة"، وكما بينا سابقا، فإن أي معادلة تكعيبية يمكن اختصارها إلى هذا الشكل.

لحل المعادلة المختصرة، تم اعتبار المتطابقة الآتية:

$(a+b)^3-3ab(a+b)-(a^3+b^3)=0$

وإذا قورن التماثل بالمعادلة المختصرة، سيكون لدينا: $a+b=y$، $ab=-p$، $a^3+b^3=-2q$. من هذه المعادلات سنشاهد بأن علينا إيجاد قيمتي a و b فقط لإيجاد y. ويمكن إنجاز ذلك بحل نظام المعادلات:

$a^3b^3 = -p^3$ $\qquad ab = -p$

أو

$a^3 + b^3 = -2q$ $\qquad a^3 + b^3 = -2q$

ومن المعادلة الثانية سيكون لدينا $b^3=-2q-a^3$، وبتعويض هذه القيمة في المعادلة الأولى، سيكون $-a^3(2q+a^3)=-p^3$، وعليه فإن $a^6+2a^3q-p^3=0$. إذا جعلنا $a^3=v$، سنحصل على المعادلة التربيعية الآتية $v^2 + 2qv - p^3 = 0$.

إن جذري هذه المعادلة التربيعية هي:

$v_1=-q+\sqrt{q^2+p^3}$

$v_2=-q-\sqrt{q^2+p^3}$

ونظرا لوجود تناظر بكل من a و b في نظام المعادلات، نستطيع أخذ v_1 أو v_2 لكي تكون a^3 أو b^3 بصورة اختيارية، لذا:

$$b^3=-q-\sqrt{q^2+p^3} \quad \text{وأن} \quad a^3=-q+\sqrt{q^2+p^3}$$

وعليه فإن $a=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}$ وأن

$$b=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2=p^3}}$$

ولكن $y=a+b$، إذن:

$$y=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$$

والتي نطلق عليها صيغة كاردان Cardan's Formula للمكعب.

وبما أن كل من a^3 و b^3 تمتلك ثلاثة جذور، يبدو بأن تلك المعادلة تمتلك تسعة جذور.

ولكن ليست هذه هي المسألة، لأنه بسبب $ab=-p$، فإن الجذور التكعيبية لكل من a^3 و b^3 ينبغي أن تؤخذ على شكل أزواج بحيث أن حاصل ضربها (وهو ab) ويكون عددا نسبيا $-p$.

والآن، نحن على علم بأن جذور a^3 التكعيبية هي: a (القيمة الرئيسية)، $a\alpha$، $a\alpha^2$، حيث تمثل α أحد الجذور المركبة للواحد. بنفس الطريقة، فإن جذور b^3 التكعيبية هي: b، αb، $b\alpha^2$.

ولكن. إذا كان من الضروري أن يكون حاصل ضرب a و b عددا نسبيا، سيكون لدينا الحلول الوحيدة المتاحة: (a, b)، $(a\alpha, b\alpha^2)$، لأن:

$ab = -p$

$a\alpha \bullet b\alpha^2 = ab\alpha^3 = ab = -p$ $\qquad (\alpha^3=1)$ لأن

$a\alpha^2 \bullet b\alpha = ab\alpha^3 = ab = -p$

وعليه فإن قيم y هي: $a\alpha^2 + b\alpha$

$\alpha,\ a\alpha+b\alpha^2 \qquad ,\ a+b$

ولكن $x=y-\frac{b}{3a}$، وعليه فإن جذور المعادلة التكعيبية سيمكن إيجادها متى علمنا قيمة y.

مثال Example 3:

حل المعادلة $x^3+3x^2+9x^2-13=0$. أولا، يجب أن نختصر هذه المعادلة لاستبعاد الحد ذي الدرجة الثانية. إن عملية التحويل هي: $x=y-\frac{b}{3a}$. في هذا المثال ستكون $a=1$، $b=3$، $c=9$، $d=-13$. وعليه ستكون $x=y-\frac{3}{3(1)}=y-1$. إذن، بتعويض $(y-1)$ بدلا من x في المعادلة،

$(y-1)^3 + (y-1)^2 +9(y-1) -13 = 0$

أو

$(y^3-3y^2+3y-1) + 3(y^2-2y+1) + 9(y-1) - 13 = 0$.

وعليه فإن المعادلة $y^3-6y-20 = 0$ هي المعادلة المختصرة من اجل ذلك ستكون

$p^3 = 8,\ p = 2{,}3p = 6{,}q^2 = 100,\ q = -10{,}2q = 20$

إذن $\sqrt{p^3+q^2}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$، وأن

$$a=\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(1+\sqrt{3})^3}=1+\sqrt{3}$$

$$b=\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}=\sqrt[3]{1-3\sqrt{3}+9-3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{(1-\sqrt{3})^3}=1-\sqrt{3}$$

بعدئذ ستكون حلول المعادلة المختصرة كما يأتي:

$$y_1=a+b=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=2$$

$$y_2=ad+bd^2=(1+\sqrt{3})(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(1-\sqrt{3})(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$
$$=-1+3i$$

$$y_3=a\alpha^2+b\alpha=(1+\sqrt{3})(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(1-\sqrt{3})(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$
$$=-1-3i$$

ولكن $x=y-1$. إذن

$x_1 = y_1-1 = 2-1 = 1$
$x_2 = y_2-1 = -1+3i-1 = -2+3i$
$x_3 = y_3-1 = -1-3i-1 = -2-3i$

إذن، في هذا المثال، كان لدينا بالحلول جذر حقيقي واحد، وجذري مرافق عدد مركب.

لقد درسنا في هذه الوحدة (وهي الوحدة الأولى بين وحدتين) الحل العام للمعادلة التكعيبية. وفي الثانية، سوف نقوم بدراسة حالات مختلفة، قابلة للاختصار وغير قابلة له، في حل المعادلات باستخدام صيغة كاردان.

التقييم اللاحق Postassessment

إن الطلبة الذين أوفوا بمتطلبات أهداف الأداء ينبغي أن يكونوا قادرين على إنجاز الأمثلة الآتية:

1. جد جذور المعادلة $x^3+6x^2+17x+18 = 0$.
2. حل المعادلة: $x^3-11x^2+35x-25 = 0$.
3. جد حل المعادلة $x^3-3x^2+3x-1 = 0$.

حل معادلات تكعيبية
Solving Cubic Equations

في أولى الوحدتين حول المعادلات التكعيبية، قمنا بدراسة الحل العام للمكعب. وفي هذه (الثانية)، سنقوم بدراسة حالات متعددة، قابلة للاختصار وغير قابلة له، في حل المعادلات باستخدام صيغة كاردان.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء بعض المعادلات التكعيبية، سيقوم الطلبة بتحليها لمعرفة طبيعة الحلول التي سيحصلون عليها عندما ستحل هذه المعادلة.
2. سيقوم الطلبة بحل معادلات تكعيبية معلومة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا العمليات مع الأعداد المركبة والمعادلات التربيعية. كذلك ينبغي أن يكون لديهم خلفية جيدة في حساب المثلثات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض محتويات الوحدة السابقة حول المعادلات التكعيبية بالأسلوب الآتي: لديك معادلة تكعيبية عامة $Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$، وتوفر دائماً إمكانية إلغاء حد الدرجة الثانية بإجراء التغييرات على المتغيرات $x=y-\frac{B}{3A}$. إن عملية التحويل هذه سوف تؤدي بنا إلى معادلة بصيغة $y^3+3py+2q=0$، والتي يطلق عليها المعادلة التكعيبية المختصرة أو القياسية.

يمكن الحصول على حل المعادلة المختصرة بواسطة صيغة كاردان، $y=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}+\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$ إذا كان $a=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}$ و $b=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}$، وستكون جذور المعادلة التكعيبية المختصرة $y_1=a+b$، $y_2=a\alpha+b\alpha^2$، $y_3=a\alpha^2+b\alpha$ حيث $\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$، $\alpha^2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ يمثلان الجذور التكعيبية للواحد.

ومتى وجدت قيم y_1، و y_2، و y_3، سيمكن الحصول على حل المعادلة التكعيبية العامة باستخدام التحويل $x=y-\frac{B}{3A}$.

يبدو واضحاً من صيغة كاردان، بأن طبيعة الحلول سوف تعتمد على قيمة q^2+p^3 والتي من اجل هذا السبب أطلق عليها مميزة المكعب Discriminant. وقد أطلق هذا الاسم، لأن q^2+p^3 الموجودة تحت الجذر التربيعي سوف ينتج عنها قيما حقيقية أو خيالية في ضوء إشارة المجموع q^2+p^3.

وقبل مناقشة المميز، سيكون من المفيد إعادة كتابة حلول المعادلة المختصرة بالأسلوب الآتي:

$$y_1=a+b;\ y_2=a\alpha+b\alpha^2=a(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+b(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i);$$

$$y_3=a\alpha^2+b\alpha=a(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+b(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

وبالتبسيط:

$$y_1=a+b;\ y_2=-\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\sqrt{3}i;\ y_3=-\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\sqrt{3}i$$

والآن دعنا نتأمل المميز q^2+p^3.

(أ) إذا كان $q^2+p^3>0$، وأن كل من a و b يمتلكان قيمة حقيقية واحدة، بعدئذ سنقترح أن a و b سيكونان حقيقيان أيضاً. وهكذا، سيكون كل من a+b، a-b حقيقيان أيضاً. وعليه سيكون لدينا، إذا كان a+b=m وأن a-b=n، وأن حلول المعادلة المختصرة هي:

$$y_1=a+b=m;\ y_2=-\frac{m}{2}+\frac{n}{2}\sqrt{3}i;\ y_3=\frac{-m}{2}-\frac{n}{2}\sqrt{3}i$$

إذن، إذا كان $q^2+p^3>0$، سيكون لدينا جذر حقيقي واحد، وجذري مرافق تخيلي.

مثال Example 1:

حل المعادلة $x^3-6x^2+10x-8=0$. بداية يجب أن نستبعد الحد المربع، وستكون عملية التحويل لهذا المثال:

$$x=y-\frac{B}{3A}=y-\frac{-6}{3}=y+2$$

إذن، بالتعويض بـ y+2 بدلا من x في المعادلة:

$(y+2)^3-6(y+2)^2+10(y+2)-8=0$

$y^3+6y^2+12y+8-6y^2-24y-24+10y+20-8=0$

$y^3-2y-4=0$ (المعادلة المختصرة)

إذن،

$$3p=-2 \quad ، \quad p=-\frac{2}{3} \quad و \quad p^3=\frac{-8}{27}$$

$$2q=-4 \quad ، \quad q=-2 \quad و \quad q^2=4$$

إذن، $q^2+p^3=4-\frac{8}{27}=\frac{100}{27}>0$

إذن، نعلم أن في الحل أحد الجذور يجب أن يكون حقيقيا، والآخران تخيليين مترافقين. وقيم كل من a و b هي:

$$a=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{2+\sqrt{\frac{100}{27}}}=\sqrt[3]{2+\frac{10}{3\sqrt{3}}}$$

$$b=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{2-\sqrt{\frac{100}{27}}}=\sqrt[3]{2-\frac{10}{3\sqrt{3}}}$$

وبالتبسيط:

$$a=\sqrt[3]{\frac{6\sqrt{3}+10}{3\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}+1}{\sqrt{27}}}=\sqrt[3]{\frac{(3-1)^3}{\sqrt{27}}}$$

$$b=\sqrt[3]{\frac{6\sqrt{3}-10}{3\sqrt{3}}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}{\sqrt{27}}}=\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{3}-1)^3}{\sqrt{27}}}$$

$$a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \quad و \quad b=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$

وعليه فإن الحلول المختصرة للمعادلة تصبح:

$$y_1=a+b=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=2$$

$$y_2=a\alpha+b\alpha^2=(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}})(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}})(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$y_3=a\alpha^2+b\alpha=(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}})(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)+(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}})(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

وبالتبسيط:

$y_1=2$ ، $y_2=-1+i$ ، $y_3=-1-I$

وعليه فإن حلول المعادلة العامة هي:

$x_1=y_1+2=2+2=4$

$x_2=y_2+2=-1+i+2=1+i$

$x_3=y_3+2=-1-i+2=1-i$

ب) إذا كانت $q^2+p^3=0$، فإن b, a متساويين، لذا فإذا كانت m تمثل القيمة الحقيقية المشتركة لـ a و b، سيكون لدينا:

$y_1=m+m=2m$

$$y_2=-\frac{m+m}{2}+\frac{m-m}{2}\sqrt{3}i=-m$$

$$y_3=-\frac{m+m}{2}+\frac{m-m}{2}\sqrt{3}i=-m$$

إذن، سيكون لدينا في هذه الحالة بأن جميع الجذور حقيقية، وأن اثنان منها متساوية.

مثال Example 2: جد جذور المعادلة $x^3-12x+16=0$. في هذا المثال تتوفر لدينا المعادلة المختصرة، لذا:

$3p=-12 \Rightarrow p=-4$ وأن $p^3=-64$

$2q=16 \Rightarrow q=8$ وأن $q^2=64$

إذن $q^2+p^3=64-64=0$. وهذا يعني بأن الحل سوف يحوي على ثلاثة جذور حقيقية، اثنان منهما متساويين.

وستكون قيم a و b كما يأتي:

$$a=\sqrt[3]{-q+\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{-8}=-2$$

$$b=\sqrt[3]{-q-\sqrt{q^2+p^3}}=\sqrt[3]{-8}=-2$$

لأن الجذور هي:

$y_1=a+b=-4$

$$y_2=a\alpha+b\alpha^2=-2(\alpha+\alpha^2)=-2(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2$$

$$y_3=a\alpha^2+b\alpha=-2(\alpha+\alpha^2)=-2(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=2$$

ج) إذا كانت $q^2+p^3<0$، سيكون كل من a , b أعدادا مركبة لأن الجذر التربيعي للمميز سيكون سالبا في هذه الحالة. وعليه، إذا كانت قيم b,a: $a=M+Ni$ وأن $b=M-Ni$.

وستكون حلول المعادلة المختصرة كما يأتي:

$y_1=a+b=2M$

$$y_2=-\frac{2M}{2}+\frac{2Ni}{2}\sqrt{3}i=-M-\sqrt{3}N$$

$$y_3=-\frac{2M}{2}-\frac{2Ni}{2}\sqrt{3}i=-M+\sqrt{3}N$$

والتي تمتاز بكونها جذورا حقيقية وغير متساوية.

ولكن، لا يوجد ثمة طريقة حسابية عامة، أو جبرية لإيجاد القيمة المضبوطة للجذور التكعيبية للأعداد المركبة. وعليه ستكون فائدة صيغة كاردان محدودة في هذه الحالة، و لأجل هذا السبب يطلق عليها الحالة غير القابلة للاختصار Irreducible case.

يمكن الحصول على حل هذه الحالة باستخدام حساب المثلثات.

إذن، عندما تكون صيغة كاردان لها الشكل:

$$y=\sqrt[3]{u+vi}+\sqrt[3]{u-vi}$$

فنطلق ،

$$r=\sqrt{u^2+v^2}$$

وأن

$$\theta=\frac{u}{v}.$$

وعليه فإن الجذور التكعيبية لهم ستكون:

$$y=\sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}+i\frac{\sin\theta+2k\pi}{3}\right]+$$

$$\sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}-i\frac{\sin\theta+2k\pi}{3}\right]$$

حيث $k=0, 1, 2$.

وإذا بسطنا هذا التعبير نحصل على:

$$y = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{3}$$

حيث $k= 0, 1, 2$

وعليه فإن الجذور الثلاثة هي:

$$y_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3}; \qquad y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta+2\pi}{3};$$

$$y_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}$$

مثال Example 3:

حل المعادلة $x^3-6x-4 = 0$

من هذه المعادلة، سيكون لدينا $3p = -6$ وأن $2q = -4$، وعليه $p^3 = -8$، $q^2 = 4$، وأن $p^3+q^2 = -4$ وأن $\sqrt{p^3+q^2} = 2i$.

بعدئذ سيكون الحل: $y = \sqrt{2+2i} + \sqrt{2-2i}$، إذن

$r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}, \quad \tan\theta = \frac{2}{2}, \quad \tan\theta = 1$ وأن ،

$\theta = \frac{\pi}{4}$.

من أجل هذا فإن جذور المعادلة هي:

$$x_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3} = 2\sqrt[3]{\sqrt{8}}\cos\frac{\pi}{12} = 2\sqrt{2}\cos 15^\circ$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta+2\pi}{3} = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi/4+2\pi}{3} = 2\sqrt{2}\cos 135^\circ$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta+4\pi}{3} = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi/4+4\pi}{3} = 2\sqrt{2}\cos 225^\circ$$

ولكن،

$$\sin\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$ وأن،

وعليه

$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$ وأن،

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}}$$

إذن، الجذور هي:

$$x_1 = 2\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = 1+\sqrt{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{2}(\cos 135^\circ) = 2\sqrt{2}(-\cos 45^\circ)$$

$$= 2\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{3}) = -2$$

$$x_3 = 2\sqrt{2}(Sin 15^\circ) \qquad = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2})$$

$$= \sqrt{1+2\sqrt{3}+3} = 1-\sqrt{3}$$

إن الحالات القابلة للاختصار يمكن أن توظف مساعدة حساب المثلثات.

التقييم اللاحق POSTASSESSMENT

إن الطلبة الذين أوفوا بأهداف الأداء ينبغي أن يكونوا قادرين على إنجاز التمارين الآتية: حلل ثم بعدئذ حل المعادلات التكعيبية الآتية:

1) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$
2) $x^3 - 5x^2 + 9x - 9 = 0$
3) $x^3 - 75x + 250 = 0$
4) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

حساب مجاميع السلاسل المتناهية
Calculating Sums of Finite Series



أضحى الاستقراء الرياضي راسخا تماما في مناهج المدارس الثانوية. وتوفر الكثير من الكتب المدرسية مجموعة متنوعة من التطبيقات على تقانة هذا النوع من البرهان. إن أكثر التطبيقات شيوعا هي تلك التي تهتم بالبرهنة على أن سلسلة محددة تمتلك صياغات معلومة كمجاميع. ورغم أن معظم الطلبة ينجزون البرهان بالإطار المطلوب، لكن بعضهم قد يتساءل عن كيفية الحصول على مجموع سلسلة محددة.

وستزودك هذه الوحدة بإجابة لطلب الطالب باشتقاق صيغ لمجاميع سلاسل محددة.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء بعض السلاسل المتناهية، سيقوم الطلبة بإيجاد مجاميعها.
2. سيقوم الطلبة بتطوير صيغ لحساب مجموع مجموعة متباينة من السلاسل المتناهية.

التقييم السابق Pressment

ينبغي أن يكون الطلبة قد أتقنوا العمليات مع الصياغات الجبرية، والدوال، ومفاهيم التتابع المتناهي، والسلاسل.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض مفاهيم التتابعات والسلاسل بالأسلوب الآتي:

التتابع المتناهي Finite Sequence هو عبارة عن مجموعة متناهية من الحدود أو العناصر المرتبة، يرتبط كل منها بواحد أو أكثر من العناصر السابقة بطريقة محددة بشكل من الأشكال.

أمثلة Examples:

1) $1, 3, 5, 7, \ldots, 19$
2) $\text{SIN } x, \text{SIN } 2x, \text{SIN } 3x, \ldots, \sin 20x$
3) $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$

والآن دعنا نتأمل أي تتابع متناه للعناصر $u_1, u_2, \ldots, u_n$ وسنجد بأننا نستطيع الحصول على المجاميع الجزئية الآتية:

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

نطلق على هذا المجموع "سلسلة متناهية" لعناصر التتابع $u_1, u_2, \ldots, u_n$، S_n يصف المجموع الكلي لهذه العناصر. على سبيل المثال، إذا كان لدينا التتابع4 ,3 ,2 ,1، فإن السلسلة هي 1+2+3+4، وأن المجموع S_4 هو 10.

إن هذا المثال يعد مثالا بسيطا، ولكن إذا أخذنا بنظر الاعتبار "n" ومن الحدودn,....,1,2,3,4 بدلا من أربعة حدود فحسب، فلن تكون عملية إيجاد مجموعهم بالأمر السهل $S_n=1+2+3+\ldots+n$. في بعض الأحيان ، هناك طرق سهلة لحساب مجموع سلسلة محددة، ولكنا لا نستطيع تطبيق تلك الطريقة بذاتها على جميع السلاسل.

على سبيل المثال، فإن السلسلة السابقة، $1+2+3+\ldots+n$، يمكن حسابها باستخدام حيلة بارعة:

$$1 = 1 = \frac{1 \bullet 2}{2}$$
$$1+2 = 3 = \frac{2 \bullet 3}{2}$$
$$1+2+3 = 6 = \frac{3 \bullet 4}{2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

والذي يمثل المجموع الكلي للسلسلة.

وهذا يعني إذا أردنا حساب مجموع السلسلة $1+2+3+\ldots+10$، سيكون لدينا:

$$S_{10} = \frac{10(10=1)}{2} = \frac{10 \bullet 11}{2} = 55$$

لا نستطيع تطبيق هذه الحيلة على كل سلسلة، وعليه، يجب علينا إيجاد طريقة أكثر شمولا تتيح لنا إمكانية حساب مجموع بضعة سلاسل، وستقدم النظرية الآتية الطريقة المذكورة:

نظرية Theorem: دعنا نأخذ بنظر الاعتبار سلسلة منتهية $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n$. إذا استطعنا إيجاد دالة F(n) بحيث أن $u_n = F(n+1)-F(n)$، بعدئذ سيكون:

$u_1+u_2+\ldots+u_n = F(n+1)-F(1)$.

البرهان Proof:

لدينا بواسطة الفرضية:

$u_n = F(n+1)-F(n)$، وعليه، إذا قمنا بتطبيقها بالنسبة لكل مما يأتي $1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1$ سوف نحصل على العلاقات الآتية:

$$\begin{aligned} u_n &= F(n+1) - F(n) \\ u_{n-1} &= F(n) - F(n-1) \\ u_{n-2} &= F(n-1) - F(n-2) \\ &\vdots \\ u_2 &= F(3) - F(2) \\ u_1 &= F(2) - F(1) \end{aligned}$$

إذا قمنا الآن بإضافة هذه العلاقات، سوف نحصل على: $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n = F(n+1)-F(1)$ والذي يبرهن على صحة النظرية.

وقبل أن نجعل الطلبة يباشرون العمل على التطبيقات، دعهم يتأملون الأمثلة الآتية:

1. جد مجموع السلسلة $1+2+3+\ldots+n$. نظراً لكون $u_n=n$، سوف نأخذ بنظر الاعتبار $F(n)=An^2+bn+c$. (يجب استخدام متعدد حدود يزيد بدرجة واحدة عن u_n). وعليه فإن $F(n+1)=A(n+1)^2+b(n+1)+c$. وفي ضوء النظرية المذكورة أعلاه، يجب أن يكون لدينا:

$$\begin{aligned} u_n &= F(n+1) - f(n) \\ n &= [A(n+1)^2 + b(n+1) + c] - [An^2+bn+c] \\ n &= 2An + (A+B) \end{aligned}$$

وعليه. بحساب معاملات أسس n، سنحصل على: $2A=1$، $A+B=0$. بحل هاتين المعادلتين آنيا سيكون لدينا: $A=\frac{1}{2}$، $B=-\frac{1}{2}$، من أجل هذا، $F(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + C$، $F(n+1)= \frac{1}{2}(n+1)^2-\frac{1}{2}(n+1) + C$ وأن $F(1) = C$.

إذن،

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+n &= F(n+1) - F(1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1)^2 - \tfrac{1}{2}(n+1) \\ &= \tfrac{1}{2}(n+1) \end{aligned}$$

2. جد مجموع السلسلة: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$. بما أن $U_n=n^2$ سوف نأخذ بنظر الاعتبار $F(n) = An^3+Bn^2+Cn+D$ (درجة واحدة أعلى من u_n)، نظراً لأن الأس لـ F(n) سوف يبطل في $F(n+1) - F(n)$. إذن، $F(n+1)=A(n+1)^3+B(n+1)^2+C(n+1)+D$. والآن

$$\begin{aligned} u_n = n^2 &= F(n+1) - F(n) \\ n^2 &= [A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1)+D] - [An^3 + Bn^2 + Cn + D] \\ n^2 &= 3An^2 + (3A+2B)n + (A+B+C) \end{aligned}$$

بمساواة معاملات أسس n، نحصل على: $3A=1$، $3A+2B=0$ وأن $A+B+C=0$ ثم نقوم بحل هذه المعادلات آنيا لنحصل على: $A = 1/3$، $B = -\frac{1}{2}$، $C = 1/6$.

إذن،

$$F(n)=\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n+D$$

$$F(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)+D$$

$$F(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+D=D$$

وعليه،

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 &= F(n+1) - F(1) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

3. جد مجموع السلسلة $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$، بما أن u_n هي من الدرجة الثالثة، فإن

$$F(n) = An^4+Bn^3+Cn^2+Dn+E$$

وأن

$$F(n+1) = A(n+1)^4+B(n+1)^3+C(n+1)^2+D(n+1)+E$$

وإذن

$$u_n = (2n-1)^3 = F(n+1) - F(n)$$

أو

$$8n^3-12n^2+6n-1= 4An^3+(6A+3B)n^2+(4A+3B+2C)n+(A+B+C+D)$$

وبمساواة المعاملات، نحصل على:

$4A=8$، وأن $A=2$؛ $6A+3B=-12$، وأن $B=-8$؛ $4A+3B+2C=6$ وأن $C=11$؛ $A+B+C+D=-1$ وأن $D=-6$

وعليه فإن، $F(n)=2n^4-8n^3+11n^2-6n+E$.

$$F(n+1)=2(n+1)^4-8(n+1)^3+11(n+1)^2-6(n+1)+E$$

وأن $F(1) =-1 + E$، إذن

$$\begin{aligned} &1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3 = F(n+1) - F(1) \\ &=2(n+1)^4-8(n+1)^3+11(n+1)^2-6(n+1)+E-(-1+E) \\ &= 2n^4 - n^2 = n^2(2n^2-1) \end{aligned}$$

4. جد مجموع السلسلة:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

دعنا نأخذ بنظر الاعتبار $F(n)=\frac{A}{2^n}$ وعليه فإن $F(n+1)=\frac{A}{2^{n+1}}$ وبما أن $u_n = F(n+1) - F(n)$، إذن $\frac{1}{2^n}=\frac{A}{2^{n+1}}-\frac{A}{2^n}$. وعليه ستكون $A=-2$.

وعليه فإن $F(n+1) = -\frac{1}{2^n}$، وأن $F(1)=-1$. من اجل هذا،

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n} = F(n+1)-F(1)-\frac{1}{2^n}+1=1-\frac{1}{2^n}$$

بعد ممارسة تدريب ومران كاف ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على إيجاد F(n) بسهولة أكبر.

التقييم اللاحق Postassessment

إن الطلبة الذين استوفوا بمتطلبات أهداف الأداء، يجب أن يكون قادرين على إنجاز التمارين الآتية:

1. جد مجموع السلسلة $1 + 8 + 27 + \ldots + n^3$
2. جد مجموع السلسلة $1/5 + 1/25 + 1/125 + \ldots + 1/5^n$
3. جد الصيغة الخاصة بمجموع متوالية حسابية منتهية.

صيغة عامة لمجموع سلسلة بصيغة $\sum_{t=1}^{n} t^r$

A General Formula for the Sum of Series of the Form $\sum_{t=1}^{n} t^r$

يعد حساب مجموع السلسلة المتقاربة Convergent من الموضوعات المهمة. ولكن لا يوجد ثمة صيغة عامة لحساب مجموع أي من السلاسل المتقاربة.

ستزودك هذه الوحدة بصيغة عامة لحساب مجموع سلسلة من نوع محدد $\sum_{t=1}^{n} t^r$.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء بضعة سلاسل منتهية بصيغة $\sum_{t=1}^{n} t^r$، سيقوم الطلبة بإيجاد مجموعها.
2. سيعرض الطلبة فهما للتقانة المستخدمة في إيجاد صيغ عامة لسلسلة خاصة ومحددة.

التقييم السابق Preassment

ينبغي أن تكون لدى الطلبة معرفة جيدة بنظرية ذات الحدين، ومستوى مقبول من المعرفة بالسلاسل والجبر الخطي الأولي.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استعرض مبدأ السلاسل، ونظرية ذات الحدين بالأسلوب الآتي، إن السلسلة هي عبارة عن عناصر بتتابع محدد. على سبيل المثال، إذا كان لدينا تتابع من العناصر $u_1+u_2+\ldots+u_n$. إن هذه السلسلة يمكن أن تمثل أيضاً بالرمز $\sum_{r=1}^{n} U_r$. إذن، الرمز $\sum_{n=1}^{n} k^2$ يعني: $1^2+2^2+\ldots+n^2$.

إن مثالاً آخر للسلسلة هو الذي يتمثل بواسطة $\sum_{=}^{k}\left(\quad\right)$ -

فرضية مساعدة Lemma:

دعنا نتأمل سلسلة متناهية $\sum_{r=1}^{n} Ur$، إذا استطعنا إيجاد دالة f(n) بحيث أن:

$u_n = f(n+1) - f(n)$، بعدئذ $\sum_{r=1}^{n} Ur = f(n+1) - f(1)$.

البرهان Proof:

لدينا الفرضية التي تنص على أن $u_n = f(n+1) - f(n)$؛ وعليه إذا قمنا بتطبيقها بالنسبة إلى 1, 2, 3,..., n-2, n-1 ، وسوف نحصل على العلاقات الآتية:

$$u_n = f(n+1) - f(n)$$
$$u_{n-1} = f(n) - f(n-1)$$
$$u_{n-2} = f(n-1) - f(n-2)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$u_2 = f(3) - f(2)$$
$$u_1 = f(2) - f(1)$$

وإذا قمنا بإضافة هذه العلاقات، سوف نحصل على $\sum_{r=1}^{n} Ur$ يساوي $f(n+1) - f(1)$ والذي يبرهن على صحة هذه النظرية.

لتكن $\sum_{t=1}^{n} t^r$ هي السلسلة التي ينبغي الحصول على مجموعها. لغرض الفرضية المساعدة، يمكن أن نأخذ بعين الاعتبار الدالة الاختيارية $f(n) = \sum_{k=0}^{r+1} b_k n^k$ حيث يمثل b أي عدد حقيقي وأن n هو أي عدد صحيح موجب. إذن، $f(n+1) = \sum_{k=0}^{r+1} b_k (n+1)^k$ ، إذا قمنا الآن بفرض شرط الفرضية للفرضية الساعدة إلى هذه الدالة بالنسبة للسلسلة $\sum_{t=1}^{n} t^r$. وسيكون لدينا:

$$u_n = f(n+1) - f(n)$$

أو

$$n^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k (n+1)^k - \sum_{k=0}^{r+1} b_k n^k$$

$$n^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k [(n+1)^k - n^k]$$

$$n^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k [(n+1)^k - n^k] \qquad \text{(I)}$$

ولكن في ضوء نظرية ذات الحدين،

$$(n+1)^k = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{k}{m} n^{k-m}$$ وإذن،

وإذن

$$(n+1)^k - n^k = \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} n^{k-m}$$

وعليه في معادلة (I) سيكون لدينا،

$$n^r = \sum_{k=0}^{r+1} b_k \left[\sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} n^{k-m} \right]$$

ستؤدي هذه المعادلة إلى المنظومة الآتية من المعادلات

$$\binom{r+1}{1} br + 1 \qquad = 0$$
$$\binom{r+1}{2} b_{r+1} + \binom{r}{1} b_r \qquad = 0$$
$$\binom{r+1}{3} b_{r+1} + \binom{r}{2} b_r + \binom{r+1}{1} b_r - 1 \dots\dots \quad = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad = 0$$
$$\binom{r+1}{m} b_{r+1} + \binom{r}{m} b_r + \binom{r-1}{m-2} b_r - 1 + \dots\dots = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad = 0$$
$$\binom{r+1}{r+1} b_{r+1} + \binom{r}{r} b_r + \dots\dots + \binom{1}{1} b_1 \dots\dots\dots\dots = 0$$

إن هذه المنظومة من المعادلات يمكن أن توصف من خلال مصفوفة بالشكل الآتي:

$$\begin{bmatrix} \binom{r+1}{1} & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ \binom{r+1}{2} & \binom{r}{1} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \binom{r+1}{3} & \binom{r}{2} & \binom{r-1}{1} & 0 & \dots 0 \\ . & . & . & . & \dots . \\ . & . & . & . & \dots . \\ . & . & . & . & \dots . \\ \binom{r+1}{m} & \binom{r}{m-1} & \binom{r+1}{m-2} & 0 & \dots 0 \\ . & . & . & . & \dots . \\ . & . & . & . & \dots . \\ . & . & . & . & \dots . \\ \binom{r+1}{r+1} & \binom{r}{r} & \binom{r-1}{r-1} & \binom{r-2}{r-2} & \dots 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{r+1} \\ b_r \\ b_{r-1} \\ . \\ . \\ . \\ b_m \\ . \\ . \\ . \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذا أطلقنا على هذه المصفوفات الثلاثة A، X، B، على التوالي، سيكون لدينا AX=B. ولكن A هي مصفوفة قطرية

Diagonal Matrix، إذن $\det A=\prod_{S=1}^{r+1}\binom{S}{1}=0$ وعليه توجد A^{-1}. (Det A) والتي تساوي في الحالة البسيطة $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$. إن الرمز Π يمثل "حاصل ضرب Product" بالطريقة التي يمثل بها $\sum$ "المجموع"). إذن يوجد لدينا $X=A^{-1}B$. فإذا كانت a_{ij} تمثل أي عنصر بـ A^{-1}، والذي يدل ضمنا على أن

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ \\ . \\ a_{r+1,1} \end{pmatrix}$$

لان B هي عمود متجه Column Vector. إذن:

$$\begin{pmatrix} b_{r+1} \\ b_r \\ . \\ . \\ . \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{r+1,1} \end{pmatrix}$$

ولكن هذا يعني بأن، $b_{r+2-i}=a_{i,1}$ بالنسبة لجميع $i\in\{1,2,3,\ldots,r+1\}$.

وعليه بالنسبة للدالة $f(n)=\sum_{K=0}^{r+1}b_Kn^K$ سيكون لدينا:

$$f(n+1)=\sum_{K=0}^{r+1}b_K(n+1)^K \;\&\; f(1)=\sum_{K=0}^{r+1}b_K$$

حيث $b_{r+2-i}=a_{i,1}$ بالنسبة لجميع $i\in\{1,2,3,\ldots,r+1\}$.

إذن، بواسطة الفرضية المساعدة-السابقة،

$$\sum_{t=1}^{n}t^r=\sum_{K=0}^{r+1}b_K(n+1)^K-\sum_{K=0}^{n-1}b_K$$ أو

$$\sum_{t=1}^{n}t^r=\sum_{K=0}^{r+1}b_K[(n+1)^K-] \qquad \text{(II)}$$

ولكن بواسطة نظرية ذات الحدين، سيكون لدينا بأنه:

$$(n+1)^K-1=\binom{k}{0}n^k+\binom{k}{1}n^{K-1}+..+\binom{k}{k-1}n$$

إذن في معادلة (II)

$$\sum_{t=1}^{n}t^r=\sum_{K=0}^{r+1}b_K\left[\binom{k}{0}n^k+\binom{k}{1}n^{K-1}+..+\binom{k}{k-1}n\right]$$

أو

$$\sum_{t=1}^{n}t^r=$$

$$n\sum_{K=0}^{r+1}\left[b_k\binom{k}{0}n^{k-1}+b_k\binom{k}{1}n^{K-2}+..+b_k\binom{k}{k-1}\right]$$

والآن إذا أطلقنا على $b_K\binom{k}{j}=c_j$، سيكون لدينا $\sum_{t=1}^{n}t^r=n\sum_{j=0}^{r}c_jn^j$ لأنه عندما تكون $k=0, b_0\binom{0}{j}=c_j=c_0$ والذي يؤدي أن $j=0$ وعندما تكون b_{r+1}، $k=r+1$، فإن $b_{r+1}\binom{r+1}{j}=c_j$، والتي تدل ضمنا على أن $j=r$. إذن، فإن النظرية التي تقول: إن الصيغة العامة لسلسة بصيغة $\sum_{t=1}^{n}t^r$ هي $n\sum_{j=0}^{r}c_jn^j$، حيث $c_j=b_K\binom{K}{j}$ بالنسبة لجميع $j\in\{0,1,2,\ldots,r\}$ وأن $b_{r+2-i}=a_{i,1}$ بالنسبة لجميع $i\in\{0,1,2,\ldots,r+1\}$.

مثال 1 Example: جد $\sum_{t=1}^{n}t^2$.

في هذا المثال r=2، وعليه سيكون لدينا:

$$\begin{pmatrix} \binom{3}{1} & 0 & 0 \\ \binom{3}{2} & \binom{2}{1} & 0 \\ \binom{3}{3} & \binom{2}{2} & \binom{1}{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

إذن، $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ وأن A^{-1} هي:

$$A^{-1}=\frac{(Adj.A)'}{Det.A}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}'}{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$ أو

$$A^{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}'}{6}$$

وعليه فإن:

$$X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&3&0\\1&-3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

وأن

$\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_3\\b_2\\b_1\end{pmatrix}$ والتي تدل ضمنا على $\left.\begin{aligned}b_3&=\frac{1}{b}(2)\\ b_2&=\frac{1}{b}(-3)\\ b_1&=\frac{1}{b}(1)\end{aligned}\right\}$

إذن، $f(n)=\frac{1}{6}[2n^3-3n^2+n+b_0]$

$$f(n)=\frac{1}{6}[2n^3-3n^2+n+b_0]$$

$$f(n+1)=\frac{1}{6}[2(n+1)^3-3(n+1)^2+(n+1)+b_0]$$

وأن، $f(1)=\frac{1}{6}(b_0)$ وعليه، فإن مجموع السلسلة سيكون،

$$k^2=f(n+1)-f(1)=\frac{1}{6}[2(n+1)^3-3(n+1)^2+(n+1)]$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

مثال 2 Example:

جد مجموع 1+2+3+...+n. في هذا المثال فإن السلسلة هي $\sum_{K=1}^{n}K$ وأن r=1. إذن، ستكون المعادلة:

$$\begin{pmatrix}\binom{2}{1}&0\\ \binom{2}{2}&\binom{1}{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

بعدئذ، $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$

إن مقلوب المصفوفة A سيكون بعدئذ $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\ \dfrac{-1\qquad 2}{2}\end{pmatrix}$

وأن $X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

وهذا يدل ضمنا على أن $b_0=\frac{1}{2}(1)$ وأن $b_1=\frac{1}{2}(-1)$. بعدئذ،

$$f(n)=\frac{1}{2}(n^2-n+a_2)$$

$$f(n+1)=\frac{1}{2}[(n+1)^2-(n+1)+a_2]$$

$$f(1)=\frac{1}{2}(a_2)$$

بعدئذ،

$$\sum_{K=1}^{n}K=f(n+1)-f(1)=\frac{1}{2}[(n+1)^2-(n+1)]$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

وبعد ممارسة تمرين كاف، ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على حل التمارين الآتية.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بإكمال التمارين الآتية:

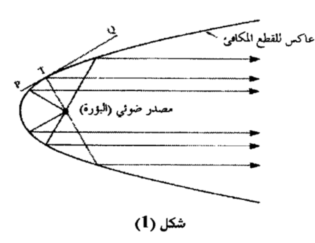
1) جد مجموع: $1^3+2^3+...+n^3$.

2) جد مجموع $\sum_{K=1}^{n}K^5$.

3) ما هي التغييرات في النظرية العامة، إذا كانت في $\sum_{t=1}^{n}t^r$ t عددا زوجيا.

105 آلة حاسبة للقطع المكافئ
A Parabolic Calculator

بعد إكمال تعليم خصائص القطع المكافئ للصف الحادي عشر بصف الرياضيات، قد يرغب المعلم بمناقشة بعض تطبيقات القطع المكافئ. ويمكن أن يناقش المعلم خصائص الانعكاس لسطح القطع المكافئ مثل الضوء الساقط ،أو المرآة في التلسكوب. إن المصدر الضوئي عند بؤرة سطح القطع المكافئ العاكس (شكل 1) يعكس الأشعة بعيدا عن السطح في مسارات متوازية Parallel Paths. ويمكن أن يلاحظ بان زاوية الشعاع الساقط ∠FTP، تساوي زاوية الانعكاس ∠FTQ.

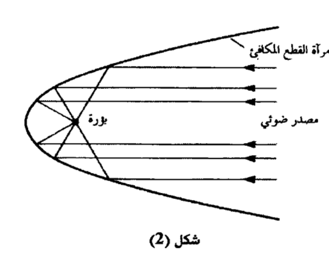


شكل (1)

يستخدم نفس المبدأ في التلسكوب (شكل 2) (أو وحدة الرادار). ولكن في هذه الحالة فإن الأشعة المتولدة في مصادر خارجية والمنعكسة عن المرآة (أو شاشة الرادار) إلى البؤرة، والتي تتألف من كاميرا، أو جهاز آخر من الأجهزة التحسس الضوئي.

إن تطبيقات أخرى مثل مسار القطع المكافئ للأجسام المقذوفة سوف تؤخذ بنظر الاعتبار. وكذلك الحال مع تطبيق غير مألوف للقطع المكافئ والذي يتضمن خصائصه على المستوى الديكارتي Cartesian Plane.

إن هذا الأنموذج سوف يعرض طريقة لاستخدام القطع المكافئ على المستوى الديكارتي بوصفه آلة الحساب تستخدم في عمليات الضرب والقسمة. إن التجهيز الوحيد الذي سيفتقر إليه الطلبة هو أوراق مخططات رسومية ومسطرة عدلة.



شكل (2)

أهداف الأداء Performance Objective

- سيقوم الطلبة برسم قطع مكافئ – مناسب وإجراء بعض عمليات الضرب معه.
- سيقوم الطلبة برسم قطع مكافئ – مناسب وإجراء بعض عمليات القسمة عليه.
- سيبرر الطلبة (تحليليا) سبب "عمل" طريقة الضرب المطروحة في هذه الوحدة.

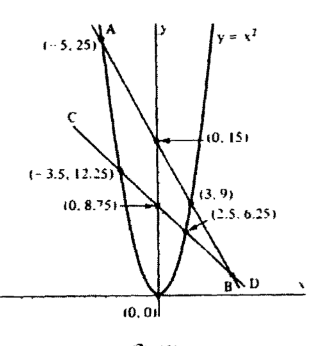
التقييم السابق Preassessment

قبل عرض هذه الوحدة على الطلبة، ينبغي أن يتأكد المعلم من أن طلبته قادرين على رسم مخطط لقطع مكافئ، وكونهم قادرين على إيجاد معادلة خط مستقيم، إذا توفرت لديهم نقطتان من نقاطه.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ليقم الطلبة برسم الإحداثيات والقطع المكافئ $y=x^2$ على ورقة مخططات رسومية ذات حجم كبير (يفضل ان تكون من النوع الذي يحوي على مربعات صغيرة – خطوط بيانية). كما يجب أن تتم عملية الرسم بصورة بالغة الدقة. ومتى اكمل الطلبة عملهم على الرسم، فسوف يكونون على استعداد لإجراء الحسابات. على سبيل المثال ، افترض بأنهم يرغبون بضرب

5×3. فسيقومون، ببساطة، برسم مستقيم يصل بين نقطة على القطع المكافئ والإحداثي الأول Abscissa هو 3 ونقطة الإحداثي الأول هي 5−. إن نقطة حاصل ضرب 3 و 5 هي إحداثي النقطة حيث يقطع هذا المستقيم المحور الصادي y-axis (شكل 3، AB)



شكل (3)

لمزيد من التمرين دع الطلبة يقومون بضرب 3.5×2.5. هنا يجب عليهم رسم المستقيم الذي يحوي النقاط (6.25، 2.5) و (12.25، 3.5−). (هذه هي النقاط على القطع المكافئ $y=x^2$، والتي إحداثيها الأول هما (2.5 و 3.5−). إن إحداثي النقطة حيث يقطع هذا المستقيم (شكل 3، $\overleftrightarrow{CD}$) المحور الصادي هي حاصل ضرب 2.5 و 3.5 وهو 8.75. بصورة عامة فإن حجم الرسم البياني سوف يحدد درجة الدقة التي يمكن الوصول إليها. ويجب أن يدرك الطلبة بان النقاط الواقعة على القطع المكافئ والتي كان إحداثيها الأول 2.5− و 3.5 يمكن استخدامها بدلا من النقاط التي إحداثيها الأول 2.5 و 3.5− في المثال السابق.

عند هذه النقطة قد يسأل المعلم الطلبة عن كيفية استخدام نفس المنهج في إجراء عملية القسمة.

إن ملاحظة الطلبة لعملية القسمة بوصفها معكوس عملية الضرب. سوف يقترح بأن $\overleftrightarrow{CD}$ يمكن استخدامها لتقسيم الآتي: 8.75÷3.5. إن نقطة التقاطع التي يصنعها $\overleftrightarrow{CD}$ مع القطع المكافئ. النقطة (6.25، 2.5)، سوف تثمر الجواب 2.5.

سيكون المعلم على جانب كبير من الحكمة عندما يعرض على الطلبة مجموعة متباينة من التمارين الفكرية لكي يزدادوا ألفة بهذه التقانة، ويمكن أن يستخدم الطلبة مسطرة عدلة (دون رسم مستقيم) لقراءة الإجابات من الرسم البياني.

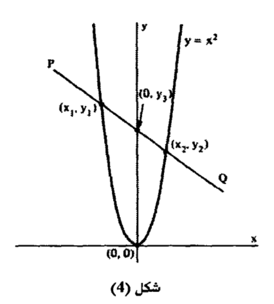
بعد إكمال التدريب والمران الكافي، سيصبح الطلبة شغوفين بمعرفة سبب عمل هذه التقانة. وللبرهنة على أنها تعمل، ليقم طلبة الصف باعتبار الحالة العامة الآتية (شكل 4).

ليقطع $\overleftrightarrow{PQ}$ القطع المكافئ $y=x^2$ عند النقطتين (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، ويقطع المحور الصادي عند النقطة (Q, y_3). يجب على هذا البرهان أن يستنتج بأن $y_3 = |x_1x_2|$.

البرهان Proof:

ميل $\overleftrightarrow{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2$ (بما أن $y_2 = x_2^2$ و $y_1 = x_1^2$).

يمكن وصف ميل $\overleftrightarrow{PQ}$ بأي نقطة (x, y)، وكما يأتي $\frac{y - y_1}{x - x_1}$ وعليه فإن $\frac{y - y_1}{x - x_1} = x_1 + x_2$ ستكون معادلة $\overleftrightarrow{PQ}$ عند النقطة $(0, y_3)$



شكل (4)

وسيكون $\frac{y_3 - y_1}{0 - x_1} = x_1 + x_2$

وأن $y_3 = x_1^2 - x_1x_2 + y_1$ ولكن $y_1 = x_1^2$، إذن $y_3 = -x_1x_2$ ولكن هذا موجب، وعليه $y_3 = |x_1x_2|$.

بمعرفة هذا البرهان قد يرغب الطلبة اختبار قطع مكافئ آخر في محاولة لاستبدال $y=x^2$ بقطع مكافئ "أكثر ملائمة" إن هذا المنهج سيزود الطلبة بمجمع من التحريات الإضافية. فعلى

سبيل المثال. يمكن استخدامها في "إنشاء" مستقيم بطول $\sqrt{a}$. حيث سيحتاج الطالب إلى إنشاء مستقيم مواز لمحور السينات فقط، ويقطع محور الصادات عند النقطة $(0,a)$.

إن قطعة ذلك المستقيم، والتي تقع بين محور الصادات والقطع المكافئ سيكون لها طول مقداره $\sqrt{a}$.

ينبغي أن تشجع التحريات الإضافية التي يمارسها الطلبة في هذا المضمار.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقم الطلبة برسم القطع المكافئ $y=x^2$ واستخدامه بعدئذ في حل التمارين الآتية:

أ) 5×4 ب) 4.5×5.5

ج) $4 \div 2.5$ د) $1.5 \div 0.5$

2. ليبين الطلبة كيفية استخدام $y=\frac{1}{2}x^2$ لإنجاز عمليتي الضرب والقسمة.



إنشاء قطوع ناقصة
Constructing Ellipses

تزود هذه الوحدة الطالب بوسيلة جيدة لإنشاء القطوع الناقصة وباستخدام المسطرة العدلة والفرجار.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة برسم نقاط على القطع دون استخدام معادلة.
2. سوف يستخدم الطلبة علاقة الدائرة بالقطع الناقص في إنشاء قطوع ناقصة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد اكملوا السنة العاشرة بمادة الرياضيات، وعلى دراية كافية بمبادئ المتطابقات المثلثية. وستسهم المعرفة الكافية بالهندسة التحليلية في مساعدة الطلبة، أثناء دراستهم لهذه الوحدة، بيد أنها ليست ضرورية جدا.

اسأل الطلبة إنشاء قطع ناقص باستخدام أي طريقة (يعني، تحليليا، أو باستخدام أدوات خاصة).

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

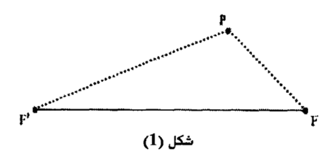
بعد فحص محاولات الطلبة لإنشاء قطع ناقص، دعهم يأخذون بعين الاعتبار دقة العمل الذي قاموا بإنجازه. قد يحاول بعض الطلبة الرسم يدويا، بينما يعمد آخرون إلى رسم منحنى مناسب على قطعة من ورق الرسوم التخطيطية. إن هذا الأمر سوف يكون عاملا مشجعا يؤدي بنا إلى طريقة I.

الطريقة Method I:

الإنشاء نقطة فنقطة Point-By-Point

إن أحد تعاريف القطع الناقص هو: عبارة عن بؤرة نقطة P، والتي تتحرك بحيث أن مجموع أبعادها عن نقطتين ثابتتين ومعلومتين F و F′، يكون ثابتا على الدوام. من شكل 1، يتضمن التعريف الذي أوردناه قبل قليل أن

$$PF + PF' = \text{ثابت} \qquad (1)$$



شكل (1)

بصورة مألوفة فإن هذا الثابت سوف يعطى قيمة 2a، ويبدو بأنه ليس ثمة صعوبة كبيرة في اشتقاق معادلة القطع الناقص من هذا التعريف:

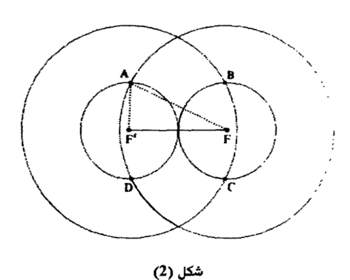
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

لا ريب أن كلا من إنشائي الإبهام المبسط Popular

Thumbtack ؛ وانشوطة الخيط String-loop يستندان مباشرة إلى هذا التعريف (حيث تنطبق انشوطة الخيط المشدود بين إبهامين وقلم يغير الموقع).

الإجراء Procedure: ضع ورقة بمقاس $11''\times 8\frac{1}{2}''$ بوضع أفقي. وضع عليها خط متمركزا – أفقيا ″4 والذي تمثل نقطتي نهايته F و ′F بؤرتي القطع الناقص (انظر شكل 2). ليكن التابت في معادلة (1) مساويا ″6. إذن،

$$PF + PF' = 6 \quad (3)$$



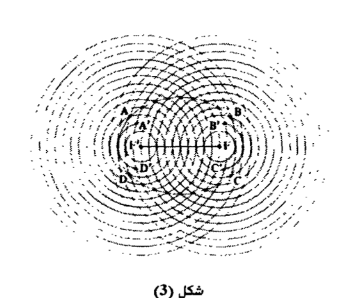
شكل (2)

باستخدام النقطة F كمركز، ارسم دائرة نصف قطرها ″4. وافعل نفس الشيء مع ′F كمركز. بعد ذلك، استخدم كل من F و ′F كمركزين لدائرتين نصف قطر كل منهما ″2. لاحظ بان هذه الدوائر الأربعة تتقاطع في أربعة نقاط D,C,B,A والتي تقع على القطع الناقص. فإذا كانت النقطة A قد اختيرت بصورة اختيارية. وبإنشاء ″FA = 2 وأن ″F′A = 4، إذن، FA+F′A=6 والذي سيحقق المعادلة (3).

إن إنشاء دقيقا لحد كبير يمكن صنعه باستخدام زيادة مقدارها ″½ بنصف قطر كل دائرة يقع مركزها على F و ′F. إن هذا الزوج من الرؤوس سوف يليه زوج آخر بنصف قطر ″9 و ″3. وهكذا على نفس المنوال كما يوضحه شكل 3. بالطبع يمكن رسم المزيد من القطوع الناقصة من شكل 3.

افترض بأن $PF + PF' = 5''$ ، بعدئذ، سيكون أحدنا بحاجة إلى تأشير نقاط تقاطع هذه الدوائر المتمركزة في F، و ′F، والتي مجموع أنصاف أقطارها 5. على سبيل المثال، عند إنشاء (3) باستخدام الزيادة ″¼ المقترحة، فإن من الضروري عند بعض النقاط استخدام قطر ″3½ على المركزين F و ′F، ونصف قطر آخر مقداره ″1½ متمركز على F و ′F ثانية. إن نقاط تقاطع هذه الدوائر D′,C′,b′,A′، توفر نقاطا أربعة على قطع ناقص آخر بحيث أن استخدام ′A بصورة اختيارية،

$FA' + F'A' = 5''$.



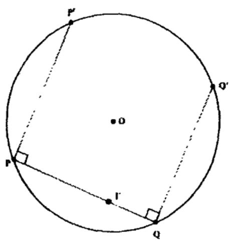
شكل (3)

إذن شكل 3 يعرض القطعتين الناقصتين اللذين تم رسمهما ويحتويان على F و ′F كبؤرتين لهما. ويمكن رسم قطوع ناقصة أخرى بنفس الأسلوب من نفس الشكل.

طريقة Method II

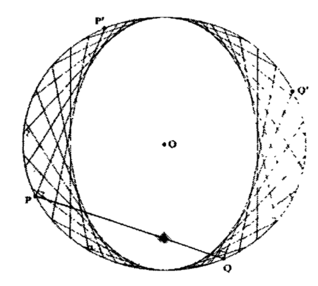
إنشاء المماس Tangent Construction

في مركز ورقة بمقاس $11''\times 8\frac{1}{2}''$ ليقم الطلبة برسم دائرة نصف قطرها ″3. حدد موقع النقطة F في داخل الدائرة بحيث تبعد ″42/1 عن مركز (انظر شكل 4).



شكل (4)

ارسم وترا يمر بالنقطة F ويقطع الدائرة عند النقطتين P و Q. وباستخدام قالب مثلث قائم الزاوية أو مسطرة النجار بشكل حرف T، أنشئ عمودين على P و Q ليلتقيان مع الدائرة عند النقطتين P' و Q'، على التوالي. بعدئذ، كل من $\overleftrightarrow{PP'}$ و $\overleftrightarrow{QQ'}$ مماس لقطع ناقص تعد النقطة F إحدى بؤرتيه. استمر بهذا الإجراء لمجموعة مشابهة من الأوتار $\overline{PQ}$، للحصول على مخطط يشابه ذاك المعروض في شكل 5.



شكل (5)

يرتكز برهان هذا الإنشاء إلى معكوس النظرية الآتية: المحل الهندسي لنقطة تقاطع مماس القطع الناقص مع العمود المقام عليه من أي بؤرة هو عبارة عن دائرة. إن البرهان على هذه النظرية يمكن العثور عليه في:

Bower's An Elementry Treatise on Analytic Geometry, PP.139-140.

إن تغيير موقع F سينشب عنه تغيير في حجم، وشكل القطع الناقص، يضاف إلى ذلك، إن البؤرة الثانية F' التي تقع على $\overleftrightarrow{FQ}$ تمتد عبر O بمسافتها المحددة.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقم الطلبة برسم شكل 3 على مقاس أكبر مثل $FF'=6''$. إن تلوين المناطق الناتجة عن نقاط تقاطع الدوائر قد برهن على كونه يفي بالمتطلبات.
2. ليقم الطلبة برسم دائرة نصف قطرها r، ومركزها O. وسيقوموا بعدئذ بتثبيت موقع النقطة F، داخل الدائرة، ورسم $\overleftrightarrow{OF}$. من الواضح، ان $r>OF$. بعدئذ دعهم يرسمون نصف قطر اختياري OQ ، ثم صل FQ، وحدد نقطة منتصف M. ثم ليقوموا بإنشاء عمود عند النقطة M قاطعا $\overline{OQ}$ عند النقطة P. بعدئذ تقع P على قطع ناقص إحدى بؤرتيه F. يضاف إلى ذلك، مد $\overleftrightarrow{MP}$ خلال النقطة P بحيث يكون مماسا لنفس القطع الناقص. ليقم الطلبة بإكمال هذا الإنشاء وتبريره.

مرجع Reference

Posamentier, A.S., and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.

إنشاء القطع المكافئ
Construction the Parabola

هدف الأداء Objective Performance

بواسطة المسطرة العدلة والفرجار سيقوم الطلبة بإنشاء قطع مكافئ. ودون استخدام معادلة.

التقييم السابق Preassessment

اسأل الطلبة إنشاء القطع المكافئ $y=x^2$ على ورقة خطوط بيانية. وعندما يتم إنجاز ذلك، دعهم يقومون برسم أي قطع مكافئ آخر على ورقة فارغة.

استراتيجيات التعليم Teaching strategies

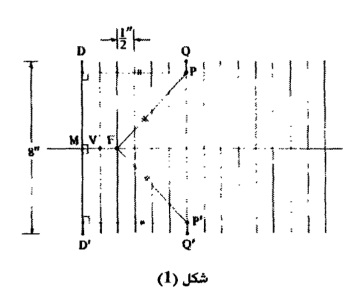
إن غالب الطلبة لن يستطيعوا رسم القطع المكافئ دون استخدام ورق الخطوط البيانية. عند هذه النقطة يستطيع المعلم تعريف القطع المكافئ بدلالة المحل الهندسي. يعني، إن القطع المكافئ هو عبارة عن المحل الهندسي الذي ينشأ عن نقاط تبعد بمسافات ثابتة عن نقطة ثابتة ومستقيم ثابت. ربما سيجد الطلبة في هذا التعريف أمارة مفيدة في اشتقاق طريقة لإنشاء قطع مكافئ. وبعد تأمل اقتراحات الطلبة، دعهم يأخذوا بعين الاعتبار الطرق الآتية:

طريقة Method I

الإنشاء نقطة – فنقطة Point-by-Point

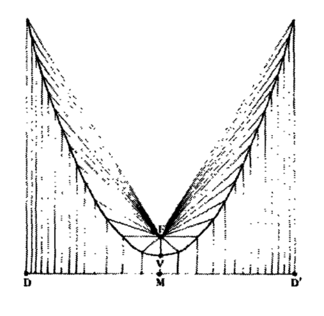
باتجاه الجهة اليسرى لورقة بمقاس $\frac{1}{2}8'' \times 11''$ تمسك بها بصورة أفقية، ارسم برفق حوالي 15 مستقيم متوازي يبعد كل منهم عن الآخر بمسافة $\frac{1}{2}$ بوصة (انظر الشكل 1). ينبغي أن يكون طول كل قطعة مستقيم 8 بوصة. ارسم العمود المنصف – المشترك لهذه المستقيمات.

ضع مؤشرات على رسمك كما يعرض شكل 1، وتأكد من تثبيت الرمز F عند نقطة تقاطع المستقيم الموازي الثالث والعمود المنصف. ليكن $\overleftrightarrow{QQ'}$ أي مستقيم موازي – اختياري، لنقل المستقيم السادس من $\overleftrightarrow{DD'}$. بواسطة الإنشاء $\overleftrightarrow{QQ'}$ يساوي $(6 \bullet 1/2) = 3''$ من $\overleftrightarrow{DD'}$. وباستبقاء هذه المسافة، واستخدام النقطة F كمركز، قم بتدوير فرجارك على شكل قوس يقطع



شكل (1)

$\overleftrightarrow{QQ'}$ أعلى وأسفل العمود المنصف عند النقطتين P′ ,P. بعدئذ ستكون كل من P′ ,P على القطع المكافئ وأن F هي بؤرته. كرر هذا الإجراء مع بقية الخطوط المتوازية، واصلا جميع النقاط. (انظر شكل 2).



شكل (2)

مناقشة Discussion: بواسطة الإنشاء، ستكون المسافة العمودية لكل من P أو P′ من $\overleftrightarrow{DD'}$ مساوية لكل من FP أو FP′.

إن تعريف القطع المكافئ يرتكز إلى مثل هذه المساواة بالمسافة ولنقاط متغيرة عن مستقيم ثابت ونقطة ثابتة. إن القطع المكافئ هو المحل الهندسي لنقاط تبعد كل منها بمسافة عن نقطة ثابتة تساوي المسافة التي تبعد بها عن مستقيم ثابت. إن المستقيم $\overleftrightarrow{DD'}$ يشار إليه بوصفه الدليل Direcrtix وأن عموده المنصف هو محور القطع المكافئ.

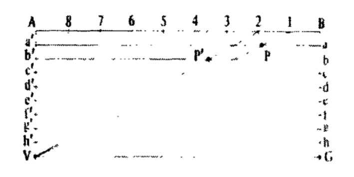
إذا كانت M نقطة تقاطع المحور والدليل $\overleftrightarrow{DD'}$، وبافتراض FM=2p، فليس ثمة صعوبة في بيان أن معادلة القطع المكافئ هي (1) $y^2=4px$ باستخدام صيغة المسافة والتعريف أعلاه.

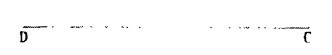
إن نقطة منتصف المستقيم $\overline{MF}$، V هي رأس قطع المكافئ، ويشار إليها غالبا بوصفها نقطة انقلاب القطع المكافئ.

الطريقة Method II

الإنشاء نقطة — فنطقة Point-by-Point

ارسم المستطيل ABCD (انظر شكل 3) ولتكن النقطتين V و G نقطتي منتصف كل من $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$، على التوالي.

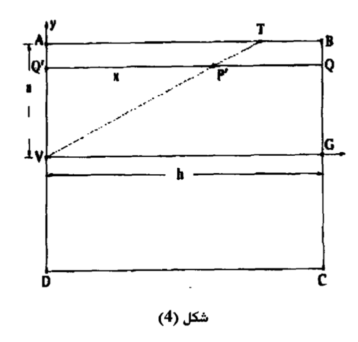




شكل (3)

لنقسّم كل من $\overline{AB}$ و $\overline{BG}$ إلى نفس العدد من الأجزاء المتساوية. مبتدئين من النقطة B، ولتكن النقاط المتتابعة بالتقسيمات المتساوية 1، 2، 3، ... على $\overline{AB}$ و a، b، c، ... على $\overline{BG}$. ارسم aa' عموديا على $\overline{BG}$. (لاحظ بأن a′، b′، c′، ... هي نقاط على $\overline{AV}$. ارسم $\overline{V1}$ والذي سيلتقي bb′ عند النقطة P′. استمر بهذا المنوال مع بقية النقاط. بعدئذ ستكون النقطتان P، P′ والنقاط الأخرى، والتي تم الحصول عليها بنفس الطريقة، على القطع المكافئ حيث يكون V راس القطع و $\overline{VG}$ محوره.

البرهان Proof: من شكل 3، ليكن $\overleftrightarrow{AD}$ محور الصادات، $\overline{VG}$ محور السينات (انظر شكل 4).



شكل (4)

لتكن b على $\overleftrightarrow{AV}$ و Q على $\overline{BG}$ ونطلق على b′ الرمز Q′. بنفس الطريقة، دع النقطة 2 في شكل 3 يطلق عليها T.

ارسم $\overline{VT}$ و $\overline{QQ'}$ بحيث يلتقيان عند النقطة P′. دع GQ = y =VQ′، x =O′P′، VG = h، AV = a. بواسطة الإنشاء (يعني، تم اختيار النقطتين T و Q بهذه الخاصية)،

$$\frac{AT}{AB}=\frac{GQ}{GB} \quad \text{و} \quad \frac{AT}{h}=\frac{y}{a} \qquad (2)$$

من مثلثات متشابهة VQ′P′ و VAT،

$$\frac{x}{y}=\frac{AT}{AV}=\frac{AT}{a} \quad \text{أو} \quad AT=\frac{ax}{y} \qquad (3)$$

بتعويض هذه القيمة لـ AT في (2) نحصل على،

$$\frac{\frac{ax}{y}}{h}=\frac{y}{a} \quad \text{أو} \quad \frac{a^2x}{y}=hy \qquad (4)$$

بحل المعادلة (4) بدلالة y ينتج:

$$y^2=\frac{a^2x}{h} \qquad (5)$$

والتي تمتاز بصيغة مشابهة لتلك في معادلة (1)، حيث

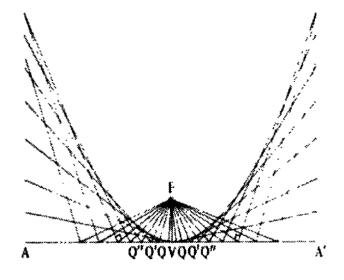
$$4P = \frac{a^2}{h} \qquad (6)$$

بما أن p هي المسافة بين الرأس والبؤرة، فإن حل (6) بدلالة p سوف يحدد موقع البؤرة بدلالة a و h بالمستطيل الأصلي.

طريقة Method III

إنشاء غلاف Envelop Construction

عند الحافة السفلى لورقة بمقاس ″11 × ″$8\frac{1}{2}$ تمسك بها بصورة عمودية. ارسم مستقيما على كامل عرض الورقة (انظر شكل 5). ارمز لهذا المستقيم بـ $\overleftrightarrow{AA'}$ وبنقطة منتصفه V. حدد موقع النقطة F على العمود المنصف، بمسافة 1 بوصة فوق V. على كل من جهتي V، حدد النقاط Q، ′Q، ″Q، ... بزيادة تدريجية صغيرة جدا، المسافة المتتابعة من V إلى Q، Q إلى ′Q. ′Q إلى ″Q، ... ضع قالب مثلث قائم الزاوية أو مسطرة نجار على شكل حرف T بحيث أن الساق يمر بالنقطة F وأن رأس المثلث قائم الزاوية يلاقي أي من النقاط Q، ′Q، ″Q.



شكل (5)

أنشئ زاوية قائمة أحد شعاعيها $\overrightarrow{FQ}$ ورسم الخط الممتد إلى حافة الورقة مع الشعاع الآخر للزاوية القائمة. كرر هذا الإجراء مع النقاط الأخرى ′Q، ″Q، ... إن المخطط الناتج ينبغي أن يكون مشابها لشكل 5، وأن الشكل "المغلف" بواسطة جميع هذه المستقيمات سيكون عبارة عن قطع مكافئ.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم طلبتك برسم زاوية بأي قياس، على أن يكون ذراعيها متساويين بالطول. ابتدئ من الرأس، ودعهم يقوموا بقياس نفس المسافات على طول كل ذراع، وتأشير كل مقطع على كل ذراع بالتأشيرات 1، 2، 3، 4، ...، 10، مع تأشير الرأس بالرمز 0. بعدئذ اسأل الطلبة وصل النقطة 10 على أحد الذراعين مع النقطة 1 على الذراع الآخر. راقب الطلبة في عملهم على وصل النقاط 9 و 2.8 و 3 مستمرين على هذا المنوال، وتأكد دائما بأن مجموع الأرقام المرتبطة سيكون 11. إن المظهر الناتج سوف يكون مشابها لشكل 5 إلى حد ما. وسيقوم الطلبة برسم غلاف للقطع المكافئ. دع الطلبة يحاولون تبرير هذا الإنشاء بالإضافة إلى الإنشاء في شكل 5.

مرجع Reference

Posamentier, A.S, and H.A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2001.



استخدامات منحنيات المستوى الأعلى لتقسيم زاوية ثلاثياً
Using Higher Plane Curve to Trisect an Angle

ستقدم هذه الوحدة اثنين من منحنيات المستوى العليا – الجبرية مع عرض تحليلي ومرئي (تجريبي) لكيفية إجراء عملية التقسيم الثلاثي لزاوية ما.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء ظروف محددة لمحل هندسي، سيتعلم الطلبة كيفية رسم منحنى مباشرة من المحل الهندسي ودون استخدام معادلة.
2. بإعطاء معادلة قطبية Polar، سيقوم الطلبة برسم المنحنى على ورقة بمحاور قطبية.
3. بإعطاء أحد المنحنيات التي نوقشت خلال هذه الوحدة، سيعمد الطلبة إلى تقسيم أي زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية.

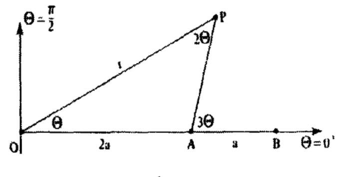
التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قد مارسوا بعض التمارين مع المحاور القطبية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

يمكن اعتبار عملية تقسيم زاوية إلى ثلاثة أقسام متساوية كتتابع لمسالة المحل الهندسي الآتية: لديك المثلث ΔOAP بالقاعدة الثابتة $\overline{OA}$ والرأس المتغير P، جد المحل الهندسي لنقاط P بحيث أن $m\angle OPA=2m\angle POA$. (انظر شكل 1).

لتكن النقطة O قطب نظام المحاور القطبية وأن $\overrightarrow{OA}$ هو الخط الأولي. حيث تكون إحداثيات A، (2a, 0).



شكل (1)

دع $m\angle AOP=\theta$ ويكون $OP=r$. بعدئذ بواسطة الفرضية $m\angle APO=2\theta$، والتي بواسطتها سيتبع $3\theta-m\angle OAP=\pi$ (π=دائري 180°). قم بمد $\overline{OA}$ عبر النقطة A مسافة مقدارها a وحدة، مع تثبيت النقطة B. بعدئذ $m\angle BAP=3\theta$ بواسطة قانون الجيوب،

$$\frac{r}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{2a}{\sin 2\theta} \qquad (1)$$

والتي سينتج عنها

$$r=\frac{2a.\sin(\pi-3\theta)}{\sin 2\theta} \qquad (2)$$

بما أن:

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, $\sin(\pi-3\theta)=\sin 3\theta$

فإن أنسب تعويض للمعادلة (3) تعطي

$$r=\frac{a\cdot\sin 3\theta}{\sin\theta\, Cos\,\theta} \qquad (3)$$

إن كون:

$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta(3\text{-}4\sin^2\theta)$

سيجعل معادلة (3) تثمر بما يأتي.

$$r=\frac{3a-4a.\sin^2\theta}{\cos\theta} \qquad (4)$$

دع $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ في معادلة (4).

$r=\dfrac{-a+4a.\cos^2\theta}{\cos\theta}$ والتي يمكن تبسيطها بسهولة عن طريق جعل $\dfrac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$ إلى:

$$r = a(4\cos\theta - \sec\theta) \qquad (5)$$

إن المعادلة القطبية المطلوبة لمحور التقسيم الثلاثي Trisectrix لماكلاورين Maclaurin.

بوضع P على الجهة المقابلة لـ $\overleftrightarrow{OA}$ (شكل 1) فإن اشتقاقا مشابها سوف ينتج عنه.

$$r = a(4\cos\theta - \sec\theta) \qquad (6)$$

بما أن $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ وأن $\sec(\theta) = \sec(-\theta)$، سيتبع عما سبق بأن (5) متناظرة بالنسبة إلى $\overleftrightarrow{OA}$. إذن، وكما تم تأكيده بواسطة (6)، بالنسبة لجميع النقاط للمحل الهندسي أعلى $\overleftrightarrow{OA}$، هناك نقاط أسفل منه مقابلة له أيضاً (إن هذه النقاط المقابلة هي انعكاسات في $\overleftrightarrow{OA}$).

لرسم المحل الهندسي، فإن تحديد لـ θ في (5) و (6) سوف يؤدي، بالطبع، إلى تزويدنا بنقاط لمحور التقسيم الثلاثي.

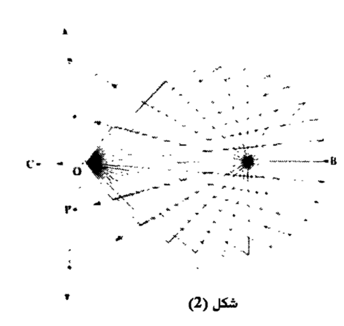
ليقم الطلبة بإعداد نسخة مماثلة تماما للمثلث ΔAOP على ورقة مخططات بمحاور قطبية، بحيث أن O تقع على نقطة الأصل، وأن $\overleftrightarrow{OA}$ على المحور الأفقي (عند $\theta = 0$ دائري). بعدئذ يجب قيام الطلبة برسم نقاط مختلفة للمنحنى ثم رسم المنحنى ذاته.

والآن يستطيع الطلبة استخدام المخطط الأصلي (على ورق اعتيادي). إن المنهج الجديد لرسم المنحنى سيكون برسم النقاط تم رسم مستقيمات بصورة مباشرة من الشروط المحددة للمحل الهندسي.

سيحتاج المرء إلى تحديد قيم مختلفة لـ θ فقط، والقيم المقابلة 3θ للزاوية $\angle BAP$، مع بقاء $\overleftrightarrow{OB}$ قاعدة ثابتة لكل من هذه الزوايان وأن تقاطع الذراع الثاني لكل زاوية سوف تنتج عنه نقطة P.

يظهر شكل 2 مثل هذا الإنشاء ولقيم تتراوح $0° \le \theta \le 55°$ في 5 فواصل.

في حالة $\theta = 0°$، $\theta = 60°$ لا يوجد ثمة مثلث بل $\overleftrightarrow{OB}$



شكل (2)

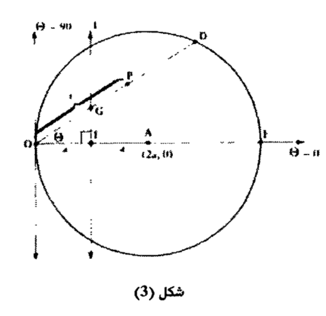
فحسب. وفي حالة $\theta > 65°$، تأمل نقطة اختيارية C بحيث $\overleftrightarrow{COA}$. دع قياس المنعكس Reflex $m\angle BAp = 195°$، وهكذا تقع P أسفل $\overleftrightarrow{COA}$. بعدئذ $m\angle COP = 60°$ فيحافظ على خاصية التقسيم الثلاثي.

لاحظ انه بالنسبة لـ $|\theta| \angle 60°$، ينبغي وجود فرعي محاذي أعلى وأسفل $\overleftrightarrow{OB}$. بصورة معاكسة، لديك (5)، إنها أكثر صعوبة لحد ما عند محاولة بيان أن كل نقطة P تقع على محور التقسيم الثلاثي وأن قياس:

$$m\angle BOP = \frac{1}{3} m\angle BAP.$$

إن البرهان يستند إلى بيان أن $m\angle OPA = 2\theta$، والتي ينجم عنها $m\angle BAP = 3\theta$.

يمكن الحصول على معادلة (5) والخاصة بمحور التقسيم الثلاثي لماكلورين، أيضاً، من مسألة المحل الهندسي الآتية (انظر شكل 3).



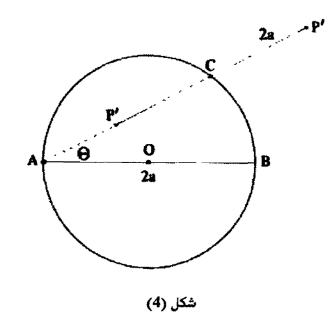
شكل (3)

لديك النقطة O، قطب نظام المحور القطبي، والنقطة E(4a,o). عند النقطة A(2a, o) وهي المركز، ارسم دائرة نصف قطرها 2a. ارسم خط مستقيم يمر بالنقطة F(a, o) وعمودي على $\overleftrightarrow{OE}$. عين نقطة اختيارية D على محيط نصف الدائرة "العلوي"، وارسم $\overleftrightarrow{OD}$ قاطعا L عند النقطة G. ثم قم بتعيين النقطة P اختياريا على $\overleftrightarrow{OD}$ بحيث OP = GD. إن المعادلة القطبية الناتجة سوف تكون مشابهة لمعادلة (5). (تلميحات

للحل: لتكن $m\angle AOD = \theta$ ، $OP = r = GD$. ارسم $\overleftrightarrow{DE}$ ، مكونا المثلث قائم الزاوية ODE. صف OD بدلالة a و $\cos\theta$، وصف OG بدلالة a و $\sec\theta$).

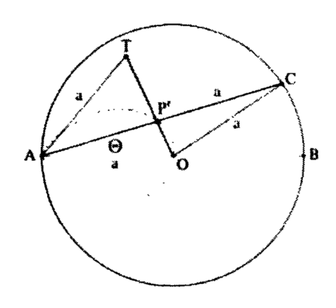
لدى الطالب، الآن، طريقة للتقسيم الثلاثي لزاوية (باستخدام أدوات إضافية ـ منحنى). ومتى احسن الطلبة فهم ما ورد أعلاه، يمكن أن يأخذوا بعين الاعتبار منحنى آخر، هو منحنى باسكال Limacon of Pascal، والذي يمكن استخدامه أيضاً بالتقسيم الثلاثي لزاوية، ولكن يجب محاولة العمل على إنشاء منحنى Limacon في بداية الأمر.

ارسم دائرة بقطر $AB = 2a$، ومركزها O. حدد نقطة اختيارية C تختلف عن النقطتين A، B، وعلى محيط الدائرة. ثم ضع حافة المسطرة على النقطة C وتمر في نفس الوقت بالنقطة A. عين النقطتين P و P′ وتبعدان بوحدة a عن كل جانب من جانبي النقطة C. كرر هذه العملية بالنسبة لمواقع مختلفة للنقطة C بعدئذ ستكون P و P′ نقطتان على منحنى Limacon.



شكل (4)

بالنسبة لتأثير مرئي يناظر شكل 2، قم بتقسيم محيط الدائرة إلى 18 قوسا بفواصل متساوية. وكرر الإجراء في الفقرة السابقة لكل من هذه النقاط الثمانية عشر، الأمر الذي سينتج عنه 36 نقطة على محيط منحنى Limacon. إن القطر المقترح لزاوية القاعدة O سيكون ″3، فيصبح ″$P'C=CP=1\frac{1}{2}$.



شكل (5)

يظهر شكل 5 دائرة القاعدة O، والعروة الداخلية لمنحنى Limacon، بالإضافة إلى بضعة نقاط ومستقيمات أخرى تم استخدامها للتقسيم الثلاثي الآتي: لتكن الزاوية $\angle BAT$ متطابقة مع الزاوية التي يراد تقسيمها إلى ثلاثة أقسام متساوية، واجعل $AT=a$. ارسم $\overline{TO}$، قاطعا العروة عند النقطة P′، وبعدئذ ارسم $\overline{AP'}$. وسنعرض الآن بأن $m\angle BAT$= 3 أضعاف $m\angle BAP'$.

قم بمد $\overline{AP'}$ بحيث يقطع الدائرة عند النقطة C. بما أن P′ هي نقطة على منحنى Limacon، و $a=CP'$، من الإنشاء أعلاه. ارسم $\overline{OC}$ وليكن قياس $\theta = m\angle AOP'$. مباشرة، سيكون $OA=OC$، $m\angle C = \theta$، وعليه $\pi = m\angle AOC - 2\theta$.

وبما أن المثلث $\Delta OCP'$ متساوي الساقين، فإن قياس كل من زاويتي قاعدته يساوي $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\theta$. وقياس $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\theta = m\angle AP'O$. وسيعقب ذلك بأن $m\angle AOP' = \frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$.

ولكن المثلث ΔATO هو مثلث متساوي الساقين أيضاً، إذن:

$$m\angle T = \frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$$

والذي قد طلب البرهنة عليه.

التقييم اللاحق Postassessment

أنشئ منحنى Limacon شكل 4 عبر تعيين موقع P و P′ والتي تبعد كل منها مسافة 2a وحدة عن كل جهة من جهتي النقطة c.



إنشاء أغلفة دائرية لمساري المنحنيين: دويري فوقي وتحتي
Constructing Hypocycloid and Epicycloids Circular Envelopes

في هذه الوحدة سيتم إنشاء علاقة مشتركة بين منحنيين دويرين اوليين. وسيقوم الطلبة بعدئذ بإنشاء غلاف دائري والذي سيطوق آنيا كل من هذين المنحنيين.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتعريف كل من مسار الدويري الفوقي والتحتي.
2. سيقوم الطلبة بإنشاء مسار دويري فوقي، ومسار دويري تحتي.
3. سيقوم الطلبة بتعميم هذه الإنشاءات على مسارات دويرية فوقية وتحتية أخرى.

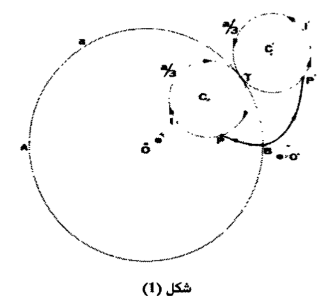
التقييم السابق Preassessment

تعد رياضيات السنة العاشرة أمراً بالغ الأهمية خلال هذه الوحدة. وستسهم المعرفة بحدودها الدنيا بموضوع الإحداثيات القطبية في مساعدة الطلبة بالفهم لحد ما.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

استهل تقديم منحنى المسار الدويري الفوقي، ومنحنى المسار الدويري التحتي بدحرجة أقراص دائرية مختلفة المقاسات حول المحيط الداخلي والخارجي، على التوالي، بقرص دائري ثابت وبنصف قطر ثابت. وإذا كان ممكنا، دع نصف قطر الدائرة الثابتة عدد صحيحا من مضاعفات نصف قطر الدائرة المتدحرجة. وليقم طلبتك بتأمل المحال الهندسية Loci التي حصلوا عليها بواسطة النقطة الثابتة على محيط الدائرة المتدحرجة متغيرة الحجم. وبالنسبة للدورانات الداخلية، سيكون من الضروري أن تتجوف الدائرة الثابتة إلى الخارج. أن توفر عدة الرسم البياني الحلزوني Spirograph Kit يعد موردا محفزا ذو أهمية بالغة. – ستحلل هذه الوحدة الحالة عندما تكون الدوائر المتدحرجة – الداخلية والخارجية، والتي نصف قطر كل منها $b=\frac{a}{3}$ كما تظهر في شكل 1 (العمود التالي) نقطة O هي مركز الدائرة الثابتة، نصف قطرها a، وهو قطب نظام الإحداثيات القطبية. تمثل النقطتان C، C' مركزي الدائرتين التدحرجتين الداخلية والخارجية. وسوف نفترض بأن كلا من الدائرتين المتدحرجتين تكونان على تماس دائم فيما بينهما عند النقطة T. من اجل هذا، يصنع $\overleftrightarrow{OT}$ زاوية مقاسها θ مع المستقيم الأولي، ويقطع الدائرتين C، C' عند النقاط I، و T، و I'، ويحتوي مركزي C و C'. لقد تم استنتاج أن كل دائرة تكون مماسة لدائرة ثابتة عند النقطة B، بصورة أولية؛ يضاف إلى ذلك أن كل من النقطتين P و P' هما نقطتان ثابتان على محيط الدائرتين C و C'، على التوالي.

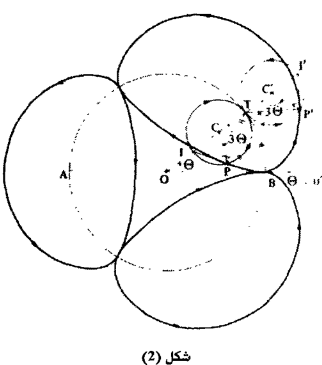
في لحظة بدء الدائرتين دورتهما، كانت النقطتين P و P' منطبقتان على B. وتظهر المحال الهندسية الجزئية من B إلى P و P' في شكل 1.



شكل (1)

في شكل 2، قمنا بعرض المحال الهندسية التامة التي تمسحها كل نقطة ثابتة. إن محل P الهندسي هو عبارة عن مسار دويري تحتي لثلاثة قرنات Cusps، غالبا ما يطلق عليها مثلثية Deltoid، بينما يتخذ المحل الهندسي لـ P' شكل مسار

دويري فوقي بثلاثة قرنات. تحتاج كل دائرة إلى ثلاثة دورات كاملة قبل أن تعود ثابتة إلى النقطة B. بعدئذ ستكون الدائرة الثابتة محيطا للمثلثية Deltoid ودائرة داخلية بالنسبة لقرنات المسارات الدويرية – الفوقية الثلاثة.



شكل (2)

إن الخطوط الآتية قد رسمت في كل دائرة: $\overline{CP}$ ، $\overline{IP}$ ، $\overline{TP}$ للدائرة C، و $\overline{IP}$ ، $\overline{C'P'}$ ، $\overline{IP}$ للدائرة C'.

ليبرر طلبتك سبب ذلك.

(1) طول $\overset{\frown}{TP}$ = طول $\overset{\frown}{TB}$ = طول $\overset{\frown}{TP'}$ بعدئذ بين بأن:

(2) $m\angle TCP = 3\theta = m\angle TC'P'$

بما أن أنصاف أقطار الدائرتين C و C' متساويين،

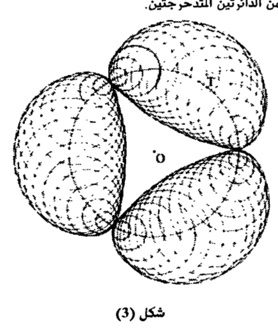
$\Delta TPC \cong \Delta TP'C'$ (SAS)، وأن الأضلاع المقابلة:

$$TP = TP' \quad (3)$$

لاحظ بأن $m\angle TPI = 90° = m\angle TP'I'$، يضاف إلى ذلك بأننا قد قررنا مسبقا وبدون برهان أن كلا من $\overline{PI}$ و $\overline{P'I'}$ يمسان المثلثية عند النقطة P والمسار الدويري الفوقي عند النقطة P'، على التوالي. يمكن العثور على مزيد من التفاصيل في مرجع (2).

إن معادلة (3) أعلاه تدل ضمنا على أن الدائرة التي مركزها T، ونصف قطرها $TP = TP'$ ستكون مماسة لكل منحن عند P و P'.

لا شك أن التغير في T سيصاحبه تغيير مقابل في طول $\overline{TP'}$ (أو $\overline{TP}$). وقد عرضنا في شكل 3 النتيجة النهائية التي تم الحصول عليها عندما رسمت دوائر لكل 60 موقع وبتباعد متساوي عن T على طول الدائرة الثابتة. لقد استثمرنا خصائص التناظر لكل منحن للتقليل من حجم العمل المطلوب لتحديد الأطوال المتغيرة لقطعة $\overline{TP}$ ، ونظرا لأن كل منحن يكرر ذاته كل 120°، وأن $\overline{OI'}$ يقسم المنحنى تناظريا عند $m\angle\theta = 60°$، فإن المطلوب الوحيد سيكون الحصول على أطوال TP بين $0 \le \theta \le 60°$، وفي فواصل بقياس 6. إن هذه الأطوال قد تم الحصول عليها عبر أعداد رسوم دقيقة للمواقع العشرة المطلوبة لكل من الدائرتين المتدحرجتين.

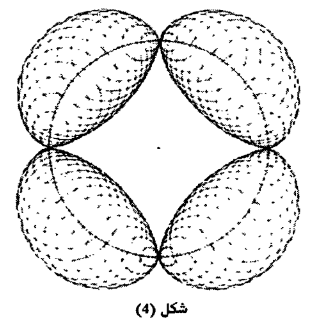


شكل (3)

التقييم اللاحق Postassessment

لاختبار مقدار استيعاب الطلبة لموضوع المسارات الدويرية الفوقية والتحتية، دعهم يقومون بإكمال التمارين الآتية.

1. يعرض شكل (4) أدناه النتائج التي تم الحصول عليها عندما $b = \frac{a}{4}$ برر وجود 4 قرنات للمسار الدويري التحتي وأخرى للمسار الدويري الفوقي.
2. عمم بالنسبة $b = \frac{a}{n}$ ، $n = 5, 6, \ldots$ ، .



شكل (4)

3. اعد رسما للحالة $b=\frac{a}{4}$ (الكليوي The Nephroid) واعرض مرئيا بأن المحل الهندسي لنقطة ثابتة على الدائرة المتدحرجة – الداخلية هو قطر الدائرة الثابتة.

4. كرر بالنسبة للحالة b=a (القلبي Cardioid). وبين أن جميع الدوائر المتمركزة في T تمر خلال نقطة ثابتة، يعني أحد المحال الهندسية ينحل إلى نقطة.

مراجع Reference

Beard, Roberts, S., Patterns in Space, Creative Publication, 1973.

Lockwood, E.H., A Book of Curve, Cambridge University Pass, 1961.



التتابع التوافقي The Harmonic Sequence

من الأفضل عرض هذه الوحدة على الصف بعد اتقانه العمل على التتابعات الحسابية والهندسية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتعريف التتابع التوافقي.
2. سيعرض الطلبة التتابع التوافقي بصورة هندسية.
3. سيحل الطلبة مسائل بسيطة بالتتابعات التوافقية.

التقييم السابق Preassessment

أسأل الطلبة إيجاد الحد الرابع بالتتابع $1\frac{1}{3}, 1\frac{11}{17}, 2\frac{2}{13}$

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن رد الفعل، الطبيعي، الصادر عن الطلبة سيكون بمحاولة إيجاد الحد الرابع بالتتابع أعلاه عن طريق امتحانها بإيجاد فرق مشترك. وعندما لا تنجح هذه المحاولة، سيتوجهون صوب نسبة مشتركة. وخلال فترة قصيرة سوف يشعر طلبتك بإحباط كبير. الأمر الذي سيمنحك فرصة جيدة لتحفيز طلبتك نحو نوع "جديد" من التتابع.

أسأل الطلبة كتابة كل حد بصيغة كسر غير حقيقي ثم كتابة مقلوباتها. وسينتج عن هذا $\frac{3}{4}$ و$\frac{17}{28}$ و$\frac{13}{28}$ او $\frac{21}{28},\frac{17}{28},\frac{13}{28}$. إن الفحص الإضافي لهذا التتابع الجديد سوف يؤشر بوضوح إلى كونه تتابع حسابي وبفارق مشترك مقداره $\frac{-4}{28}$. والآن يستطيع الطلبة إيجاد الحد الرابع – المطلوب بسهولة ويسر، $\frac{1}{9/28}=\frac{28}{9}=3\frac{1}{9}$.

والآن يجب أن يحفز الطلبة على تعلم المزيد حول تتابع التوافقي.

تأمل ثلاثة أو أكثر من الحدود في تتابع حسابي. على سبيل المثال، a_1، a_2، a_3، ...، a_n. أن تتابع مقلوبات هذه الحدود $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\frac{1}{a_3},...,\frac{1}{a_n}$ يطلق عليه التتابع التوافقي. إن اصطلاح "توافقي" قد جاء من خاصية الأصوات الموسيقية. فإذا صدرت الأصوات الموسيقية عن مجموع من الأوتار ذات الشد المتجانس، والتي تتناسب أطوالها إلى $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$، سوية، فإن التأثير يطلق عليه "متناغم (متوافق) Harmonious" بالنسبة للأذن. إن هذا التتابع هو تتابع توافقي، كما هو الحال مقلوبات الحدود في تتابع حسابي، 6،5،4،3،2،1.

لا توجد صيغة عامة لوصف مجموع الحدود في تتابع توافقي. وتعالج المسائل التي تتعامل مع تتابع التوافقي بدلالة التتابع الحسابي الذي يرتبط بصلة معها.

هناك نظريتان من المفيد أخذها بعين الاعتبار في هذا المقام:

نظرية Theorem 1:

إذا أضيف ثابت إلى (أو طرح من) كل حد في تتابع حسابي، بعدئذ سيكون التتابع الجديد حسابيا أيضاً (وبنفس الفارق المشترك).

نظرية Theorem 2:

إذا ضرب أي حد في تتابع حسابي (أو قسم) بواسطة ثابت، فإن التتابع الناتج سيكون حسابيا أيضاً (ولكن مع فارق مشترك مختلف).

إن برهان هاتين النظريتين قد ترك كتمرين للطلبة.

يمتاز برهاني هاتين النظرتين ببساطة وكونه مباشرا ولا يحتاج إلى عناية خاصة في هذا المقام. ولكن المثال الآتي سيسهم في مساعدة الطلبة على نيل تسهيلات أثناء التعامل مع التتابعات التوافقية.

مثال Example:

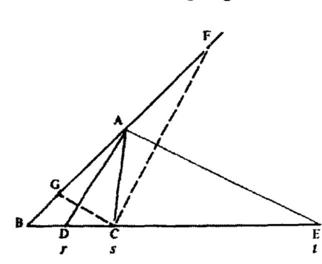
إذا كونت a، b، c تتابعاً توافقيا، برهن أن $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ تكون تتابعاً أيضاً.

الحل Solution:

بما أن $\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a}$ تكون تتابعاً حسابيا فإن: $\frac{a+b+c}{c}, \frac{a+b+c}{b}, \frac{a+b+c}{a}$ تكون تتابعاً حسابياً أيضاً. ويمكن إعادة كتابة هذا التتابع بصيغة $1+\frac{a+b}{c}, 1+\frac{a+c}{b}, 1+\frac{b+c}{a}$، وعليه تعد $\frac{a+b}{c}, \frac{a+c}{b}, \frac{b+c}{a}$ تتابعاً حسابيا. إذن $\frac{c}{a+b}, \frac{b}{a+c}, \frac{a}{b+c}$ تشكل تتابعاً توافقيا.

لا ريب أن أحد أكثر الجوانب التي تستأثر بالاهتمام لأي تتابع هي كيفية إنشاء أنموذج هندسي للتتابع ذاته.

إن إحدى التفسيرات الهندسية للتتابع التوافقي يمكن الحصول عليه من نقاط تقاطع منصفات الزاوية الداخلية والخارجية بمثلث مع أضلاع المثلث ذاته.



تأمل المثلث ΔABC، حيث ينصف $\overline{AD}$ الزاوية $\angle BAC$، وينصف $\overline{AE}$ الزاوية $\angle CAF$، وأن النقاط B، و D، و C، و E تقع على استقامة واحدة، (انظر شكل a). يمكن البرهنة بسهولة انه بالنسبة لمنصف الزاوية الخارجي $\overline{AE}$، $\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AC}$ (يعني، ارسم $\overline{GC} \parallel \overline{AE}, \overline{AG}=\overline{AC}$ كذلك $\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AG}=\frac{AB}{AC}$.

بنفس الطريقة نعالج منصف الزاوية الداخلي $\overline{AD}$، $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

(اجري البرهان برسم

$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AF}=\frac{AB}{AC}; AF=AC; \overline{CF} \parallel \overline{DA}$) وعليه، $\frac{BE}{CE}=\frac{BD}{CD}$ أو $\frac{CD}{CE}=\frac{BD}{BE}$. يمكن بعد ذلك القول بأن النقطتين B و C تفصلان النقطتين D و E بصورة توافقية. والآن افترض $\overleftrightarrow{BDCE}$ هو خط عددي، ونقطة B بوصفها نقطة الصفر، والنقطة D على إحداثي r، ونقطة C على إحداثي s، والنقطة E على إحداثي t. من اجل هذا، BD=r، BC=s، و BE=t. وينبغي علينا عرض أن r، و s، و t تكون تتابعاً توافقيا. بما أن $\frac{CD}{CE}=\frac{BD}{BE}$، $\frac{BC-BD}{BE-BC}=\frac{BD}{BE}$، أو $\frac{s-r}{t-s}=\frac{r}{t}$. وعليه سيكون $t(s-r) = r(t-s)$ وأن $ts-tr = rt-rs$. بتقسيم كل حد على rst، سنحصل على $\frac{1}{r}-\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{t}$ والذي يؤشر أن $\frac{1}{r}, \frac{1}{s}, \frac{1}{t}$ تكون تتابعاً حسابيا. إذن، r,s,t تكون تتابعاً توافقيا.

والآن ينبغي أن يكون لدى الطلبة نظرة جيدة واستبصار واضح بالتتابع التوافقي.

التقييم اللاحق Postassessment

1. قم بإعداد معادلة وبحدود التتابع التوافقي a، b، c (استخدم التعريف).
2. جد الحد السادس والعشرين بالتتابع:

$$2\frac{1}{2}, 1\frac{12}{13}, 1\frac{9}{16}, 1\frac{6}{19} \ldots$$

3. برهن انه إذا كونت a^2، b^2، c^2 تتابع حسابيا، بعدئذ (b+c)، (c+b)، (a+b) تؤلف تتابعاً توافقيا.



التحويلات والمصفوفات
Transformations and Matrices

ستسهم هذه الوحدة في صياغة جبرية لمناقشة التحويلات الهندسية باستخدام المصفوفات.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء تحويل هندسي محدد سيقوم الطلبة بتسمية مصفوفة 2×2 والتي لها تأثيرات على هذا التحويل.
2. بإعطاء مصفوفة 2×2 معلومة، سيقوم الطلبة، بمعالجة سريعة. بتسمية تحويل كل تأثيرات المصفوفة.

التقييم السابق PREASSESSMENT

1. ارسم المثلث ΔABC على مستوى ديكارتي رؤوسه: $A(2, 2)$، $B(4, 2)$، $C(2, 6)$. اكتب المحاور A'، و B'. C' والتي تنتج عندما يمر المثلث ΔABC بالتحويلات الآتية:
   أ. النقل بمقدار -5 وحدة في الاتجاه السيني و 2 وحدة في الاتجاه الصادي.
   ب. الانعكاس عبر المحور السيني.
   ج. الدوران بـ $90°$ حول نقطة الأصل.
   د. زيادة معامل القياس 2 مع وجود المركز عند (2,2).
2. لديك مثلث متساوي الأضلاع كما يظهر في الشكل الآتي، بحيث يبعد كل رأس بنفس المسافة عن نقطة الأصل، قم بإدراج التحويلات الهندسية والتي تغادر موقع المثلث دون تغير. وبافتراض عدم تمييز الرؤوس.

شكل (1)

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

في البداية، ينبغي أن يجعل المعلم طلبته على معرفة كافية بمجموعة الأعداد المرتبة في المصفوفة. ثم اخبر الطلبة بأن المصفوفة بحجم A×B تحتوي على a من الصفوف و b من الأعمدة التي تستقر داخل قوسين. وعندما تكون a=b يطلق على المصفوفة "مصفوفة مربعة Square" ينبغي أن يشاهد الطلبة بأن إضافة المصفوفات يتضمن إضافة الأعداد في المواقع المتناظرة بكل مصفوفة. على سبيل المثال:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

. ويجب أن يلاحظ الطلبة بأنه يجب على المصفوفات التي يراد جمعها أن تكون بنفس الحجم (الأبعاد).

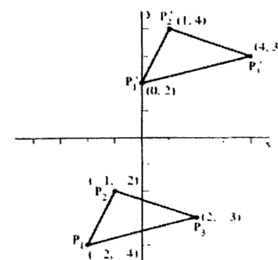
عند عرض أسلوب ضرب المصفوفات على الطلبة، ينبغي عليك استخدام الصيغة العامة الآتية. ولاحظ بعناية علاقة العمود-الصف بين معاملات المصفوفتين في حال الضرب.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

والآن يستطيع الطلبة وصف موقع أي نقطة، إما بدلالة محاورها (x, y)، أو بواسطة مصفوفة 2×1، ويطلق عليه "متجه الموقع" Position Vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ والذي يمثل المتجه من نقطة الأصل إلى النقطة.

قد تجد أن من الأفضل استخدام عبارة "يوضع على is mapped onto" عندما تصف تأثير التحويل. إن رمز هذه العبارة باستخدام المصفوفات هو "$\longrightarrow$".

توفر عمليات النقل Translation مقدمة بسيطة إلى استخدامات المصفوفات.



إن نقل المثلث $P_1P_2P_3$ إلى $P'_1P'_2P'_3$ يمكن تعميمه بصيغة مصفوفة

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$$

تمثل $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ هنا "متجه النقل Translation Vector"، يعني أنها تنقل (x, y) 2 وحدة بالاتجاه السيني و 6 وحدات بالاتجاه الصادي. ينبغي أن يشاهد الطلبة بسهولة ويسر بأنه عبر إضافة المصفوفات أن كل نقطة P_1، P_2، P_3 توضع على P'_1، P'_2، P'_3 على التوالي، يعني:

$$P_1=\begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}=P'_1\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix},$$

$$P_2\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}=P'_2\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix},$$

$$P_3=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}=P'_3\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$$

إن إضافة مصفوفة بـ 1×2 موقع متجهات يمكن على هذا الأساس أن تصف عملية نقل في مستوى ثنائي الأبعاد Two-Dimension. يجب أن يعطي الطلبة عدة أمثلة وتمارين حيث تنتقل نقطة محددة (x_1, y_2) إلى أي نقطة أخرى (x_2, y_2) بالاختبار المناسب لمصفوفة 1×2 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ بحيث:

$$\begin{bmatrix}x1\\y1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x2\\y2\end{bmatrix}$$

إن عمليات التدوير Rotation، والانعكاسات Reflections، والتكبير Enlargement تعد أكثر تشويقا، ولكي نقوم بوصفهم جبريا سنحتاج إلى مصفوفات 2×2. يجب أن يعطي الطلبة، أولاً، مثالين أو ثلاثة أمثلة من النوع

$\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}$ لسببين، (الأول) هو حاجتهم بالتدريب على ضرب المصفوفات، وهي مهارة يفتقرون إليها بشدة قبل مباشرة العمل على بقية هذا الموضوع، و(الثاني) وهو الأهم في هذه الاستراتيجية، إن الطلبة يبدأون بالتفكير أن المصفوفة $\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}$ (أو أي مصفوفة من نوع 2 × 2) كتحويل للنقطة $P(3, 2)$ على النقطة $P'(12, 1)$.

ينبغي أن يصاحب كل مثال من هذا النوع مخطط توضيحي، كما في الشكل 2.

P (3, 2)

P' (12, 1)

شكل (2)

عندما يصبح الطلبة على معرفة كافية بالفكرة العامة بأن أي مصفوفة 2×2 تمثل عملية تحويل، يجب على المعلم آنذاك أن يكون على أهبة الاستعداد لأن يعرض لهم كيف أن بعض مصفوفات 2×2 تمثل تحويلات خاصة كالتي اصبحوا على معرفة كافية بها. على سبيل المثال، يمكن للمعلم أن يعطيهم المصفوفة ونقطة، على التوالي (وكما يأتي).

1. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\cdot\underset{P_1}{\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}}=\underset{P'_1}{\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}}$

2. $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\cdot\underset{P_2}{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}}=\underset{P'_2}{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}}$

3. $\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\cdot\underset{P_3}{\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}}=\underset{P'_3}{\begin{bmatrix}-6\\-3\end{bmatrix}}$

سيدرك الطلبة التحويلات في هذه الأمثلة كما في (1) انعكاس (عبر المحور الصادي)، (2) تدوير موجب بـ 90°، (3) تكبير بمعامل قياس 3. وللتأكيد على موضوع بأنه لم تكن محض مصادفة أن هذه المصفوفات قد أكملت التحويلات، اسأل الطلبة

اخذ النقطة العامة $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ وضربها بكل مصفوفة من هذه المصفوفات. وستكون إجابات الطلبة، على التوالي، $\begin{bmatrix}-y\\x\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}3x\\3y\end{bmatrix}$. من أجل هذا سيرى الطلبة (قد تحتاج الحالة الثانية إلى نظرة عميقة) بأن المصفوفات $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$، $\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}$ قد اكتملت بلا شك. في الحالة العامة، التحويلات التي تعرفوا عليها في الأمثلة الخاصة.

لتحقيق أهداف الأداء، وكيف أن المصفوفات توفر أداة سهلة في العمل التحويلي، بين ماذا تفعل المصفوفة 2 × 2 بوحدة المتجهات $\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}$ ،i، j$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

اختر أي مصفوفة من نوع 2×2، كما في المثال السابق، $\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}$، واسأل طلبتك القيام بضرب هذه المصفوفة مع وحدة المتجهتين i و j.

$$\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$$

استخدم مثالا آخر:

$$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

استمر مع المزيد من الأمثلة لحين يصبح واضحا لدى الطلبة بأن: في أي مصفوفة 2×2 $\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$، فإن الضرب بـ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ سوف يعطي العمود الأول $\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$، وأن الضرب بـ$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ يعطي العمود الثاني $\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$. بعبارة أخرى، إن المصفوفة تنقل متجهي القاعدة $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ على $\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$ على التوالي.

عندما يترك جميع الطلبة هذا الاستنتاج، بعدئذ يكون الصف قد امسك بالمفتاح الذي سيوصلهم إلى أهداف الأداء. تأكد فيما إذا كان طلبة الصف قادرين على إجابة كل من نوعي المسائل الآتية:

1. أي نوع من التحويل يمكن إنجازه بتطبيق المصفوفة $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ على متجهي الوحدة؟

اعرض لهم بأن $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ وكذلك $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ قد انتقل على $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ وأن $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$، وكذلك $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ قد انتقل على $\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$.

استنتج بأن $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ هو عبارة عن تكبير بمعامل قياس 2.

2. أي مصفوفة تؤثر التحويل: الدوران بواسطة 180°، متمركزة على نقطة الأصل؟ اسأل الطلبة رسم تأثير دوران 180° على متجه القاعدة.

تحقق معهم بأن $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$ وأن $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$. واسالهم عن النتائج التي ستعطيها المصفوفة 2×2 = $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$

كذلك $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$. يجب أن يكون الطلبة على معرفة تامة بأن $\begin{bmatrix}-1\\d\end{bmatrix}$ يعطي العمود الأول بالمصفوفة 2×2 وأن $\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$ يعطي العمود الثاني.

وعليه فإن المصفوفة هي $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$. وسوف ترد الكثير من الأمثلة والتمارين تشابه تلك التي وردت في الاختبار البعدي.

وبالاعتماد إلى ما يصبو إليه، فقد يرغب المعلم بمناقشة التحويل المعكوس Inverse Transformation، عند هذه النقطة، (يعني، ذلك الذي يقوم بعكس تأثير التحويل الأصلي) والتحويلات التي تتبعها تحويلات أخرى في نفس المسالة. يجب أن يكون المعلم مدركا، أيضاً، قيمة استخدام المصفوفات، لأن معكوس المصفوفة يمثل معكوس التحويل، وأن ضرب مصفوفتين 2×2 يعرض تأثير تحويل يليه آخر.

التقييم اللاحق Postassessment

1. أي من التحويلات تمثل المصفوفة؟.

(أ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. جد المصفوفة لكل من التحويلات:

أ. الانعكاس على المستقيم $y=x$.

ب. التكبير والمركز على نقطة الأصل، وبمعامل تكبير $\frac{1}{2}$.

ج. الدوران بـ $-90°$.

112 طريقة الفروقات
The Method of Difference

سيرحب الكثير من الطلبة، والذي يمتلكون معرفة كافية بالمتواليات الحسابية والهندسية، بالفرصة التي ستتيح لهم توسيع أبعاد معرفتهم بالتتابعات والسلاسل بصورة أكثر شمولا من الدوال البسيطة.

هدف الأداء Performance Objective

1. بإعطاء حدود كافية من تتابع يكون حده النوني عبارة عن دالة نسبية محددة لـ n، سيقوم الطلبة بتأليف مجموعة تتكون من الترتيبات المتوالية للفروقات.
2. بإعطاء مثل هذه المجموعة، سيستخدم الطلبة بعدئذ طريقة الفروقات لإيجاد صيغ للحد النوني n^{th} Term ومجموع الحدود النونية الأولى.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة ملمين بالنظرية ذات الحدين بالنسبة للأس الموجب التام، والذي يدرس على نحو مألوف في المدارس الثانوية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس في تحدي الصف بإيجاد الحد العام للتتابع 2، 12، 36، 80، 150، 252، ... وبعد أن برهنت الجهود الأولية للطلبة في إيجاد المتواليات الحسابية والهندسية المعروفة على عدم نجاحها، حاول أن تلمح بأن التتابعات من هذا النوع يمكن توليدها بواسطة متعدد حدود منفرد، مثل $n^2(1,4,9,....)$ و $n^3(1, 8, 27, ...)$. سيدرك أحد الطلبة بسرعة بأن الحد النوني يمكن الوصول إليه بواسطة n^2+n^3.

حاول أن تستنبط بأن عددا محدودا من مثل هذه التتابعات يمكن إنتاجها باستخدام دوال متعددة الحدود المعروفة. بعدئذ وضح للطلبة أن الطريقة البسيطة لإيجاد كل من الحد العام ومجموع هذه التتابعات.

ويطلق على هذه الطريقة "طريقة الفروقات"، ورغم عدم تعليمها بصورة عامة، لطلبة المدارس الثانوية، ولكنها رغم ذلك تقع في متناولهم.

ليقم الطلبة بإعداد "الفروقات بين الحدود المتتالية" بالتتابع أعلاه، وبعدئذ استمر بالعملية كما يظهر أدناه:

```
2   12   36   80   150   252 ...
  10   24   44   70   102 (1)   ...
     14   20   26   32 ...
        6    6    6 ...
```

لاحظ بأننا قد أدركنا مستقيما من الفروقات والذي تتساوى فيه جميع الحدود. ولاختبار هل أن هذه الحادثة هي عرضية فحسب، دع الطلبة ينشئون تتابعات من متعددات الحدود مثل $5n+n^3$، $2n^3+3$، مستمرين على هذا المنوال، وبعدئذ كرر العملية بأخذ الفروقات المتتالية. إن إجماعا سوف يبزغ سريعا بأن المستقيم الأخير وبحدود متساوية هو بلا ريب سمة مميزة لمثل هذه التتابعات. إن البرهان الصوري لهذه القضية (رغم بساطته) ليس ضروريا في هذا الوقت. لقد تم توفير الأعداد الكافي من التحفيز لغرض اختبار الحالة المعروضة أدناه.

التتابع المعطى: $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 \ldots$

المرتبة الأولى للفرق: $\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U, \Delta U_4, \Delta U_5 \ldots$ (2)

المرتبة الثانية للفرق: $\Delta_2 U_1, \Delta_2 U_2, \Delta_2 U_3, \Delta_2 U_4 \ldots$

المرتبة الثالثة للفرق: $\Delta_3 U_1, \Delta_3 U_2, \Delta_3 U_3 \ldots$

إن الرمز سيكون واضحاً بذاته لجميع الذين قاموا بكتابة مجموعة من المجموعات السابقة. إذن:

$\Delta U_3 = U_4 - U_3$، $\Delta_2 U_3 = \Delta U_4 - \Delta U_3$، ..

إذا كان رمز دلتا Δ محظورا لحد كبير لدى البعض، فيمكن استبداله بسهولة بالحرف D.

من طريقة أعداد كل إدخال في (2) يمكن أن يلاحظ: بأن أي حد يساوي مجموع الحد الذي يليه مباشرة مضافا إلى الحد الذي يقع على الجهة اليسرى أسفله.

وباستخدام هذه الملاحظة البسيطة فحسب، تستطيع الآن وصف كل حد من التتابع المعلوم كدالة للحدود التي تقل عنها وسوف يصنع حدود الجهة اليسرى. إذن

$$\Delta U_1 + U_1 = U_2 \qquad (3)$$

كذلك، $\Delta U_2 + U_2 = U_3$، وأن:

$\Delta U_2 = \Delta U_1 + \Delta_2 U_1$

$U_3 = (U_1 + \Delta U_1) + (\Delta U_1 + \Delta_2 U_1)$

$$U_3 = U_1 + 2\Delta U_1 + \Delta_2 U_1 \qquad (4)$$

بالإشارة إلى معادلة (2) ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على متابعة الاستدلال الذي يؤدي إلى صيغة تخص U_4 بدلالة U_1.

$U_4 = \Delta U_3 + U_3$. ولكن $\Delta U_3 = \Delta U_2 + \Delta_2 U_2$

$\Delta U_2 = \Delta U_1 + \Delta_2 U_1$ وأن $\Delta_2 U_2 = \Delta_2 U_1 + \Delta_3 U_1$

وعليه سيكون. $\Delta U_3 = \Delta U_1 + 2\Delta_2 U_1 + \Delta_3 U_1$

والآن باستخدام المعادلتين (3) و (4):

$U_4 = (U_1 + 2\Delta U_1 + \Delta_2 U_1) + (\Delta U_1 + 2\Delta_2 U_1 + \Delta_3 U_1)$

$$U_4 = U_1 + 3\Delta U_1 + 3\Delta_2 U_1 + \Delta_3 U_1 \qquad (5)$$

ويجمع الانتباه إلى الصيغ المستقرة داخل الإطار لكل من U_2، U_3. U_4 يستطيع المعلم استنباط الحقيقة بأن المعاملات العددية المتضمنة هي تلك التي تعود إلى نظرية ذات الحدين. لاحظ بأن المعاملات المستخدمة للحد الرابع (1،3،3،1) هي تلك الموجودة في تحديد ثنائي الحد للأس ثلاثة. وإذا بقي ذلك صادقا بصورة عامة، ينبغي أن نكون قادرين على كتابة:

$$U_n = U_1 + (n-1)\Delta U_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\Delta_2 U_1 + \ldots\ldots + {}_{n-1}C_r \Delta_r U_1 + \ldots + \Delta_{n-1} U_1 \qquad (6)$$

إذا توفرت رغبة كافية، يمكن الحصول بسهولة على البرهان الصوري للمعادلة (6) باستخدام الاستقراء الرياضي بعد إنشاء المتطابقة:

${}_nC_r + {}_nC_{r-1} = {}_{n+1}C_r.$

وقد يرغب بعض المعلمين بإعادة كتابة المعادلة (6) بحيث يشابه الرمز الذي يستخدم غالبا في معالجة المتواليات الحسابية. ولإنجاز ذلك، ليكن الحد الأول من التتابع "a"، بينما تكون الحدود الأولى لكل مرتبة تالية من الفرق: d_1، d_2، d_3 ....

بعدئذ سيكون الحد النوني كما يأتي:

$$l = a + (n-1)d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \bullet 2} d_2 + \ldots \qquad (7)$$

إيجاد مجموع الحدود النونية الأولى

Finding the Sum of First n-Terms

اختبر المجموعة الآتية، والتي تعد فيها للمرة الثانية الحدود U_1، U_2 حدودا بالتتابع المعلوم الذي نريد الحصول على مجموعه.

$$\begin{array}{ccccccc} O_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \ldots & \\ & U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & \ldots & (8) \\ & \Delta U_1 & \Delta U_2 & \Delta U_3 & \ldots & & \end{array}$$

لاحظ بأن حدود-S قد نشأت بواسطة العلاقات، مثل:

$S_2 = O + U_1 = U_1$

$S_3 = S_2 + U_2 = U_1 + U_2$

$S_4 = S_3 + U_3 = U_1 + U_2 + U_3$

$S_5 = S_4 + U_4 + U_1 + U_2 + U_3 + U_4$

إذن، إذا استطعنا العثور على صيغة لـ S_{n+1} فسوف نجد أيضاً مجموع الحدود النونية الأولى. ولإيجاد S_{n+1} يستطيع المرء تطبيق المعادلة السابقة (6) ببساطة على المجموعة (8) أعلاه. وقبل مباشرة ذلك، ينبغي أن يقارن الطلبة، بعناية، (8) مع (2). بعدئذ، ينبغي أن يصبح جليا بأن التطبيق المناسب للمعادلة (6) سوف ينتج عنه:

$$S_{n+1} = 0 + nU_1 + \frac{n(n-1)}{1 \bullet 2}\Delta U_1 + \ldots + \Delta_n U_n$$

أو

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_n = nU_1 + \frac{n(n-1)}{1 \bullet 2}\Delta U_1 + \ldots + \Delta_n U_n \qquad (9)$$

وكتوضيح للموضوع، دعنا نجمع المربعات النونية الأولى للأعداد الصحيحة،

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\ \ldots.$$
$$3,\ 5,\ 7,\ 9\ \ldots.$$
$$2,\ 2,\ 2\ \ldots.$$

إن مجموع :

$$n^2 = n.1 + \frac{n(n-1)}{1\bullet 2}.3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\bullet 2\bullet 3}.2$$
$$= \frac{6n + 9n(n-1) + 2n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

سيؤكد الطلبة بسرعة على صلاحية هذا التعبير. ومرة ثانية، كما نوهنا سابقا، يستطيع المعلم انتخاب إعادة كتابة (9) بدلالة a، d_1، d_2..... وعلى هذا المنوال.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بإيجاد الحد النوني ومجموع n من الحدود لكل مما يأتي:

(1) 2، 5، 10، 17، 26 ...

(2) 1، 8، 27، 64، 125 ...

(3) 12، 40، 90، 168، 280، 432 ...

ليقم الطلبة بتوليد تتابعات، تخصهم، من متعددات حدود بسيطة، ثم يتحدون بها زملاءهم في إيجاد الحد العام.

113 تطبيق الاحتمالات على كرة القاعدة Probability Applied to Baseball

في كل سنة تتزامن الشهور الأولى للمدرسة مع الشهر الأخير لرابطة كرة القاعدة (baseball) الأساسي. إن لعب سلسلة العالم World Series في أكتوبر يوفر عادة موردا للإلهاء Distraction. ولكن بالنسبة لمعلمي الرياضيات يمكن أن يسخر هذا الحدث لتزويد طلبة الصف بتحفيز مناسب لحشد من تطبيقات الاحتمالات والتي تمتاز بقيمة أكاديمية جوهرية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء فرق تقابل "فرق سلسلة العالم"، سيقوم الطلبة بحساب العدد المتوقع للمباريات التي سيتم خوضها.
2. بإعطاء متوسط الضربات لأي ضارب Hitter، سيقوم الطلبة باحتساب احتمال إحرازه لأي عدد معلوم من الضربات خلال اللعبة.

التقييم السابق Preassessment

إن الدراسة السابقة للتباديل والاحتمالية لا تعد ضرورية إذا تم توفير مناقشة تقديمية للطلبة حول الموضوع. إذن فالموضوع مناسب للطلبة المتقدمين — اليافعين في المدارس الثانوية (والذين لم يقوموا بدراسة نظرية ذات الحدين)، وبالمقابل فإن الطلبة الأقدم يحتاجون إلى تهيئة أقل منها بكثير.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ينبغي أن يبدأ الدرس بمناقشة غير رسمية حول أي فريق يرجح فوزه بسلسلة العالم. وينبغي أن تجلب قصاصات الجرائد التي تضم "الفرق" لكي ينشد الطلبة إلى الموضوع بصورة اكبر. وأن هذا سوف يؤدي، مباشرة إلى التساؤل عن عدد المباريات المطلوبة لاتخاذ القرار.

طول السلسلة Length of Series

إذا رمز إلى سلسلة العالم بواسطة تتابع من الحروف التي تمثل الفريق الفائز (NAANAA تعني أن الاتحاد الوطني فاز بالمباراتين الأولى والرابعة بينما خسر في بقية المباريات)، تحدى طلبة الصف بإيجاد العدد الكلي للنتائج الممكنة.

ناقش الحل بدلالة "التباديل للأشياء والتي لا تختلف جميعها". لاحظ ضرورة اعتبار الحالات المنفصلة للأهداف أربعة، خمسة، ستة، أو سبعة. واستنبط بأن القيّد في المسألة هو أن الفريق الفائز يجب أن يفوز باللعبة الأخيرة دائما.

يمكن أن يعد جدولا بالنتائج كما يأتي:

عدد المباريات التي أجريت	4	5	6	7
عدد التتابعات	2	8	20	40

جدول (1)

فيما يتعلق بالاحتمالات فإن السلسلة سوف تستمر فعلا: أربعة، خمسة، ستة، أو سبعة مباريات، وأن هذا الأمر يعتمد بلا شك على قوة الفرق. وسيدرك معظم الطلبة حدسيا بأن دلائل الفوز بالنسبة للسلسلة الطويلة سوف تزداد عندما تكون الفرق متكافئة فيما بينها، والعكس بالعكس.

إذا توفرت صحيفة "الفرق" يمكن أن يترجم ذلك إلى احتمالات فوز A ‏(P)، وفوز N‏(q=1-p). إذا كانت الفرق m:n بعدئذ p=m/(m+n).

بعد مناقشة مقيدة تستعرض خلالها المبادئ التي تشمل احتمالات الحوادث غير المعتمدة (والموضحة بإلقاء قطع النقود)، ينبغي أن يصبح واضحا بأن احتمالية اكتساح الرابطة الأمريكية هو $P(4 \text{ في } A) = P.P.P.P=P^4$. بنفس الطريقة $P(4 \text{ في } N) = q^4$، وأن الاحتمالية الكلية لسلسلة المباريات الأربعة هي ببساطة q^4+P^4. إن خير مكافأة للطلبة تكمن بإيجادهم لتأكيد ملموس لحدوسهم. لذا فإن من الأفضل تعويض القيم المختلفة لكل من P و q والتي تنتج عن الفرق المختلفة، كما تعرض في جدول (2) أدناه.

إذا كانت أفضلية A على الفرق	1:1	2:1	3:1
P (سلسلة باربع مباريات)	.13	.21	.32

جدول (2)

يجب أن يشجع الطلبة على توسيع جدول القيم هذا.

وقبل احتساب أرجحية سلسلة بخمس مباريات، استدع العمل الذي أنجز عند البداية لتحديد عدد التتابعات الممكنة للمباريات الخمسة. فهناك ثمانية من هذه التتابعات: (NAAAA، ANAAA، AANAA، AAANA، ANNNN، وهلم جرا) والاحتمالية المصاحبة لكل أول من الأربعة يمكن الحصول عليها بواسطة $p.p.p.q.p = = q.p.p.p.p = p.q.p.p.p$ $.q^4p = p.p.q.p.p$

نظرا لكون النتائج مقصورة بصورة متبادلة، فإن احتمالية $p(A \text{ في } 5)\ 4q^4q$. وبأسلوب مماثل $p(N \text{ في } 5) = 4pq^4$ وأن الاحتمال الكلي لسلسلة بخمسة مباريات هو:

$.4p^4q + 4pq^4 = 4pq\,(p^3+q^3)$

بنفس الطريقة، وبالعودة إلى الوراء للعمل الذي اجري على التبادلات عند بداية الدرس، يكون من السهل عرض أن $10p^2q^2(q^2+P^2)$ (سلسلة 6 مباريات p) وأن $20\ p^3q^3(p+q)=20p^3q^3[p+q=1]$ (سلسلة 7 مباريات p).

وعندما تكون المعلومات الكاملة قد استنبطت، يمكن توسيع جدول 2 إلى 5، 6 و 7 مباريات بالنسبة لمختلف الفرق الأولية. عند هذه النقطة، يمكن تقديم الطلبة إلى (أو يذكروا بـ) المفهوم المهم للتوقع الرياضي، E(X). أن توفر الاحتمالات لكل نتيجة، E(X) على طول السلسلة يمكن حسابها بسهولة.

الفرق 1:1

X-عدد المباريات	4	5	6	7
P(X)	.13	.24	.31	.31

$$E(X) = \sum X_i P(X_i) 5.75$$

[يمكن تجنب الرمز $\sum$]

جدول 3

احتمالات الضربات Batting Probabilities

إن معظم الطلبة الذين يتابعون مباريات كرة القاعدة يعتقدون بأنهم يمتلكون فهما واضحا بمعنى "متوسط الضربات Batting Average"، والمعاني التي تتضمنها بالنسبة للضارب الذي يسعى إلى المباراة. من أجل هذا تحدى الصف باحتساب احتمالات حصول لاعب على ضربة واحدة، كحد أدنى، في أربعة مرات عند المنازلة إذا كان متوسط ضرباته على طول الموسم 25. قد يشعر البعض بوجود يقين افتراضي للضربة، نظرا لأن $.250=\frac{1}{4}$

ابدأ التحليل، كالسابق، باستخدام تتابع من الحروف لتأشير أداء الضارب (تدل NHNN على ضربة للمرة الثانية صعودا). مرة ثانية، احسب العدد الكلي للتتابعات المحتملة، والذي يعتقد بأن يكون 16. ويمكن أن ينصح الطلبة الضعفاء بكتابة كل هذه التبادلات.

اختر ابسط حالة NNNN. ومن العمل السابق، فإن احتمالية هذه النتيجة يجب أن تكون جلية للطلبة لوصفها

$$P \text{ (عدم الضرب)} = \frac{3}{4}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{3}{4}=\frac{(3)^4}{(4)^4}=\frac{81}{256}=0.32$$

(استدع $P(H)=\frac{1}{4}$ وأن $P(N)=\frac{3}{4}$).

وبما أن جميع التتابعات الأخرى تتضمن ضربة واحدة، كحد أدنى، فإن احتمالاتهم المركبة هي .68=1-0.32. إذن هناك فقط احتمال 68 بالمائة بأن الضارب سوف يحقق ضربة واحدة في

أربعة مرات على الأقل. بينما لا تعد هذه النتيجة مروعة، ولكنها تستلزم بالتأكيد بعضا من إعادة التشكيل بأسلوب التفكير لدى مجموعة من الطلبة.

بنفس الأسلوب، يمكن حساب الاحتمالات لحالات: الضربة الواحدة (أربعة تتابعات محتملة)، الضربتان (ستة تتابعات محتملة)، وهكذا ... إن الموضوع أعلاه يمثل أمثلة على تجارب ذات الحدين. ومحاولات برنولي Bernouilli.

ناقش مع الصف تعريف محاولة برنولي، ومعيار تجربة ثنائي الحد باستخدام الرسوم التوضيحية مثل إلقاء حجر النرد، وإلقاء قطعة النقود. وهلم جرا. استنبط من الطلبة تقديرهم لمدى أهمية هذه المفاهيم وتطبيقها على أحداث أخرى من الواقع الحياتي كما في اتحادات المشيج في علم الجينات، ونجاح العمليات الطبية مثل الجراحة، وأخيرا نجاح ضارب الكرة في كرة القاعدة. هناك تحديدات ملازمة عندما نحاول معالجة أداء كرة القاعدة مثل محاولات برنولي، وبالخصوص في حالات منفردة مثل سلسلة العالم.

ومع ذلك، ليس ثمة قيمة في جعل الطلبة ينالون إحساسا "بالمرتبة الأولى للتقريب". في نفس الوقت فإن استبصارهم بتطبيقات الرياضيات يمكن تعميقه بمجابهة موضوع يشعرون خلاله بمستوى مقبول من الدراية وانهم مؤهلين لعملية التقييم.

التقييم اللاحق Postassessment

ليقم الطلبة بما يأتي:

1. فك جدول 2 بالنسبة لكل من (سلسلة 5 مباريات) P، P(6)، P(7)، بالنسبة للفرق المعروضة، بالإضافة إلى فرق أخرى من الواقع.
2. اعد إنشاء جدول 3 بالنسبة لفرق من نوع 2:1، 3:1 وبعدئذ احسب E(X) لهذه الحالات.

114 مقدمة إلى التحويلات الهندسية Introduction to Geometric Transformation

مبتدئين بمقدمة إلى التحويلات الثلاثة للحركة الصلبة Rigid، ستسهم هذه الوحدة بعرض كيفية إنشاء مجموعة حيث تكون العناصر تحويلات.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتعريف النقل، والتدوير، والانعكاس.
2. سيميز الطلبة التحويل المناسب من مخطط يعرض تغيير الموقع.
3. سيختبر الطلبة مسلمة الزمرة بالنسبة لمجموعة من التحويلات تحت التركيب.

التقييم السابق Preassessment

يجب أن تعرض هذه الوحدة عندما يكون الطلبة قد أتقنوا مبادئ الهندسة. وينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بمبدأ الزمرة، ولكنهم لن يكونوا بحاجة إلى التعرض مسبقا إلى التحويلات قبل هذه الوحدة. وستكون المعرفة الكافية بالدوال ذات فائدة ملموسة أثناء دراسة هذه الوحدة.

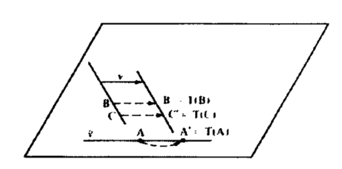
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

سيهتم القسم الأول من هذه الوحدة بعرض مقدمة موجزة للتحويلات الثلاثة الخاصة بالحركة الصلبة والتي تشمل: النقلات، والتدويرات، والانعكاسات.

ينبغي أن يستذكر الطلبة بأن دالة "واحد-إلى-واحد" و "على" هي عبارة عن تطابق. يعني $\overline{AB} \xrightarrow[\text{على}]{1=1} \overline{CD}$ تدل ضمنا على أن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

النقلات Translations

تأمل $T : \alpha \xrightarrow[\text{على}]{1=1} \alpha$، يعني وضع المستوى بكامله على ذاته في اتجاه متجه معلوم 7.



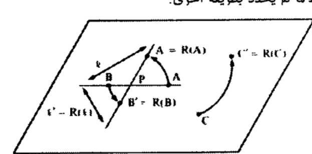
في الشكل أعلاه، تم نقل كل نقطة في المستوى إلى نقطة جديدة في المستوى باتجاه ومسافة متجه النقل v. وفي هذا المقام $T(B) = B'$، حيث تمثل B' صورة B تحت النقل. وضعت النقاط على طول المستقيم ℓ، والذي يوازي v، على نقاط أخرى للمستقيم ℓ.

لضمان فهم جيد لهذا النوع من التحويل اسأل طلبتك الأسئلة الآتية:

1. ما هي الخطوط التي رسمت على ذواتها؟ (تلك الموازية لمتجه النقل).
2. أي النقاط التي رسمت على ذواتها؟ (لا يوجد).
3. أي متجه يحدد مقلوب T؟ (سالب المتجه v).

التدويرات Rotations

تأمل: $R: \alpha \xrightarrow[\text{على}]{1=1} \alpha$:R، يعني وضع المستوى بكامله على ذاته كما حدد بواسطة تدوير أي زاوية حول نقطة. سوف نتفق على أن نأخذ بعين الاعتبار التدويرات عكس عقرب الساعة فقط ما لم يحدد بطريقة أخرى.

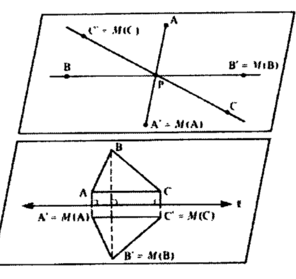


تمثل R في الشكل أعلاه دورانا بمقدار 90° حول P. إن الأسئلة التالية سوف تسهم بمساعدة طلبتك على فهم هذا التحويل.

1. هل هناك ثمة نقاط توضع على ذاتها بواسطة الدوران R؟ (نعم، P).
2. هل هناك أي مستقيم يوضع على ذاته بواسطة الدوران R؟ (لا، ما لم يكون الدوران بمقدار 180°، ويكتب R_{180}، بعدئذ فإن أي مستقيم خلال مركز الدوران (P) سوف يوضع على ذاته).
3. إذا كان ℓ في المستوى، كيف أن ℓ و $\ell' = R_{90}(\ell)$ يتصلان؟ (التعامد).
4. ما هو معكوس R90؟ (إما R_{270} أو R_{630}، ... الخ، أو R_{90}).
5. ما هو معكوس R_{180}؟ (R_{180}).
6. إذا كان R_aR_b يعني دوران b° يتبعه دوران a°، صف R_b^4, R_a^3, R_a^2 (R_{2a}، R_{3b}، R_{4a}).
7. بسط $R_{180} \bullet R_{200}$ ، ($R_{380}=R_{380}-R_{360}=R_{20}$)
8. بسط $R_{270} \bullet R_{90}$ ($R_0=R_{360}$).
9. بسط R_{120}^4 . ($R_{480} = R_{480-360} = R_{120}$).

الانعكاسات Reflections

تأمل $M_\ell : \alpha \xrightarrow[\text{على}]{1=1} \alpha$ ، وضع المستوى بكامله على ذاته كما حدد بواسطة الانعكاس في نقطة أو مستقيم.



لإيجاد انعكاس نقطة A في نقطة معلومة P، قم بتحديد موقع النقطة A' على الشعاع $\overrightarrow{AP}$ (في الجهة المقابلة للنقطة P كما في A) بحيث $A'P=AP$. في الشكل أعلاه، A' هي صورة (أو انعكاس A).

لإيجاد انعكاس نقطة A في مستقيم معلوم ℓ، ثبت موقع النقطة A' على المستقيم العمودي على ℓ ويحتوي على A، بنفس المسافة عن ℓ كما A، ولكن في الجهة المقابلة. في الشكل السفلي، أعلاه، انعكست نقاط المثلث (والمثلث ذاته) في ℓ.

مرة ثانية، هناك بعض الأسئلة لطلبتك:

1. ما هو معكوس M_ℓ؟ (M_ℓ).
2. كيف تختلف الصورة عن صورتها السابقة؟ (اختلاف الاتجاه، أو "صورة مرآة").
3. كيف يغير انعكاس مستقيم في نقطة معلومة اتجاه المستقيم؟

(يغير ترتيب النقاط على المستقيم من الجهة المعلومة إلى الجهة المعاكسة).

4. صف كل مما يأتي:

أ- $M_\ell(m)$ ، حيث $\ell // m$.

(ℓ //m′ على الجهة المقابلة لـ ℓ كما في m).

ب- $M_\ell(n)$ ، حيث $\ell \perp$ n. (n′ هو نفس المستقيم كما في n).

ج- $M_\ell(k)$ ، حيث أن ℓ منحرف نحو k

(تؤلف k′ نفس الزاوية مع ℓ كما تفعل k وفي نفس النقطة مثل k ولكن على الجهة المقابلة لـ ℓ).

الزمر Groups

لغرض مناقشة زمرة من التحويلات فإن من المفيد استعراض تعريف الزمرة ذاتها.

1 مجموعة بعملية واحدة.

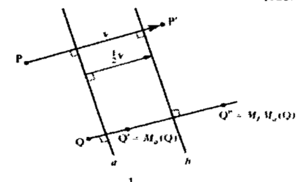
2 خاصية مشاركة ينبغي أن تكون صحيحة.

3 ينبغي وجود عنصر تماثل أو تطابق.

4 كل عنصر يجب أن يمتلك معكوسا له.

إن اخذ العناصر بعين الاعتبار كثلاثة أنواع من التحويلات سوف يحمل معه مزيدا من الارتباك، وعليه ينبغي علينا غرض ما يأتي (I) أي نقل هو نتيجة لانعكاسين، و (II) أي دوران هو نتيجة لانعكاسين. إن هذا الموضوع سوف يمكننا من العمل مع الانعكاسات على وجه الحصر. إن الكلمة "نتيجة" كما قد استخدمت أعلاه تشير إلى "تركيب Composition" التحويلات؛ يعني، إجراء تحويل بعد آخر.

أ- لبيان أن أي نقل T_v يكافئ تركيب انعكاسين، تأمل الشكل أدناه:



عند أي نقطة نهاية لكل متجه $\frac{1}{2}v$ تأمل المستقيمات العمودية على v. بواسطة الانعكاس فإن أي نقطة Q في مستقيم a وبعدئذ في مستقيم b، نحصل على ″Q، والتي هي T_v (Q). يعني، M_a (Q)=Q′ وأن M_bM_a (Q) = Q″= M_bM_a (Q).

ب- لبيان أن أي دوران R_θ يكافئ تركيب انعكاسين، تأمل الشكل أدناه:

ارسم مستقيمين يمران خلال مركز الدوران C، ويؤلفان زاوية بقياس $\frac{1}{2}\theta$. اختر أية نقطة P وقم بعكسها خلال المستقيم a ثم اعكس تلك الصورة خلال المستقيم b.

ولغرض الملائمة، ينبغي علينا استخدام المستقيم a قبل المستقيم b. وباستخدام زوجي المثلثات المتطابقة في الشكل أعلاه، نستطيع بسهولة البرهنة بأن $M_bM_a(P)=P''$ هو بالحقيقة يساوي $R_\theta(P)$.

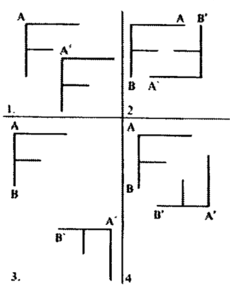
والآن نستطيع استبدال النقلات والتدويرات بتراكيب من الانعكاسات، اسأل طلبتك التحقق من أن زمرة من التحويلات لازالت بمتناول اليد. يجب عليهم عرض جميع الخصائص الأربعة المدرجة أعلاه.

التقييم اللاحق Postassessment

1. عرف النقل، والتدوير، والانعكاس.

2. صف كلا مما يأتي كتحويل منفرد.

3. بين أن الانعكاسات تؤلف زمرة تحت عملية التركيب.





الدائرة والقلب
The Circle and Cardioid

أهداف الأداء Performance Objectives

1 بإعطاء دائرة، سيكون الطلبة قادرين على رسم قلب دون استخدام معادلة.

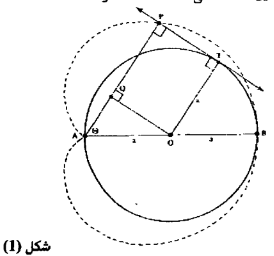
2 سيكون الطلبة قادرين، وبواسطة التجريب، على توليد منحنيات غير القلب.

التقييم السابق Preassessment

قدم الطلبة إلى القلب عن طريق جعلهم يعدون جدولا بقيم المعادلة $r=2a(1+\cos\theta)$. بعدئذ ليقم الطلبة بتحديد موقع النقاط المقابلة على مخطط بإحداثيات قطبية. وبعد أن يتموا العمل على إنشاء هذا المنحنى، والذي عرف بالقلب "Cardioid" (يشبه شكل القلب) بواسطة دي كاستيلون de Castillon في عام 1741. ينبغي أن يجذب الطلبة إلى تأمل بعض الطرق غير التقليدية والخاصة بإنشاء هذا المنحنى.

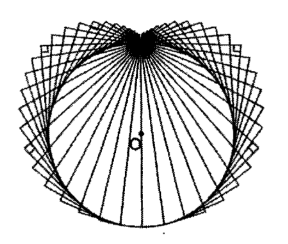
استراتيجيات التعليم Teaching Strategies
طريقة Method I

اسأل الطلبة رسم دائرة قاعدة Base Circle، O، بقطر 3 انجات، تتمركز بصورة متعادلة على ورقة بمقاس ″11 × 8 ″1/2. باستخدام المنقلة قم بتقسيم المحيط إلى 36 نقطة بمسافات تباعد متساوية (انظر شكل 1). خلال أي من هذه النقاط الست وثلاثين، T، أنشئ مماسا، t، للدائرة.



شكل (1)

ولا يحتاج هذا المماس إلى أن ينشأ بالطريقة الكلاسيكية مستخدمين مسطرة عدلة وفرجار، ولكن بواسطة قالب مثلث، أو مسطرة النجار على شكل حرف T، وذلك عن طريق جعل أحد ساقي المثلث تمر خلال مركز الدائرة. إن رسم مماس للدائرة بهذه الطريقة يرتكز إلى حقيقة كون المماس إلى الدائرة يكون عموديا على نصف القطر عند نقطة التماس. ومن نقطة ثابتة، A، على محيط الدائرة (حيث أن النقطة A هي إحدى النقاط الـ 36)، اسقط عموديا ليلاقي t عند النقطة P. والآن أنشئ أعمدة على جميع النقاط (باستثناء النقطة A)، لكل مماس مكررا الخطوة السابقة والخاصة بإسقاط عمود من A إلى t.



شكل (2)

إن الشكل الناتج سيبدو كما يظهر في شكل 2؛ إن المحل الهندسي لجميع تلك النقاط P هو عبارة عن قلب. بعدئذ ستكون النقطة A الطرف المستدق بالقلب. في شكل 2، تم إلغاء بعض مستقيمات الإنشاء في شكل 1 لتحسين الرسم النهائي. كذلك، استخدمت 48 نقطة على طول دائرة القاعدة في شكل 2 للحصول على تأثيرات لمظهر أكثر تماسكا. أخيراً، لاحظ بأن اتجاه القلب في شكل 2 يختلف عن ذاك في شكل 1 بتدوير القلب حول A بمقدار $90°$ باتجاه عقرب الساعة.

البرهان **Proof**

في شكل 1، لتكن A النقطة الثابتة على الدائرة O. لتكن A أيضاً القطب، والقطر $\overline{AB}$ المستقيم الأولي، بنظام الإحداثيات القطبية. ارسم $\overline{OT}$. إذن، $\overline{AP} // \overline{OT}$. من نقطة O اسقط عمودا ليلاقي $\overline{AP}$ عند النقطة Q.

بعدئذ $\overline{OQ} // \overleftrightarrow{TP}$ وأن OTPQ هو مستطيل. لتكن OT=OP=a، r=AP وأن m∠BAP=θ. بعدئذ من شكل 1

r=AQ+QP (1)

في المثلث قائم الزاوية ΔAQO بحيث $\cos\theta = \dfrac{AQ}{a}$

AQ=a • cos θ (2)

مع QP=a واستخدام (2)، و (1) يصبح:

.r= a•cos θ+a أو

r=a(1+cos θ) (3)

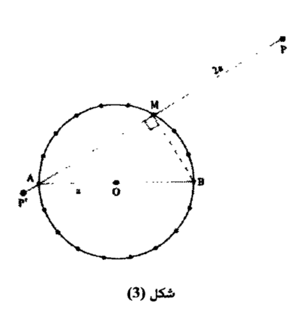
والتي تمثل المعادلة القطبية للقلب.

إن الطريقة الإجرائية التي عرضت أعلاه هي مثال على كيفية تكوين منحنى الدواسة لمنحنى محدد (يعني، يشار إلى القلب على انه دواسة للدائرة O من ناحية A). إن جميع منحنيات الدواسة يمكن الحصول عليها بهذه الطريقة: تم اختيار بعض النقاط الثابتة بصورة اختيارية، وغالبا تكون على المنحنى ذاته، ومن تلك النقطة تسقط أعمدة على المماسات المختلفة لمنحنى مستقل.

إن المحل الهندسي لنقاط تقاطع الأعمدة على كل مماس من نقطة ثابتة يعرف منحنى الدواسة. ولو أن مماس الدائرة يمكن إنشاؤه بسهولة، ومن ثم رسم منحنى الدواسة، فإن إنشاءات الدواسة ذات الطبيعة المرئية لازالت تشكل تحديا ملموسا.

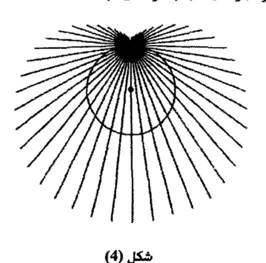
طريقة **Method II**

كما في طريقة I، ارسم دائرة قاعدة بقطر 3 بوصات، باستثناء أن الدائرة يجب وضعها في موقع يبعد 1 بوصة على يسار مركز الدائرة وعلى ورقة بمقاس ″11 × ″$8\frac{1}{2}$ يمسك بها عموديا (انظر شكل 3). قسّم الدائرة إلى 18 نقطة تبعد عن بعضها بمسافات متساوية. ضع على القطر الرمز AB=2a، مع نقطة ثابتة للمرة الثانية. لتكن M إحدى هذه النقاط الـ 18، ولتكن متميزة عن A. ضع حافة مسطرة مؤشرة على النقطة M، شريطة التأكد من مرور المسطرة خلال النقطة A. عين موقع النقطتين P، ′P على



شكل (3)

المستقيم $\overleftrightarrow{AM}$، على جهتي النقطة M، وبمسافة مقدارها 2 وحدة عن النقطة M. إذن النقطة M هي نقطة منتصف $\overline{PP'}$. استمر بالنسبة لجميع هذه النقاط مثل M، حيث أتيح للنقطة M الانتقال إلى كل من النقاط المتبقية (للنقاط الـ 18 التي اخترت أولاً) حول المحيط. إن المحل الهندسي لجميع هذه النقاط P، ′P هو عبارة عن قلب (انظر شكل 4).



شكل (4)

البرهان **Proof**

في الشكل 3، ارسم $\overline{MB}$، ودع AP=r، وكذلك ∠BAM=θ.

بما أن ΔAMB هو مثلث قائم الزاوية،

AM = 2a.cos θ (4)

ولكن،

r = AM+MP (5)

وبواسطة الإنشاء، MP=2a. بتعويض هذا بالإضافة إلى تعويض (4) في (5)، نحصل على:

r = 2a.cos θ+2a أو

r = 2a(1+cos θ) (6)

تؤلف a تناظراً مع (3) باستثناء للثابت 2a. وبالنسبة لـ $\theta+180°$، نحصل على P'، بحيث أن $r=AP'$. وبما أن $\cos(\theta+180°)=-\cos\theta$ سنكون قد حصلنا على:

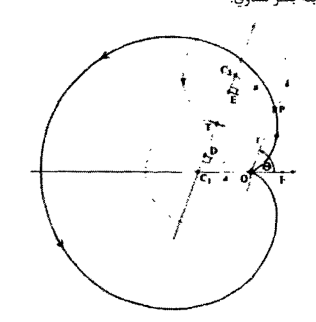
$$r=2a(1-\cos\theta) \qquad (7)$$

فنكون قد كررنا الخطوات أعلاه.

إن إنشاء القلب الذي أوردناه هنا هو مثال على منحنى محارة الأذن Conchoide Curve. وباستخدام هذه التقانة مع قطع ناقص، فإن استخدام النقطة الثابتة قد يكون طرف للمحور الرئيسي أو الثانوي. وبتغيير طول المستقيم على كل جهة من جهتي M لكي تساوي المحور الرئيسي، أو الثانوي سينشأ عنه عدة تركيبات مثيرة للاهتمام من منحنيات محارة الأذن للقطع الناقص.

طريقة Method III

يمكن أن نولد القلب أيضاً كمحل هندسي لنقطة P، على محيط دائرة متدحرجة، والتي تتدحرج دون أن تنزلق على دائرة ثابتة بقطر مساوي.



شكل (5)

البرهان Proof

لتكن الدائرة الثابتة C_1، بنصف قطر a متمركزة على قطر نظام إحداثيات قطبية. دع النقطة O تكون نقطة تقاطع الدائرة C_1 مع المستقيم الأولي. الدائرة C_2، والتي كان موضعها الأولي مماسا للدائرة C_1 عند النقطة O، قد تم دحرجتها الآن إلى الموقع المعروض في شكل 5، حاملة معها نقطة ثابتة P. المطلوب هو المحل الهندسي لـ P.

الدائرة C_2 هي الآن مماسة للدائرة C_1 عند النقطة T. إن الخط الذي يصل النقطتين C_1 و C_2 سوف يمر خلال T. بما أن $\overset{\frown}{PT} \cong \overset{\frown}{OT}$، $m\angle OC_1T=m\angle PC_2T$. فإذا رسم $C_2P=a$، بالإضافة إلى $\overline{OP}$، سنحصل على شبه المنحرف متساوي الساقين OC_1C_2P، وأن $m\angle POF=\theta$.

اسقط أعمدة من O و P إلى $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ بحيث تلتقي معه عند النقطتين D و E، على التوالي. على الفور سيكون: $\Delta ODC_1 \cong \Delta PEC_2$، والتي سينتج عنها $C_1D=EC_2$ $DE=OP$. في المثلثين ODC_1 و PEC_2.

$$C_1D=a.\cos\theta \qquad (8)$$

وأن،

$$C_2E=a.\cos\theta \qquad (9)$$

والآن،

$$C_1C_2=2a=C_1D+DE+C_2E \qquad (10)$$

بتعويض (8) و (9) في (10) وبتذكر أن $DE=OP=r$،

$$2a=a.\cos\theta+r+a.\cos\theta \qquad (11)$$

والذي سينتج عنها بعد التبسيط،

$$r=2a(1-\cos\theta) \qquad (12)$$

وهذه المعادلة تناظر المعادلة (7).

إن مفهوم دحرجة الدائرة بصورة سلسة على محيط دائرة أخرى، ثابتة، قد تمت دراستها بصورة جيدة. وأن المحل الهندسي لنقطة على محيط الدائرة المتدحرجة سيؤدي إلى ظهور منحنى يطلق عليه المسار الدويري الفوقي Epicycloid، والذي يعد القلب حالة خاصة من حالاته. أن تغيير نسبة الدائرة الثابتة سينتج عنه مجموعة معروفة من منحنيات المستوى الأعلى.

التقييم اللاحق Postassessment

ارجع إلى الطريقة I لرسم التغييرين الآتيين، وبعمل ذلك، حاول الحصول على معادلة تشابه (3):

(أ) اختر النقطة الثابتة A "خارج" الدائرة بحيث تبعد بمسافة 2a وحدة من O؛

(ب) اختر النقطة الثابتة A "داخل" الدائرة بحيث تبعد بمسافة $\frac{2}{a}$ وحدة عن O.



تطبيقات العدد المركب (العقدي)
Complex-Number Applications

إن نظام الأعداد الذي نستخدمه بالوقت الحالي قد استغرق زمنا طويلا لكي يتطور فيصبح كما هو الآن بين أيدينا. وبالنسبة للإنسان في العصور المبكرة، كانت أرقام العد كافية لتلبية احتياجاته. فالكسور البسيطة مثل وحدات الكسور قد وظفها الفراعنة في معاملاتهم. بينما لم يدرك اليونان الأوائل الأعداد غير النسبية، وأن العوز إليها بالمسائل الهندسية كان سبباً للقبول بها والموافقة عليها.

والأرقام السالبة استخدمت كذلك عندما أضحت استخداماتها الفيزيائية ضرورة ملحة، مثل استخداماتها في وصف درجة الحرارة. ولكن الأعداد المركبة قد بوشر بدراستها لعدم اكتمال نظام الأعداد الحقيقية بمنظور جبري دونها. أن تطبيقاتهم في العالم الفيزيائي لم تستكشف كثير من جوانبه بواسطة معظم طلبة الرياضيات. من أجل هذا ستعمل هذه الوحدة على تقديم ابسط التطبيقات الفيزيائية للأعداد المركبة.

أهداف الأداء Performance Objectives

سيكون الطلبة قادرين على حل بعض المسائل الفيزيائية، والتي تتضمن أعداداً مركبة وكميات متجهة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بعمليات الأعداد المركبة وتحليل المتجه. وينصح كذلك بمعرفة جيدة بمبادئ الفيزياء.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

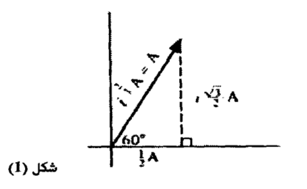
يعرف المستوى المركب، في الجبر، على أنه عبارة عن محوري إحداثيات مستطيلة والتي ترسم فيها الأجزاء الحقيقية للأعداد المركبة على طول المحور الأفقي، بينما ترسم الأجزاء الخيالية على طول المحور العمودي. يمكن أن يطور هذا المستوى المركب إذا تبنينا أسلوبا بحيث تعامل i كـ "علامة على التعامد". وبوصفها إجراء يعمل على تدوير متجه خلال زاوية مقدارها 90°. ولتطوير هذه الفكرة، نبتدئ بأي كمية متجهة، A، والتي مثلت بواسطة متجه → والذي يؤشر طوله إلى مقداره، بينما تشير قمة السهم إلى اتجاهه. (للتمييز بين المتجه والكميات غير المتجهة، تكمن في وضع خط فوق الرمز للإشارة إلى الكمية المتجهة، $\overline{A}$، بينما يؤشر الرمز بلا خط إلى كمية غير متجهة، A). والآن، إذا أجريت $\overline{A}$ بواسطة 1− (ضربت بواسطة 1−). سيكون لدينا $-\mathrm{A}$ الذي سيكون تمثيله الرسومي ←. إذن، الإجراء على المتجه $\overline{A}$ بواسطة 1− سيقوم بتدويره بمقدار 180° بالاتجاه الموجب. والآن، بما أن $i^2=-1$، فإن i يجب أن تمثل دوران المتجه خلال زاوية مقدارها 90°، نظرا لأن إجرائين بـ 90° سوف ينشب عنهما دوران بمقدار 180°. وعليه، فإن الإجراء على متجه بواسطة i^3 سيدير المتجه خلال 270°، وهكذا .... بنفس الطريقة، نستطيع أن نأخذ بعين الاعتبار استخدام إجراء مثل الجذور العليا للكمية (1−)، والتي ستدير المتجه بزاوية أصغر.

لذا فإن $\sqrt[3]{-1}=(i^2)^{1/3}=i^{2/3}$ سوف يدير المتجه بزاوية مقدارها 60° نظرا لأن ثلاثة تطبيقات لهذا الإجراء تكافئ الإجراء بواسطة 1−. نستطيع أن نعرض هذا في مخطط متجه. لدينا متجه $\overline{A}$، مقداره A، ونقوم بإجراء عليه مقداره $i^{2/3}$، يعني تدير المتجه بمقدار 60°.

إن هذا الأمر، بالطبع، لن يغير مقداره، A. وعليه فإن المركبة الحقيقية هي:

$$\mathrm{A}\cos 60=\frac{1}{2}\mathrm{A}$$

وأن المركبة الخيالية هي: $A\sin 60°=\sqrt{\frac{3}{2}}A$



شكل (1)

وعليه فإن:

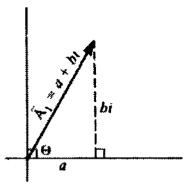
$$\sqrt[3]{-1}\,\overline{A} = i^{2/3}\overline{A} = A\,Cos\,60° + i\,Sin\,60°$$

والذي يشير إلى موقع المتجه. بهذه الطريقة

$$\sqrt[n]{-1}\,\overline{A} = i^{2/n}\overline{A} = A\cos\frac{\pi}{n} + i\,A\sin\frac{\pi}{n}.$$

لكي نعمم الحالة، لتدوير متجه A خلال زاوية θ نستخدم الإجراء $\cos\theta + i\sin\theta$.

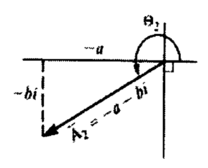
والآن. إذا كان لدينا متجه $\overline{A_1} = a + b_i$، نستطيع رسمه على المستوى المركب، ويكون موقع المتجه محددا بواسطة $\theta_1 = arc\tan\frac{b}{a}$، ومقداره $A_1 = \sqrt{a^2+b^2}$.



شكل (2)

ويظهر المتجه $\overline{A_1}$ في شكل 2. بنفس الطريقة، المتجه $\overline{A_2} = -a - b_i$ ومقداره $A_2 = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}$، مساويا لقيمة المتجه $\overline{A_1}$. ويتحدد موقعه بواسطة $\theta_2 = arc\tan\frac{-b}{-a}$ ويقع في الربع الثالث كما يظهر في شكل 3.

والآن. نستطيع استكشاف التفسير الفيزيائي لهذه الإجراءات. ففي كتب الفيزياء تمثل $\sqrt{-1}$ بواسطة الحرف j، والتيار الكهربائي بالحرف I.



شكل (3)

بما أن هذه الوحدة قد أعدت خصيصا لطلبة الرياضيات، فسوف تستخدم i لكي تمثل $\sqrt{-1}$، ومن اجل الوضوح سوف نستخدم الحرف J لوصف التيار الكهربائي.

في دراسة التيار المتناوب Alternating Current، يكون لدينا متجه التيار $\overline{J} = j_1 + ij_2$. ويمكن تمثيل الجهد لهذا التردد بواسطة $E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 i$. إن معاوقة الدائرة Impedance (المقاومة الفعالة للتيار)، ليست متجها، ويمكن تمثيلها بواسطة $Z = r \pm ix$، حيث r هي المقاومة الاومية Ohmic Resistance وأن x هي المفاعلة Reactance. إن الزاوية بين $\overline{E}$ و $\overline{J}$ هي زاوية الطور Phase Angle (الزاوية التي يتأخر بها التيار وراء القوة الكهرومغناطيسية Electromagnetic force, emf).

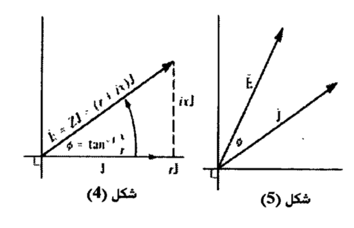
وتمثل بواسطة الصيغة $\phi = arc\tan\frac{r}{x}$.

نستطيع الحصول رياضيا على ناتج معاوقتين اثنتين إلا انه ليس لها ثمة معنى فيزيائي. وأن حاصل ضرب الجهد والتيار، ورغم عدم وجود معنى فيزيائي له يشار إليه بالقدرة الظاهرية Apparent Power. ولكن، إذا أخذنا حاصل ضرب التيار والمعاوقة:

$$Z\overline{J} = (r+ix)(j_1+ij_2) = (rj_1+xj_2) + i(rj_2+xj_1)$$

سيكون لدينا الجهد لنفس تردد التيار، الجهد الحقيقي Actual Voltage، يعني $Z\overline{J} = \overline{E}$. وهذا هو قانون اوم Ohm's Law في صيغته المركبة (حاول استدعاء أن قانون اوم ينص على انه بالنسبة للتيارات المستمرة Direct Currents فإن الجهد يساوي حاصل ضرب المقاومة مع التيار). وعليه، في التيار المستمر يتعامل المرء مع كميات غير متجهة Scalar Value بينما في دوائر التيار المتناوب تكون الكميات عبارة عن متجهات توصف كأعداد مركبة، وينطبق عليها قوانين جبر المتجهات. وفي الأشكال التخطيطية الآتية لقانون اوم، يحتوي المخطط (4) على $\overline{J}$ على المحور الحقيقي، أما المخطط (5) فلا يحتوي ذلك.

والآن دعنا نحاول العمل على بضعة مسائل.



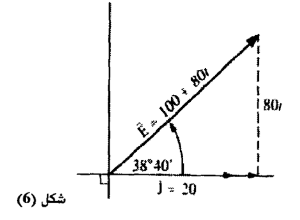
شكل (4)

شكل (5)

مثال Example1

دع r =5 اوم، x =4 اوم، وأن التيار J يساوي 20 أمبيرا. خذ J على المحور الحقيقي.

بإعطائنا هذه المعلومات، سيكون لدينا المعاوقة Z=5+4i. إن الدائرة المحثة Inductive هي $\bar{E} = \bar{J}Z = 20(5+4i)$. $= 100+80i$ وعليه فإن: $E = \sqrt{100^2 + 80^2} = 128$ فولت. إن الزاوية التي تصنعها $\bar{E}$ مع المحور الحقيقي هي $\theta = arc\tan\frac{80}{100} = 38°40'$، وهو نفس الشيء الذي سيحصل مع زاوية الطور لهذه المسألة. إن مخطط المتجه قد عرض في شكل 6.



شكل (6)

مثال Example 2

دعنا نقوم بتعديل المثال السابق قليلا وذلك بجعل الزاوية التي يصنعها متجه التيار $\bar{J}$ مع المحور الحقيقي 30°، وسوف ندع بقية البيانات كما هي في المثال السابق.

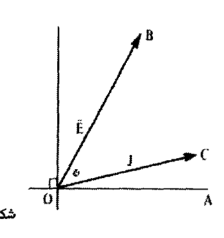
سيبقى لدينا Z=5+4i، وسيكون لدينا الآن

$$\bar{J} = 20(Cos\,30° + i\,Sin\,30°) = 20(.866 + .5i) = 1732 + 10i$$

$$\bar{E} = \bar{J}Z = (17.32+10i).(5+4i) = 46.6+119.28i$$ ،

$E = \sqrt{(46.6)^2 + (119.28)^2} = 128$ فولت، كما في المثال السابق فإن الزاوية التي تصنعها E مع المحور الحقيقي هي $\theta = arc\tan\frac{119.28}{46.6} = 68°40'$. وستبقى زاوية الطور ϕ كما هي، $\theta = arc\tan\frac{4}{5} = 38°40'$.

إن مخطط المتجه لهذه المسألة سيكون:



شكل (7)

ينبغي أن يكون الطلبة الآن قادرين على حل مسائل فيزيائية مشابهة تتضمن أعداداً مركبة.

التقييم اللاحق Postassessment

1. لتكن r =3 أوم، x =4 أوم. خذ $\bar{J}$ على المحور الحقيقي، J=3 . جد المعاوقة Z، الصيغة المعقدة لـ $\bar{E}$ ومقدار E. ما هي θ، الزاوية التي تصنعها $\bar{E}$ مع المحور الحقيقي؟ ما هي θ، زاوية الطور؟ ارسم مخطط المتجه لهذه المسألة.
2. استخدم البيانات الواردة في المسألة السابقة، ودع $\bar{J}$ تصنع زاوية مقدارها 20° مع المحور الحقيقي. اعد حساب جميع الكميات، لكل من الصيغ المركبة والمقادير، ثم ارسم مخطط المتجه.
3. لتكن $\bar{J} = 2+3i$ وأن $\bar{E} = 4+14i$. جد الصيغة المركبة لـ Z ومقدارها. ما هي زاوية الطور؟ ارسم مخطط المتجه.

مرجع Reference

Suydam, Vernon, A., Electricity and Electromagnetism, New York: D Van Norstrand Company, 1940.



الحساب الهندي

Hindu Arithmetic

يمكن إثراء المنهج الدراسي لمادة الرياضيات، بالنسبة للطلبة بمستويات عدة، عن طريق دراسة نظام أعداد وحسابه. إن إجراء تحري في ميكانيكية النظام، ودوره في نظامنا الخاص، ونقاط التماس الأخرى المناسبة والتي يمكن للطلبة الولوج فيها عند المستويات الثانوية. وبالنسبة لطلبة أخرى، ستسهم هذه العملية بوصفها تمرينا على المهارات الأساسية بالأعداد الصحيحة، لأن الطلبة سوف يتفحصون الإجابات التي توصلوا إليها عند العمل على المسائل. من أجل هذا تقدم هذه الوحدة الطلبة إلى رموز النظام العددي الهندي ونظم الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة السائدة فيه (Circa 900, India).

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء مسألة جمع، سيقوم الطلبة بإيجاد الإجابة باستخدام الطريقة الهندية.
2. بإعطاء مسألة طرح، سيقوم الطلبة بإيجاد الإجابة باستخدام الطريقة الهندية.
3. بإعطاء مسألة ضرب. سيقوم الطلبة بإيجاد الإجابة باستخدام الطريقة الهندسية.
4. بإعطاء مسألة قسمة، سيقوم الطلبة بإيجاد الإجابة باستخدام الطريقة الهندية.

التقييم السابق Preassessment

يحتاج الطلبة، فقط، إلى معرفة كافية بالعمليات الأساسية للأعداد الصحيحة، يعني، الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن رموز الأعداد التسعة التي تستخدم بالحساب الهندي Hindu Reckoning وفق الترتيب التصاعدي هي:

[illegible]

إن هذا النظام يتضمن رمزا للصفر، 0، وهو نظام وصفي الرموز Positional System، كما هو الحال بنظامنا الحالي، عندما نقارنه بنظام الزمر كالذي استخدمه المصريون القدماء. وعليه، سيمثل العدد 5639 بالنظام الهندي بطريقة مشابهة لنظامنا الحالي.

عند هذه النقطة تستطيع مناقشة أهمية رمز الصفر في النظام الهندي. إن المقارنة التي سنقيمها للنظام الهندي مع نظام العددي المصري سوف يكون مصدرا مثقفا (انظر وحدة 14 حول حساب المصريين القدماء). ويمكن التحري عن الأهمية التاريخية للصفر، لأن الأعداد بدون صفر كانت تورث الإرباك، وأن الحسابات المعقدة كانت بالغة الصعوبة. وفي النظام الهندي فإن الاحتفاظ بالسجلات والحسابات الأخرى التي تعد ضرورية للاقتصاد، والحسابات الفلكية، والجداول الرياضية قد تم وضعها بالمقدمة، لانه مع وجود أعداد بمواقع محددة تكون عملية كتابتها وقراءتها أكثر سهولة، ويمكن معالجتها ببراعة وسهولة. كتبت الحسابات الهندية، بصورة عامة، على سطوح حيث يمكن إجراء التعديلات والإلغاءات بسهولة. وبالنسبة لأهدافنا، بدلا من إلغاء الأعداد سوف نقوم بشطبها بحيث أن الطرق التي نوقشت ستسهل عملية متابعتها.

إن الجمع الهندي أقيم بصورة عمودية كما في الطريقة الشائعة لدينا الآن، ويجري من اليسار إلى اليمين. تأمل المسألة: 886+6537. يبدأ الجمع على اليسار مع 8 التي أضيفت إلى 5. إن 1 العدد 13 أضيف إلى العدد على اليسار، 6، فغيره إلى 7، وأن 5 تحولت الآن إلى 3. وتستمر العملية، من اليسار إلى اليمين. إذن، الحل سيبدو مثل الآتي:

```
  7 4 2
  7 3̸ 1̸ 3
  6̸ 5̸ 3̸ 7̸   (النتيجة هي 7423)
    8 8 6
```

وتجري عملية الطرح، أيضاً، من اليسار إلى اليمين، حيث يوضع العدد الأكبر فوق الأصغر. لطرح 886 من 6537، سوف

نبدأ بطرح 8 من 5. ونظرا لاستحالة هذا الأمر، سوف نقوم بطرح 8 من 65، تاركين 57. نضع 5 في موضع 6، و 7، في موضع 5. ونستمر بهذه العملية بطرح 8 من 3 مستخدمين الطريقة التي تم وضعها. وسيبدو حل المسألة التامة كما يأتي:

6
5 7 5 1
6̸ 5̸ 3̸ 7̸ (النتيجة هي 5651)
8 8 6

لكي نقوم بالضرب كما فعل الهندوس، نبدأ بوضع أرقام الوحدات للضارب تحت اكبر موضع لموقع المضروب Multiplicand. فلضرب 537 بـ 24 نبدأ بهذه الطريقة:

5 3 7
2 4

سنضرب 2 بـ 5 ونضع الناتج 0 فوق 2، والـ 1 على اليسار. والآن نضرب 4 بـ 5، ونضع الناتج 0 في موضع 5 وفوق 4، ونضيف 2 إلى 0، والآن لدينا 2 في الموضع التالي:

2 0
1 0̸ 5̸ 3 7
2 4

والآن وقد انتهينا من 5، سنقوم بنقل الضارب مرتبة واحدة إلى اليمين، فأصبحت 4 الآن أسفل 3، موضحة أن 3 هو العدد الذي نهتم به الآن.

2 0
1 0̸ 5̸ 3 7
2 4

نبدأ بالضرب، كالسابق. أولاً 2 بـ 3، بعدئذ 4، وعندما تنتهي ننتقل ثانية إلى اليمين. وعندما نكون قد أنجزنا المسألة بكاملها سوف تبدو مثل هذا النسق:

8
7̸ 8
6 6
2 0̸ 2̸ 8 (الجواب هو 12,888)
1 0̸ 5̸ 3̸ 7̸
2̸ 4̸
2 4̸
2 4

يمكن ملاحظة بأن الشطب، بدلا من الإلغاء، يتطلب فراغا. ولما كانت عملية القسمة تعد الأكثر تعقيدا بين العمليات الأساسية، سيتم حل المسألة خطوة فخطوة، بدلا من الشطب، وبتعويض النتائج الجديدة بالنسبة للأعداد القديمة.

لكي نقسم، نضع المقسوم عليه Divisor تحت المقسوم، راصفين إياهم على اليسار. إذن، بدأنا المسألة 5832÷253 كما

5832
253 . ولما كانت 253 أسفل 583، سوف نبحث عن عدد لنضرب 253 به بحيث أن حاصل الضرب يكون مقاربا إلى 583 قدر الإمكان، ودون أن يزيد عليه. إن الرقم الذي نفتش عنه في هذا المقام هو 2، وعليه سيتم وضعه:

2
5 8 3 2
2 5 3

والآن سنقوم بضرب 253 بـ 2 (كما فعل الهندوس) ونطرح النتيجة من 583 (كما فعل الهندوس أيضاً). إن هذا سيعطينا 77، والذي سنضعه في موضع 583. والآن سيكون لدينا:

2
7 7 2
2 5 3

سيتم نقل المقسوم عليه إلى اليمين لنحصل على:

2
7 7 2
2 5 3

تستمر العملية كما فعلنا أعلاه، لحين وصولنا إلى النتائج.

23
13
253

والتي تعرض بأن خارج القسمة سيكون 23 وأن المتبقي 13.

ابحث هذه العمليات مع طلبتك إلى الحد الذي تراه ضروريا ومناسبا. سوف تجد بوضوح وجود شبه كبير لهذه الخوارزميات مع تلك التي نستخدمها بوقتنا الراهن.

التقييم اللاحق Postassessment

1. ليقم الطلبة بكتابة الأعداد الآتية باستخدام نظام العدد الهندي:

(أ) 5342 (ب) 230796

2. ليقم الطلبة بحل المسائل الآتية باستخدام الطرق الهندية.

(أ) 3567+984. (ب) 8734−6849

(ج) 596x37. (د) 65478÷283

مراجع مقترحة Suggested References

Waerden, B. L., Van der, Science Awakening, New York: John Wiley & Sons, 1963.

Eves, Howard, An Introduction to The History of Mathematics, 4th. ed., New York: Holt, Rinehart and Winston, 1976.

118 برهنة أن الأعداد غير نسبية
Proving Numbers Irrational

عندما تعرض الأعداد غير النسبية على طلبة المدارس الثانوية. يطلب منهم عادة قبول حقيقة أن بعض هذه الأعداد مثل $\sqrt{2}$ ، $\sin 10°$ ، وما يشابهها لا تعد غير نسبية. ولكن كثيرا من الطلبة يتساءلون عن كيفية البرهنة على كون عدد ما ليس نسبيا. تعرض هذه الوحدة طريقة للبرهنة على اللانسبية التي يمتاز بها بعض الأعداد الجبرية.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بإعطاء بعض الأعداد الجبرية المعلومة سيكون الطلبة قادرين على برهنة لانسبيتها.
2. سيجد الطلبة بعض الأنماط المحددة والتي سوف تحدد مقدما فيما إذا كان عدد جبري ما غير نسبي.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بمبادئ الأعداد غير النسبية. والأعداد الجبرية. كذلك يجب أن تتوفر لديهم خلفية عامة بالمعادلات الجبرية، والجذور، والمثلثات، واللوغاريتمات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ الدرس بسؤال الطلبة إعطاء أمثلة عن أعداد غير نسبية. واسألهم عن كيفية تأكدهم من أن هذه الأعداد غير نسبية. بعدئذ دعهم يعرّفون الأعداد غير النسبية. سيكون الطلبة جادين بصورة كافية عند هذه النقطة للرغبة في سبر النظرية الآتية:

نظرية Theorem

تأمل أي معادلة متعددة الحدود وبمعاملات أعداد صحيحة $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$. إذا احتوت هذه المعادلة على جذر كسري p/q، حيث يعد p/q أصغر حد فيها، بعدئذ ستكون p قاسم a_0 و q قاسم a_n.

البرهان Proof

لتكن p/q جذرا للمعادلة المعلومة، بعدئذ ستحقق المعادلة ويكون لدينا:

$$a_n(p/q)^n+a_{n-1}(p/q)^{n-1}+\ldots+a_1(p/q)+a_0=0 \quad \ldots\ldots(I)$$

والآن سنقوم بضرب (I) بواسطة q^n للحصول على

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\ldots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كالآتي:

$$a_np^n=-a_{n-1}p^{n-1}q-\ldots-a_1pq^{n-1}-a_0q^n$$

أو

$$a_np^n=q(-a_{n-1}p^{n-1}q-\ldots-a_1pq^{n-2}-a_0q^{n-1})$$

ان هذا الأمر يعرض بأن q هي قاسم a_nP^n. ولكن إذا كانت p/q في حدودها الدنيا، بعدئذ سيكون كل من p و q أعداداً أولية نسبيا، وعليه ستكون q قاسما لـ a_n. وبنفس الأسلوب، إذا عاودنا كتابة معادلة (I) كالآتي:

$$a_0q^n=p(-a_1q^{n-1}\ldots-a_{n-1}p^{n-2}q-a_np^{n-1})$$

سنلاحظ بأن p هي قاسم a_0q^n. مرة ثانية، لأن كل من p و q أعداد أولية نسبيا، وسيكون لدينا بأن p هي قاسم a_0. وهنا سيتم برهان هذه النظرية.

مثال Example 1

برهن بأن أن $\sqrt{5}$ غير نسبية.

إن $\sqrt{5}$ هي جذر للمعادلة $x^2-5=0$. بعدئذ وبناء على الرموز المستخدمة في النظرية، $a_2=1$، $a_0=-5$. والآن، فإن أي جذر غير نسبي، p/q، بهذه المعادلة سيكون بحيث أن P ينبغي أن تقسم -5، وأن q سوف تقسم 1. ويعود هذا إلى ما ورد في النظرية السابقة.

ولكن القاسم الوحيد للعدد 1 هو $+1$ و -1. إذن يجب أن تكون q إما $+1$ أو -1، وينبغي أن يكون الجذر النسبي للمعادلة عددا صحيحا. إن هذا العدد الصحيح، p، في ضوء ما ورد بالنظرية يجب أن يقسم -5، والقواسم الوحيدة لـ -5 هي: -1، 1، 5، -5. ولكن أياً من هذه الأعداد لا يعد جذرا من جذور المعادلة $x^2-5=0$، يعني أن:

$(1)^2-5=0$، $(-1)^2-5=0$، $(5)^2-5=0$، $(-5)^2-5=0$، باطلة جميعاً False. إذن، $x^2-5=0$ لا تمتلك جذرا نسبيا، وأن $\sqrt{5}$ عدد غير نسبي.

مثال Example 2:

برهن أن $\sqrt[3]{2}$ غير نسبي.

$\sqrt[3]{2}$ هو جذر للمعادلة $x^3-2=0$. بعدئذ p يجب أن تقسم -2، و q يجب أن تقسم 1. إذن، إذا كانت هذه المعادلة تمتلك جذرا نسبياً، فإن هذا الجذر ينبغي أن يكون عددا صحيحا وقاسما لـ -2.

والآن فإن القواسم الوحيدة لـ -2 هي: 2، -2، 1، -1. ولكن أياً من هذه الأعداد لا يعد جذرا من جذور المعادلة $x^3-2 = 0$، لأن $(2)^2-2 = 0$، $(-2)^2-2 = 0$، $(1)^2-2 = 0$، $(-1)^2-2 = 0$ جميعها باطلة. إذن $\sqrt[3]{2}$ غير نسبي.

مثال Example 3

برهن أن $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ غير نسبي.

إذا كتبنا $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$، سيكون لدينا $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$. والآن اعمد إلى تربيع طرفي المعادلة واحصل على $x^2-1=2x\sqrt{2}$. بالتربيع ثانية سنحصل على $x^4-2x^2+1=8x^2$ أو $x^4-10x^2+1=0$.

إن هذه المعادلة قد أعيدت صياغتها بحيث أن $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ سيكون جذرا. ولكن الجذور النسبية الوحيدة لهذه المعادلة هي الأعداد الصحيحة التي تعد قواسما لـ 1، وهي -1، 1. ولكن أياً من هذين العددين لا يعد جذرا للمعادلة، لأن

$(1)^4 - 10(1)^2 + 1 = 0$ وكذلك $(-1)^4 - 10(-1)^2 + 1 = 0$

باطلتان قطعا. إذن لا تحوي هذه المعادلة على جذر كسري، وتبعا لذلك فإن $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ غير نسبيين.

مثال Example 4

برهن أن $\sin 10°$ غير نسبي.

لدينا المطابقة $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$. والآن إذا استبدلنا θ بـ $10°$ وانتبهنا إلى أن $\sin 30°=\frac{1}{2}$ سنحصل على:

$$\frac{1}{2}=3\sin 10°-4\sin^3 10°$$

والآن إذا جعلنا $x=10°$، نحصل على $\frac{1}{2}=3x-4x^3$ أو $8x^3 - 6x + 1 = 0$

وبناء على ما ورد في النظرية، p يجب أن تكون قاسما لـ 1 وأن q يجب أن تكون قاسما لـ 8، وعليه فإن الجذور النسبية الوحيدة هي $\pm\frac{1}{8}$، $\pm\frac{1}{4}$، $\pm\frac{1}{2}$، و ±1. ولكن أياً من هذه الاحتمالات الثمانية لا تعد جذرا للمعادلة، كما يمكن ملاحظته عند تعويض قيمها في المعادلة التي تم الحصول عليها. وعليه فإن هذه المعادلة لا تحوي على جذور نسبية، وبما أن $\sin 10°$ هو جذر للمعادلة، فيجب أن يكون غير نسبي.

والآن يجب أن يكون الطلبة قادرين على برهنة لا نسبية الأعداد التي غالبا ما يكثر مرورها في الكتب المنهجية بالمدارس الثانوية، والتي يظن الطلبة بأنها غير نسبية. إن من الضروري جعل الطلبة يفهمون سبب كون مفهوم رياضي ما صحيحا بعد أن يكونوا قد أتموا العمل عليه بصورة مريحة.

وغالبا ما يتقبل الطلبة لا نسبية العدد دون مزيد من المساءلة والاستفهام. لقد وفرت هذه الوحدة طريقة يجب أن توفر فهما صادقا للطلبة المتوسطين بمادة رياضيات المدارس الثانوية.

إضافة إلى المسألة التي طرحت في التقييم السابق، يجب تشجيع الطلبة على استخدام التقانة التي عرضت في هذه الوحدة عندما تبرز حاجة لاستخدامها.

التقييم اللاحق Postassessment

إن الطلبة الذين أتقنوا التقانة التي عرضت خلال الأمثلة السابقة، يجب أن يكونوا قادرين على إكمال الأمثلة الآتية:

1. برهن أن $\sqrt{2}$ غير نسبي.
2. برهن أن $\sqrt[3]{6}$ غير نسبي.
3. برهن أن $\sqrt{11}+\sqrt[3]{3}$ غير نسبي.
4. برهن أن $\cos 20°$ غير نسبي.
5. برهن أن العدد بصيغة $\sqrt[n]{m}$، حيث n و m أعداد طبيعية، إما أن يكون غير نسبي أو عدد صحيح.

119 كيفية استخدام الصحائف الممتدة بالحاسوب في توليد حلول لمسائل رياضية محددة

How to Use a Computer Spreadsheet to Generate Solutions to Certain Mathematics Problems

تنهي هذه الوحدة بعض الأمثلة البسيطة على كيفية استخدام الصحائف الممتدة مثل مايكروسوفت اكسل Microsoft Excel، وكلاريس ورك Claris Work، أو لوتس Lotus، في توليد حلول لمسائل رياضية محددة. ينبغي توفر حاسوب مع برنامج صحائف ممتدة – مناسب، وأن يكون الطلبة على معرفة كافية بعملياته.

إن طلبة المدارس الثانوية وبجميع مراحلها سوف يجدون في هذا الأمر نوعاً من التحدي والمتعة أيضاً.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بتوليد تتابع فايبوناشي على صحيفة ممتدة.
2. سيصنع الطلبة مثلث باسكال على صحيفة ممتدة.
3. سيعد الطلبة قائمة بمسائل رياضية أخرى يناسب حلها على الصحائف الممتدة.

التقييم السابق Preassessment

يحتاج الطلبة إلى مراجعة الوحدة الإثرائية 85 (تتابع فايبوناشي) و (هرم باسكال – القسم الأول بالخصوص، والذي يناقش مثلث باسكال). كذلك ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالعمليات الأساسية على الحاسوب المايكروي Microcomputer والصحائف الممتدة الإلكترونية.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

إن الصحيفة الإلكترونية الممتدة هي عبارة عن مصفوفة Array يظهر على شاشة الحاسوب المايكروي. وتحتوي غالب الصحائف الممتدة على دوال رياضيات مبنية Built-in بحيث يمكن إدخال أي عنصر في الصف i^{th} والعمود j^{th} لأي قيمة لكل من i و j بسهولة. فعلى سبيل المثال، اعرض للطلبة كيفية استخدام الدوال التي تساعد على حساب اكبر قيمة Maximum Value، والقيمة المتوسطة Average Value، والوسيط Median، والمنوال Mode، والانحراف المعياري Standard Deviation، ... الخ، لمجموعة من الأعداد المدرجة في صحيفة ممتدة.

ووضح بأنه يمكن العثور على الكثير من التطبيقات الرياضية للصحائف الممتدة، بالإضافة إلى تلك التي تم بناؤها في البرنامج.

إن إحدى التطبيقات الممتعة هي توليد تتابع فايبوناشي بالإضافة إلى تتابع لنسب من أزواج الأعداد المتوالية. امنح اهتماماً خاصاً للصيغة المستخدمة في توليد تتابع فايبوناشي كما أدرجت في الوحدة الإثرائية 85:

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

إن إحدى الطرق التي يتم بها ترجمة هذه الصيغة إلى "لغة الصحائف الممتدة" هي، "بالنسبة لصف معلوم، فإن العدد في العمود النوني n^{th} Column يساوي مجموع الأعداد في العمودين السابقين".

بمشاركة الطلبة، استخدام "مرجعية نسبية Relative Referencing" لإعداد صيغة بحيث أن محتوى خلية معلومة ينبغي أن يساوي مجموع مدخلات العمودين اللذين يقعان على يسارها في نفس الصف. إذن، إذا ادخل العددان الأوليان 1، 1 في الخليتين A_1 , B_1، بعدئذ ستحتوي الخلية C_1 على الصيغة:

$$= \text{SUM}(A_1, B_1)$$

أو

$$= A_1 + B_1$$

إن هذه التقانة، وبالتواصل مع خصائص الصحائف الممتدة لنسخ وتحديث صيغة ما (انظر Fillhandle في اكسل) يمكن أن تستخدم كتابة المزيد من الحدود بحيث يستوعبها صف واحد. بعدئذ اضغط المؤشرة واسحبها للاستمرار بالصيغة على الصف الثاني.

يمكن أن يولد تتابع ثان من نسب أزواج الحدود المتتابعة، كما أشير إليه في الوحدة الإثرائية، بالطريقة الآتية. إذا ادخل العددان الأوليان 1، 1 في الخليتين A_1 , B_1، بعدئذ ستحتوي الخلية B_2 الصيغة:

$$= C_1 / B_1$$

إن المثال الآتي قد تم صنعه على حاسوب متوافق مع IBM وباستخدام برنامج مايكروسوفت اكسل.

والآن اقترح تطبيقاً ثانياً والذي قد يثير اهتماماً كافياً: يقترح مثلث باسكال، بعد إجراء مناقشة للوحدة الإثرائية 99، وبالخصوص قاعدة توليد المثلث، إن المثلث يجب أن يكتب كما يأتي:

```
1  1
1  2   1
1  3   3   1
1  4   6   4   1
1  5  10  10   5  1
```

اسأل التلاميذ اقتراح صيغة صحيفة ممتدة مناسبة والتي تقوم بتوليد هذا المثلث. وحاول أن تبين بأن الإدخال الأول والأخير لكل صف هو 1 وأن بقية الإدخالات هي عبارة عن مجموع العدد في الصف أعلاه، والعدد الموجود في نفس الصف ولكن على بعد عمود واحد على يساره.

التقييم اللاحق Postassessment

اسأل طلبة الصف أعداد قائمة بالموضوعات الرياضية التي قد تكون مناسبة للإعداد خلال صحيفة ممتدة، وبادر إلى حل بعضها. ويمكن أن تقترح موضوعات قد قمت بانتقائها من الوحدات الإثرائية في هذا الكتاب.

إن الموضوعات الآتية قد تبرهن على كونها موضوع جدير بالتحدي:

المربعات السحرية.

الأعداد Palindromic.

شبكة ايراتوستينيس.

حل معادلة تربيعية.

ثلاثيات فيثاغورية.

الكسور المستمرة.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	1	2	3	5	8	13	21	34
2		2.000	1.500	1.667	1.600	1.625	1.615	1.619	
3									

120 عوالم الهندسة الثلاثة
The Three World of Geometry

إنها الرغبة باكتناه المجهول، السمة التي تلتصق بجلدة الكائن البشري فتدفع به نحو سبر الطبقات الجيولوجية للعثور على المزيد من الأسئلة التي تثير متاعبه !. تعرض هذه الوحدة النتائج المروعة التي تم تحقيقها بعد عشرين قرناً من التنقيب في مسائل تبدو بأنها غير هامة، وثانوية.

إن كثيراً من الناس قد ساهموا خلال حقب تاريخية متعددة بصياغة مفردات الهندسة التي تعرفها في هذه الأيام، ولكن هناك ثمة رجل يشخص في موقع يعلو عليهم جميعاً. إن هذا الرجل هو اقليدس Euclid، الرياضي اليوناني الموهوب الذي ابتكر وكتب أول نص هندسي بالتاريخ، "العناصر Elements (300 ق.م).

تكمن أهمية هذا النص في كونه قد ابرز قدرة العقل البشري على الوصول إلى استنتاجات غير عادية بتوظيف طاقة التفكير العقلاني بمفردها — تلك القدرة التي لا يمتلكها مخلوق آخر سواهم. وفي العناصر، ابتكر اقليدس الهندسة كنظام مسلمات يرتكز إلى مسلمات خمسة هي:

1. يمكن رسم خط مستقيم من أية نقطة إلى نقطة أخرى.
2. يمكن أن تمد قطعة مستقيمة بأي طول على خط مستقيم.
3. يمكن رسم دائرة من أي مركز وبأي مسافة من المركز.
4. جميع الزوايا القائمة متطابقة مع بعضها.
5. إذا قطع خط مستقيم مستقيمين آخرين، وجعل مجموع

زواياهما الداخلية على نفس الجهة أقل من زاويتين قائمتين، فإذا تم مد الخط المستقيم بصورة غير متناهية، سوف يتلاقيان على جهة زاويتيهما التي يقل مجموعهما عن زاويتين قائمتين.

إن طول المسلمة الخامسة والتعقيد النسبي الذي تتسم به كان سبباً مؤدياً إلى مزيد من التحريات المكثفة والتحليل بواسطة المعلمين على مر العصور. إن بعض ثمار هذه التحريات قد تم عرضها خلال هذه الوحدة.

أهداف الأداء Performance Objectives

1 سيقوم الطلبة بتعريف شكل ساشيري رباعي الأضلاع Saccheri Quadrilateral واستخدامه في برهانه الصوري.

2 سيقوم الطلبة بمقارنة وتحديد مواطن التباين القائمة حول المستقيمات المتوازية في نماذج اقليدس، وريمان Riemann، وبولياي — لوباتشيفسكي Bolyai – Labachevsky.

3 سيتعلم الطلبة كيفية البرهنة على أن مجموع قياسات زوايا المثلث قد يكون أكثر من، أو أقل من، أو يساوي $180°$.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالمساق الدراسي للهندسة بالمدارس الثانوية والتقليدية، وبالخصوص النظريات ذات الصلة بالمستقيمات المتوازية والمتعامدة، والزوايا الخارجية بالمثلث، والتباينات الهندسية، والبراهين المباشرة وغير المباشرة.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

في بدايات القرن التاسع العشر برزت مسلمة بلاي فير Playfair's Postulate لكونها سهلة وتكافئ منطقياً المسلمة الخامسة لاقليدس: خلال نقطة لا تقع على مستقيم معلوم، يمكن رسم مستقيم واحد فقط موازياً لمستقيم معلوم. (عندما نتكلم عن المتوازيات في هذه الوحدة، فإننا نستخدم تعريف اقليدس: المستقيمات المتوازية هي خطوط مستقيمة، والتي توجد في نفس المستوى وقد مرت بصورة غير متناهية في الاتجاهين، ولا يمكن أن يلتقيان بأي اتجاه.

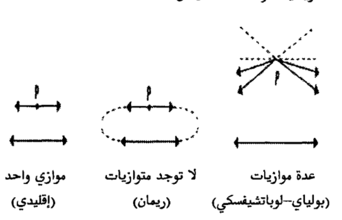
إن التحليل الدقيق لمسلمة اقليدس الخامسة ينتج عنه ثلاثة تعديلات ممكنة، نطلق عليهم "عوالم Worlds" وسنعقد الآن مقارنة بينهم:

مسلمة اقليدس Euclid's Postulate خلال نقطة لا تقع على مستقيم معلوم، يمكن رسم مستقيم واحد فقط موزاياً لمستقيم معلوم (شكل 1).

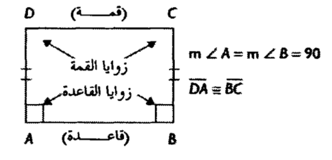
مسلمة ريمان Riemman's Postulate (تخليداً للرياضي الألماني برنارد ريمان (1826–1866)): الخطان المستقيمان يقطع أحدهما الآخر على الدوام (شكل 2).

مسلمة بولياي ولوباتشيفسكي Bolyai & Labachevsky's Postulate: [تخليداً للرياضي الهنغاري يانوس بولياي (1802–1860) والرياضي الروسي ينقولاي لوباتشيفسكي (1856–1973)]: خلال نقطة لا تقع على مستقيم معلوم، يمكن رسم أكثر من مستقيم لا يقطع المستقيم معلوم.

العوالم الثلاثة The Three Worlds: إن الوحدة التعليمية التي ستقوم بعرضها على طلبتك سوف تتضمن بعض الخلفية التاريخية حول مسلمة اقليدس الخامسة.

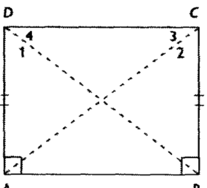


ابتكر جيرولامو ساشيري Giralamo Saccheri (1667–1733) الراهب–الرياضي الإيطالي هذا الشكل رباعي الأضلاع ليساعده في محاولته للبرهنة على أن مسلمة اقليدس الخامسة كانت بالواقع نظرية استندت إلى المسلمات الأربعة الأخرى، وبالتالي ليست مستقلة عنهم. لقد مني ساشيري بالفشل، ولكن خلال استمراره بجهوده المبذولة في هذا المضمار، ابتكر أنظمة مسلمات متماسكة تماماً، ودون أي يشعر بذلك، أنواع أخرى من الهندسات — والتي تعد توطئة لما نطلق عليه في أيامنا هذه **"الهندسة اللا اقليدية"**.



والآن دع الطلبة يستخدمون الخط العام التالي لإكمال البرهان

الذي ينص على أن زوايا الرؤوس Summit Angles بالشكل الرباعي لساشيري تكون متطابقة.



لديك: شكل ساشيري رباعي الأضلاع ABCD.

برهن أن: $\angle D \cong \angle C$.

1 ارسم $\overline{BD}$ و $\overline{AC}$.

2. برهن $\Delta ABD \cong \Delta ABC$.

3 إذن: $\angle 1 \cong \angle 2$ و $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

4. والآن برهن $\Delta DCA \cong \Delta DCB$.

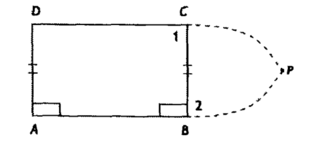
5 إذن $\angle 4 \cong \angle 3$.

6. إذن $\angle D \cong \angle C$.

بعدئذ دع الطلبة يعرضون استخدام المبررات التي يعرفونها بصورة جيدة من هندسة المدارس الثانوية، والتي تعد في عالم اقليدس، زوايا الرؤوس بالشكل الرباعي لساشيري زوايا قائمة. ولكن، يستطيعون، أيضاً، أن يعرضوا الآن أن زوايا الرؤوس بالشكل الرباعي لساشيري هي زوايا منفرجة في عالم ريمان (حيث تلتقي جميع الخطوط) — والاستمرار باستخدام نفس الهندسة التي ألفوا استخدامها سابقاً:

المعطى: شكل ساشيري رباعي الأضلاع ABCD.

برهن: الزاويتان $\angle 1$ و $\angle D$ منفرجتان.



1 مد $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ حتى يلتقيان عند النقطة P (لماذا يتم إجراء ذلك؟ تذكر بأن هذا العالم حيث تلتقي جميع المستقيمات).

2 $m\angle 2 = 90^\circ$.

3 $m\angle 1 > m\angle 2$ (استدع نظرية حول الزاوية الخارجية للمثلث).

4. إذن $\angle 1$ زاوية منفرجة.

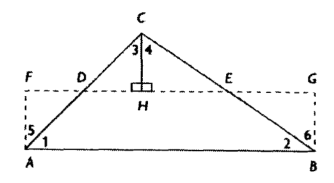
5. ولكن، $\angle 1 \cong \angle D$.

6. إذن كل من $\angle 1$ و $\angle D$ هما زاويتان منفرجتان.

عند هذه النقطة من الصعوبة أن يبرز أي نوع من الشك حول قياس زوايا الشكل رباعي الأضلاع لساشيري في عالم بولياي – لوباتشيفسكي. فمن الواضح أنها يجب أن تكون حادة.

بعد ذلك، اعرض للطلبة كيفية أعداد برهان حول مجموع قياسات زوايا المثلث كما لخصت في هذا الجدول:

نوع العالم	مجموع قياسات زوايا المثلث
ريمان (لا توجد موازيات)	أكثر من 180°
اقليدس (موازي واحد)	تساوي 180°
بولياي — لوباتشيفسكي (عدة موازيات)	أقل من 180°



لديك: المثلث ΔABC.

1. لتكن D نقطة منتصف $\overline{AC}$، ودع E نقطة منتصف $\overline{BC}$.

2 ارسم $\overline{DE}$.

3. ارسم $\overline{DE} \perp \overline{CH}$.

4. حدد $\overline{DH} \cong \overline{DF}$ و $\overline{HE} \cong \overline{EG}$.

5. ارسم $\overline{FA}$ و $\overline{BG}$.

6. $\Delta FDA \cong \Delta CDH$ وأن $\Delta CHE \cong \Delta BGE$

7 بين أن FGBA هو شكل ساشيري — رباعي الأضلاع وقاعدته $\overline{FG}$.

8 إن $\angle 3 \cong \angle 5$ وأن $\angle 4 \cong \angle 6$.

مجموع قياسات زوايا ΔABC

9. $= m\angle 1 + m\angle 2 + (m\angle 3 + m\angle 4)$

10 $= m\angle 1 + m\angle 2 + (m\angle 5 + m\angle 6)$

11. $= m\angle 1 + m\angle 5) + (m\angle 2 + m\angle 6)$

12. $= m\angle FAB + m\angle GBA$

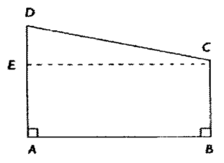
13 = مجموع قياسات زوايا الرأس بشكل ساشيري

والآن سوف يدرك الطلبة إدراكاً كاملاً لماذا أحس ساشيري بالفشل إزاء ما خطط لفعله. ولكنه، رغم ذلك، برهن نظريات والتي بدت أنها وصلت إلى استنتاجات متناقضة.

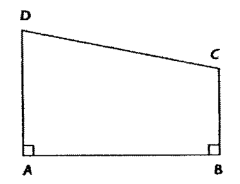
وبدلا من ذلك فقد تحول إلى أحد أبطال الرياضيات الذين لا نتغنى بذكرهم!.

التقييم اللاحق Postassessment

بيَن كيف أن المقيمين بالعوالم الثلاثة يستطيعون إكمال البراهين الآتية:



1. لديك: $\overline{AB} \perp \overline{DA}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{CB}$ ، $DA > CB$.
   برهن: $m\angle BCD > m\angle D$
2. إن معكوس (1) يمكن أيضاً أن يبرهن عليه بواسطة المقيمين في العوالم الثلاثة. ثم اعرض كيف يمكن أن يجرى ذلك بواسطة إكمال البرهان المحدد.



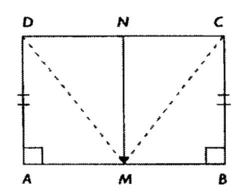
معطى: $\overline{AB} \perp \overline{DA}$ ؛ $\overline{AB} \perp \overline{CB}$ ، $m\angle c > m\angle D$.
برهن: $BDA > CB$
تلميح: استخدم reductio ad absurdum.

3. إكمال برهان أن المستقيم الذي يصل بين نقاط منتصف القاعدة والرأس في شكل ساشيري رباعي الأضلاع (المستقيم المتوسط) يكون عمودياً على كل منهما.

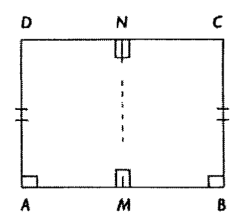
المعطى: شكل ساشيري رباعي الأضلاع ABCD ؛والنقطتان M و N هي نقاط منتصف ($\overline{MN}$ هو مستقيم متوسط).

برهن: $\overline{MN} \perp AB$, $\overline{DC}$.

1. ارسم $\overline{DM}$ و $\overline{MC}$.
2. برهن $\Delta AMD \cong \Delta BMC$ وأن $\Delta DNM \cong \Delta CNM$.
3. يجب أن يتمها الطلبة.



4. سيتمكن فقط سكان عالم ريمان (حيث تكون زوايا رؤوس شكل ساشيري رباعي الأضلاع منفرجة) من البرهنة على هذه القضية: قياس رأس شكل ساشيري — رباعي الأضلاع يقل عن قياس قاعدته. إن الخطوط العامة للبرهنة ستتبع:



عالم ريمان World of Riemann

معطى: شكل ساشيري رباعي الأضلاع ABCD.
برهن: $DC < AB$.

(1) ارسم المستقيم المتوسط $\overline{MN}$.
(2) $m\angle BMN = m\angle MNC = 90°$.
(3) $\angle C$ زاوية منفرجة (لماذا؟).
(4) في الشكل الرباعي MNCB (قاعدته $\overline{MN}$ ، $m\angle C > m\angle B$) (لماذا؟).
(5) إذن $NC < MB$ (لماذا؟).
(6) إذن $DC < AB$ (لماذا؟).

5. اعرض كيف أن سكان عالم بولياي – لوباتشيفسكي (حيث زوايا الرؤوس بشكل ساشيري تكون حادة) يستطيعون البرهنة بأن قياس الرأس بشكل ساشيري تساوي قياس القاعدة.
6. اعرض كيف أن سكان عالم أقليدس (حيث زوايا الرؤوس بشكل ساشيري قائمة) يستطيعون البرهنة بأن قياس الرأس بشكل ساشيري تساوي قياس القاعدة.

مرجع reference

Harold E. Wolfe, Introduction to Non-Euclidean Geometry, New York: Dryden Press, 1945.

121 خليط π

πie Mix

أصيب ليونارد أويلر (1707-1783) الرياضي السويسري العالم الرياضي بدهشة كبيرة عندما اكتشف عبارة تركب في صيغة واحدة، والتي تبدو حتى ذلك الحين، أعداداً لا توجد علاقة بينها مثل. π , e , i , 1.

تعرض هذه الوحدة تلك الصيغة وتبين كيف قد ابتكرت.

أهداف الأداء Performance Objectives

1 سيتعلم الطلبة بأن e^x، $\sin x$ و $\cos x$ يمكن عرضها بواسطة سلسلة أسية.

2 سيرى الطلبة نتائج وعواقب السير في المسار غير المخطط للرياضيات.

3. سيستخدم الطلبة صيغة أويلر لاشتقاق تطابقين مثلثين.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تقييم أسس الأعداد الخيالية i، وأن يكونوا على معرفة كافية برموز المضروبات لعاملية. كما يجب على الطلبة، أيضاً، أن تكون لديهم معرفة مقبولة باللوغارتيم الطبيعي Natural Logarithm بالأساس e، والمتطابقات المثلثية والخاصة بجيب وجيب تمام مجموع زاويتين.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

اخبر الطلبة انه بالنسبة لأي عدد حقيقي، x، يمكن البرهنة في حساب التفاضل والتكامل بأنه يمكن تمثيل دالات محددة، تحت ظروف معلومة، كسلسلة أسية غير متناهية. على سبيل المثال:

$$\sin \chi = \chi-\frac{\chi^3}{3!}+\frac{\chi^5}{5!}-\frac{\chi^7}{7!}+\frac{\chi^9}{9!}-\frac{\chi^{11}}{11!}+\ldots.$$

$$\cos \chi = 1-\frac{\chi^2}{2!}+\frac{\chi^4}{4!}-\frac{\chi^6}{6!}+\frac{\chi^8}{8!}-\frac{\chi^{10}}{10!}+\ldots.$$

$$e^{\chi} = 1+\chi+\frac{\chi^2}{2!}+\frac{\chi^3}{3!}+\frac{\chi^4}{4!}+\frac{\chi^5}{5!}+\frac{\chi^6}{6!}+\ldots.$$

اتخذ أويلر خطوة جزئية عندما امتحن فرضية أن x يجب أن يكون حقيقياً، لأننا إذا قمنا بتعويض قيمة x بالعدد الخيالي $i\theta$، حيث θ عدد حقيقي وأن $i = \sqrt{-1}$ ستحصل أمور تستحق اهتمامنا:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+\ldots.$$

باستذكار أن $i^2 = -1$، $i^3 = -1$، $i^4 = 1$، نستطيع وبتبسيط حدود السلسلة حتى نحصل على:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{(\theta)^2}{2!}-\frac{(\theta)^3}{3!}+\frac{(\theta)^4}{4!}+\frac{(\theta)^5}{5!}-\ldots.$$

$$=[1+\frac{(\theta)^2}{2!}+\frac{(\theta)^2}{4!}-\frac{(\theta)^6}{6!}+\ldots.]+$$

$$i[\theta-\frac{(\theta)^3}{3!}-\frac{(\theta)^5}{5!}-\ldots..]$$

$$=\cos\theta + i\sin\theta$$

وإذا قمنا ثانية باستذكار $\cos 2\pi = 1$، $\sin 2\pi = 0$، نستطيع استنتاج أن $e^{2\pi} = 1$.

إنها الصيغة التي سببت الدهشة المروعة !. والآن سنعود إلى نتيجة غير مسبوقة.

إن افتراض $\theta = x + y$ سوف يعطينا

$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y) \qquad (1)$$

ولكن، كذلك:

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$
$$= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$$
$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \qquad (2)$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية والخيالية للمعادلتين (1) و(2)، نحصل على:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

يمكن بسهولة إدراك هاتين المعادلتين بوصفهما صيغاً مثلثية.

التقييم اللاحق Postassessment

1. استخدام أسلوب سلسلة ماكلاورين في اشتقاق صيغ لكل من: $\sin(x-y)$ و $\cos(x-y)$.
2. بين أن $e^{\pi i} + 1 = 0$.
3. بين كيف أن $e^{i\theta}$ قد تمثل إجراء (operator) يدير عدداً مركباً باتجاه عقارب الساعة خلال زاوية مقدارها θ على طول وحدة دائرة.
4. بين الارتباط القائم بين صيغة أويلر ونظرية "دي مويفر" DeMoivre لإيجاد أسس وجذور عدد مركب.

122 التكرار الرسومي Graphical Iteration

تركز هذه الوحدة على نظرية الفوضى (التشوش) Chaos Theory وارتباطها بالمنهج الدراسي للمدارس الثانوية، وتوفر فرصة للطلبة باستكشاف مساحة الاهتمام الحالية بالرياضيات خلال الطاقات التي تتيحها الحاسبة اليدوية – الرسومية والحاسوب.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. بتوفير حاسبة يدوية – رسومية أو حاسوب، سوف يستعرض الطلبة التكرار الرسومي تحت التربيعات.
2. سيقوم الطلبة ببحث خاصية التكرار تحت القطع المكافئ $f(x) = ax(1-x)$ لقيم مختلفة لـ a من 1 إلى 4 مع قيم أولية مختلفة تتكرر في الفترة من 5 نحو الواحد.

التقييم السابق Preassessment

يجب على الطلبة أن يكونوا معتادين مع دور المعامل a الذي يلعبه ف شكل التربيعية $f(x) = ax(1-x)$ وأن يكون لديهم فهم الجزء السيني المقطوع للدالة وكذلك ينبغي أن يكون لديهم فهم أولي بطبيعة التكرار، حيث يصبح المخرج $f(x_0)$، للتكرار الأولي، x_0، التكرار التالي x_1.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

ابدأ بمناقشة خصائص القطع المكافئ المعروف: $f(x) = ax^2 + bx + c$، وبعدئذ رباعية معلومة ($f(x) = ax(1-x)$). موضحاً كيف أن المستقيم العاكس، يمكن أن يحول هندسياً مدخلاً x_i، مخرجه $f(x_i)$ إلى مدخل جديد x_{i+1}. ولاستخدام قيم مختلفة للمعامل a، لاحظ كيف أن المعادلة التربيعية تقطع الوتر، والمستقيم العاكس، $f(x) = x$، في مواقع مختلفة عندما يزداد معامل a من 1 إلى 4.

وعندما يستكشف المرء خصائص التكرارات المختلفة ستبدو له الخصائص المختلفة جلية لا لبس فيها. ليقم الطلبة باستكشاف والتوصل إلى أن قيمة البداية للتكرار الأولي لا تمتلك تأثيراً على السلوك طويل الأمد للتكرار، رغم أن القيم المبكرة سوف تعاني من تغييرات. ولتبسيط الأمر، فإن جميع الرسوميات التوضيحية المعروضة هنا تبدأ بتكرارابتدائي مقداره 0.2.

إن مختصراً لسلوكيات التكرارات الموضحة تم إدراجها في هذا المقام.

بالنسبة $a = 2$، تصعد التكرارات إلى نقطة التقاطع $x = 0.5$.

بالنسبة $a = 2.8$، تلتف التكرارات في النهاية إلى النقطة الثابتة $x = 0.643$.

بالنسبة $a = 3.4$، يظهر سلوك بفترة مقدارها 2 بين $x = 0.452$ و 0.842.

بالنسبة $a = 3.53$ يبدأ سلوك بفترة مقدارها 4 بالتكون، ومتحركاً في آخر الأمر خلال $x=0.369, 0.822, 0.517, 0.881$

بالنسبة $a = 3.84$، يظهر سلوك مدهش بفترة مقدارها 3 وينبثق حول $x = 0.149 , 0.488 , 0.959$.

بالنسبة $a = 4$ يظهر سلوك فوضوي صرف.

هناك عدة مستويات لتوضيح، وتفسير تصاحب ما أطلقنا عليه السلوك الفوضوي أو المشوش. وبصورة عامة يوصف هذا السلوك بثلاثة أفكار متفرقة لكنها مترابطة فيما بينها الخليط Mixing، والحساسية Sensitivity، والدورية Periodicity.

بالنسبة "للخلط"، في كل فترة، مهما كانت صغيرة، توجد ثمة نقطة، والتي عبر التكرار سوف تصل وتختلط خلال جميع الفترات بين 0 و 1.

أما بالنسبة "للحساسية"، فإن الفروق الصغيرة جداً في التكرارات قد تؤدي إلى سلوكيات مختلفة بعد عدد صغير من التكرارات المتتالية فحسب.

وبالنسبة "للدورية"، فإنها تتخفى خلال السلوك الفوضوي البين، فلا تختلط بعض النقاط ولكنها تزود، بصورة دورية، عدداً قليلاً من المواقع.

ينبغي أن يشجع الطلبة على استكشاف هذه الخصائص لأن مستوى اهتمامهم الشخصي سوف يكون حافزاً قوياً لهم.

ماذا يسيطر على هذا السلوك المتكرر، الغريب، والمتغاير باستمرار ضمن هذه المعادلة التربيعية البسيطة؟ وأين تحصل الانتقالات من نقطة ثابتة إلى فترة — 2، فترة — 4، وسلوك فوضوي؟ وهل هناك ثمة موارد للدهشة فيما بينها، مثل سلوك فترة — 3 والذي يتكرر ظهوره في أية لحظة بعد أن تبرز أية إشارة من الفوضى؟ يمكن أن تجد بعض التيارات باتجاه إجابة هذه الأسئلة في تخطيط فيغنبوم Feigenbaum Plot والذي سنلقي عليه مزيداً من الضوء في الوحدة القادمة.

إن هدف هذا النشاط هو إحدى المحفزات التي ستحدو بالطلبة إلى استثمار التقنية لاستكشاف سلوك التكرار. وسيأتي التحليل الرياضي الأساسي في مرحلة تالية، بالتوازي مع المزيد من التحريات لموضوعات ذات صلة به، مثل سلوك التكرار عندما تكون $a > 4$.

التقييم اللاحق Postassessment

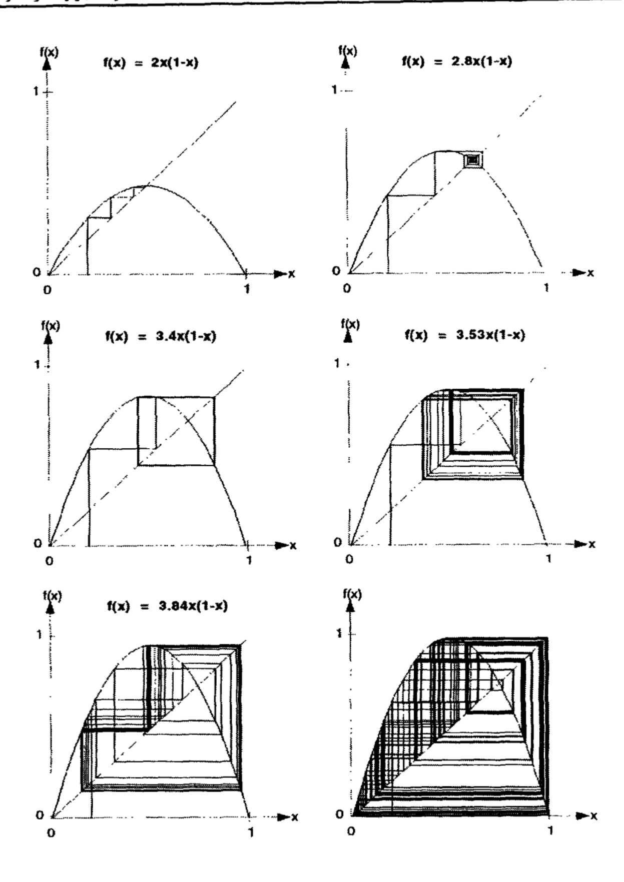
بالاستفادة من الآلات الحاسبة — الرسومية أو الحواسيب سيكون الطلبة قادرين على إجراء هذه المهارات:

1. ميز مختلف سلوكيات التكرار التي تبرز بالنسبة لقيم مختلفة لـ a بفترات من 1 إلى 4 بالنسبة للدالة:
   $f(x) = ax\,(1-x)$.
2. جد القيم المحددة بالنسبة لنقطة ثابتة، وسلوك تكراري بفترات منتظمة.

مرجع Reference

Peitgen, H., H. Jurgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, and L. Yunker, Fractals for the Classroom: Strategic Activities, Volume Two, New York: Springer – Verlage, 1992.

شكراً للدكتور "ايفان مالتسكي"


f(x) = 2x(1-x)
f(x) = 2.8x(1-x)
f(x) = 3.4x(1-x)
f(x) = 3.53x(1-x)
f(x) = 3.84x(1-x)
f(x)
x
0
1

123 تخطيط فيغنبوم

The Feigenbaum Plot

تنهي هذه الوحدة كيف أن تخطيط فيغنبوم يفصّل النقاط ثنائية الشعب Bifurcation في سلوك التكرار المتغير تحت المعادلة التربيعية: $f(x) = ax\ (1-x)$. وقد رسمت قيم محددة لمعامل a إزاء جاذبات النقاط الثابتة والدورية. إن مناطق السلوك الفوضوي ستكون مرئية بسهولة ويسر.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بقراءة قيم الجاذب في الفترة من 0 إلى 1 بالنسبة لـ x ولقيم مختلفة للمعامل من 1 إلى 4.
2. يستطيع الطلبة ملائمة المعلومات في هذا النشاط إزاء البيانات التي جمعت في نشاط 1، ومعاودة اكتشاف التكرارات، في هذا الوقت، باعتماد نظرة أكثر عمقاً إلى بنية السلوكيات المختلفة.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على معرفة كافية بالسلوك العام للتكرار للمعادلة التربيعية $f(x) = ax\ (1-x)$ عند انتقالها من سلوك النقطة الثابتة الذي يمكن توقعه كلياً عند $a = 1$، إلى السلوك الفوضوي الذي لا يمكن توقعه كلياً عند $a = 4$ بالنسبة لتكرار x بين 1 , 0.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

يتوقع الطلبة إيجاد المتغير x على المحور الأفقي لوجوده في النشاط الأخير على التكرار الرسومي. إذن، سيؤدي اتجاه تخطيط فيغبوم إلى اهتمام أولي بعض الشيء.

يظهر المحور الأفقي الوسيط A Parameter والذي يتراوح من 1 إلى 4، مع قيم x الناظرة للجاذب على المحور العمودي والذي يتراوح بين 0 إلى 1.

ويتحرك الحلزون داخلياً إلى جاذب النقطة الثابتة $x = 0.643$ عندما تكون $a = 2\text{-}8$. إن هذه القيمة لـ x يمكن الآن قراءتها مباشرة من تخطيط فيغنبوم، كما تظهر بالشكل. وبنفس الطريقة، تستطيع قراءة الفترة —2 جاذب $X = 0.542$ و 0.842، وعندما تكون $a = 3.4$.

يظهر تخطيط فيغنبوم، بوضوح، النقاط ذات التشعب الثنائي حيث تتضاعف الفترة من 1 إلى 2، ومن 2 إلى 4، ومن 4 إلى 8، وهكذا. ينبغي على الطلبة استكشاف هذه المناطق ثانية باستخدام نشاط 1، ولكن ينبغي أن لا يثبطوا في حالة عدم عثورهم على نقاط تفريق دقيقة. وتذكر، بأن الوسيط a هو عدد حقيقي، وغير محدد بالحساب المتناهي للآلة الحاسبة الرسومية أو الحاسوب.

سيكتشف الطلبة بسرعة أين تظهر نافذة الفترة 3 باختصار، في إحدى الفجوات المطمورة في محيط السلوك الفوضوي. إن قيم جاذب الفترة —3، $x = 0.149\ ,\ 0.488\ ,\ 0.959$، والتي تم دعمها هنا بالنسبة لـ $a = 3.84$. يرتبط اسم هذا التخطيط باسم الفيزيائي الأمريكي ميتشيل فيغنبوم Mitchell Feigenbaum، والذي قام بتطويره عند عمله في مختبر لوس ألاموس Los Alamos Laboratory في عقد السبعينات من القرن العشرين. إن الجزء الأساسي من اكتشافه يؤكد أن نسب المسافات بين نقاط التشعبات الثنائية المتتالية تتقارب، بصورة مدهشة، إلى قيمة ثابتة بات تحمل اسمه في هذه الأيام. إن ثابت فيغنبوم الكوني هو:

$$\delta = 4.669202 \ldots$$

ويظهر في كثير من حالات التكرار المختلفة في الرياضيات والعلوم.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكون الطلبة على أهبة الاستعداد لتوضيح ما يأتي:

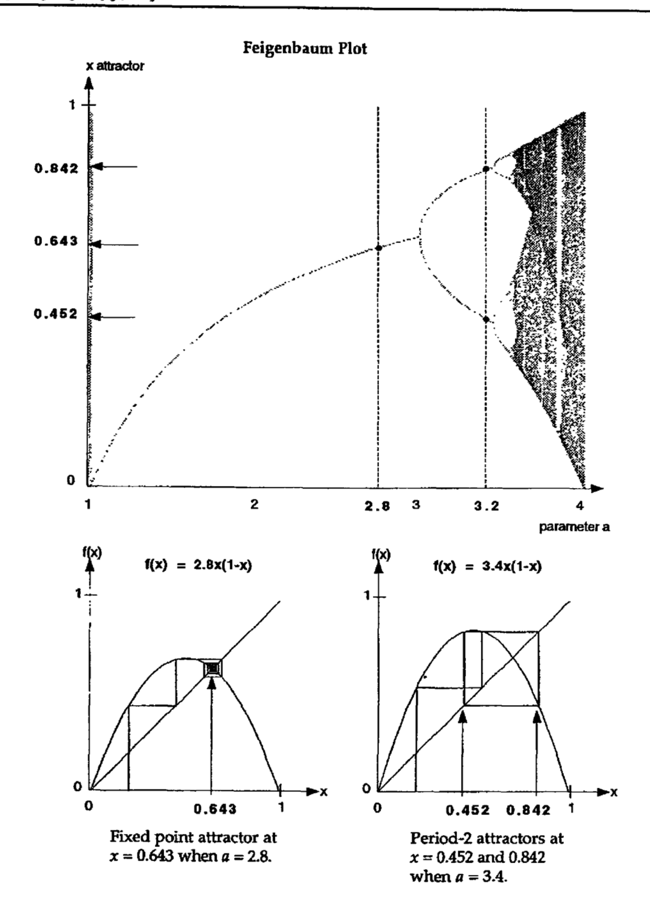
1. أزواج فترة التشعب كما نلاحظها في تخطيط فيغنبوم.
2. الصلة بين تخطيط فيغنبوم وسلوك التكرار بالنسبة للمعادلة التربيعية $f(x) = ax\ (1-x)$.

مراجع References

Gleick, J., Chaos: Making a New Science, New York: Penguin Books, 1987.

Peitgen, H., H. Jurgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, and L. Yunker, Fractals for the Classroom: Strategic Activities, Volume Two, New York: Springer – Verlag, 1992.

شكراً للدكتور "ايفان مالتسكي"



Fixed point attractor at $x = 0.643$ when $a = 2.8$.

Period-2 attractors at $x = 0.452$ and 0.842 when $a = 3.4$.

124 مثلث سيربنيسكي
The Sierpinski Triangle

والآن بعد أن أضحى عصر التقنية يرتكز إلينا، فإن التكرار قد اضطلع بمستوى جديد من الأهمية في ميدان الفكر الرياضي المعاصر. يعكس هذا النشاط عن كيفية توجيه الاهتمام نحو المنهج الدراسي بالمدارس من خلال الهندسة. إن عملية هندسية يتم تكرارها مرة بعد أخرى، تستطيع تحويل منطقة مثلث منبسط إلى هيكل "فراكتل" مجرد أنيق، هو عبارة عن مثلث سيربنيسكي.

أهداف الأداء Performance Objectives

1. سيقوم الطلبة بالتمرن على التكرار الهندسي، بالنظر أولاً ثم تخيل التغييرات الهندسية في المراحل المتتالية للهيكل، ثم سيكونوا بعدئذ قادرين على التعبير عن هذه التغييرات بكل من الصيغتين الجبرية والعددية.
2. سيكون الطلبة قادرين على تعريف وتوضيح التشابه الذاتي.

التقييم السابق Preassessment

ينبغي أن يكون لدى الطلبة خبرة جيدة بمقياس الرسم، والتشابه، وتمييز الأنماط بصيغ وأشكال متعددة، كما يجب أن تكون لديهم معرفة كافية بالأفكار الرئيسة للتكرار والتفكير السائد بميدانه.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

في نهاية القرن التاسع عشر وبدايات القرن العشرين، نشد الرياضيون إبداع أنواع جديدة من البنى الهندسية والتي تمتاز بخصائص فريدة. ولقد تم تمييزها وتصنيفها هذه الأيام كمنحنيات فراكتال Franctal. إن إحدى مبتكرات تلك الفترة كان مثلث سيربنيسكي، الذي جاءت تسميته تيمناً باسم الرياضي البولوني واكلاو سيربنيسكي Waclaw Sierpniski.

ليبدأ كل طالب بقطعة ورقية على شكل مثلث، ثم ليصلوا بين نقاط منتصف أضلاع المثلث لتكوين أربعة مثلثات متشابهة بنصف الحجم الخطي. قم بقص كل منهم بمفرده، ثم ابق مثلثات الزوايا الثلاثة، وارفع المثلث الوسيط. فكر بما فعلته بوصفه المرحلة 1.

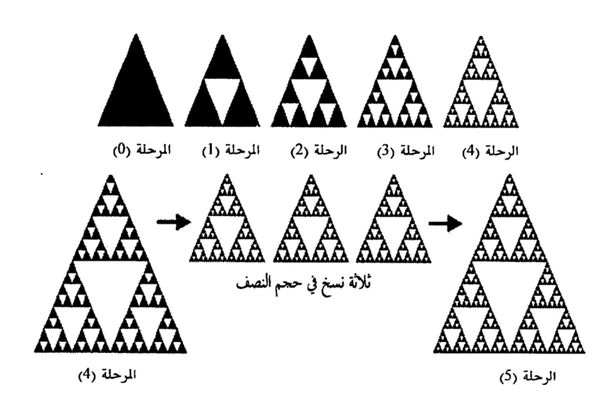
طبق نفس الخوارزمية للمرة الثانية على كل من المثلثات الثلاثة — الجديدة، والصغيرة، لتحصل على المرحلة 2. بعدئذ طبق الخوارزمية ثانية على المثلثات المتبقية التسعة — الأصغر للحصول على المرحلة 3. تخيل استمرار عملية التكرار لغاية 4 مراحل.

تحوي كل مرحلة على ثلاثة أضعاف عدد المثلثات لتلك الموجودة في المرحلة التي تسبقها. إذن فإن من الجلي، من هذا المنهج، بأن كل مرحلة تالية تتطلب ثلاثة أضعاف لتطبيقات الخوارزمية. وهناك دائماً المزيد، والمزيد من التطبيقات على الأجزاء الأصغر فالأصغر. وكلما استمرت عملية القص بتقدمها، فإن قطع المثلثات لا تلبث أن تصبح أصغر في حجمها واكبر بعددها. هل هناك ثمة منظور للعملية حيث تبقى قاعدة التكرار كما هي بالضبط طيلة فترة العملية، وتطبق باستمرار مرة واحدة بالضبط عند التوجه من مرحلة إلى التي تليها؟ وسيكون الجواب بنعم.

ليفكر طلبتك بصورة شاملة بالبنية الكلية عند كل مرحلة، دون العدد المتزايد —إلى مالا نهاية– من الأقسام الأصغر فالأصغر. وهذا هو أحد السيناريوات المحتملة:

- خذ أية مرحلة من الشكل إلى جهاز الاستنساخ.
- ثبت الجهاز على نسبة 50٪ مصغراً الأبعاد الخطية للنصف.
- اصنع ثلاثة نسخ من النسخة المصغرة للنصف.
- استخدمهم لبناء المرحلة التالية للهيكل.

دع هذه العمليات تكون خوارزمية التكرار. ثم دع طلبتك يبنون على ارض الواقع الخطوات الأولى المختلفة بهذه الطريقة، مكررين نفس العملية بالضبط المرة تلو الأخرى. بعدئذ دعهم يتخيلون استمرار التكرار، ودعهم يتصورون كيفية تغاير الشكل، فيصبح أكثر دقة ورهافة بازدياد تعقيدها عند كل مرحلة تالية:



بالنظر إلى عملية البناء من خلال هذه القواعد فإن فكرة التشابه –الذاتي تصبح جلية لا غبار عليها. وأن البنى المتتابعة تحتوي المزيد والمزيد من نسخ بنية المرحلة الأصلية — O وبقياسات مختلفة. ولكن النظرة الفاحصة تظهر بأن الشكل المحدد هو الوحيد الذي يبدي بصدق تشابهاً — ذاتياً. إن المراحل المحدودة تحتوي نسخاً "أساسية" تشبه الكل. ولكن حدود الشكل فقط تحتوي نسخاً "مطابقة" من الكل في كل المقاييس!.

إن مثلث سيربنيسكي هو الشكل المحدد الذي ذكرناه قبل قليل. فهو عبارة عن تجريد Abstract لهيكل منحنى فراكتال بتعقيد غير متناهي، حيث تم تصغير جميع مناطق المثلثات الصغيرة ذاتها فأضحت نقاطاً. إن الطلبة بحاجة إلى معرفة أن هذه المثلثات المتناهية بالصغر لا يمكن رؤيتها إلا في الذهن فقط، ويبقى ما تراه العين، بأفضل حالاتها، هي بضعة حالات لمراحل متناهية عند تطوير مثلث سيربنيسكي.

ولكن تكمن في عملية التكرار الهندسي جملة من الارتباطات الرياضية، ويظهر في الجدول الآتي كيف أن عملية البناء هذه ترتبط بأنماط أعداد، ووسيط، ومساحة، وأسس، وسلاسل هندسية، ونهايات، لتسمية بعضها. بالواقع، فإن كل من منحنيات فراكتال ومثلث سيربنيسكي بالخصوص، يبديان أكثر الأمثلة كفاءة لأنواع الارتباطات الرياضية، والتي يشار إليها في "معايير مناهج وتقويم رياضيات المدرسة" للمجلس الوطني لمعلمي الرياضيات.

يعرف المحيط والمساحة عند المرحلة — O بأنه عبارة عن 1 وحدة و 1 وحدة مربعة على التوالي. إن هذا الأمر سيتيح للطلبة فرصة التركيز على معامل الضرب الثابت Constant Multiplier في كل من التتابعين، ولكي يقام ارتباط مباشر بالتتابعات الهندسية.

ويمكن أن يسأل الطلبة، عند مستويات مختلفة حساب المحيط المتغير والمساحة، مبتدئين بالمثلث متساوي الأضلاع بقياس 4 بوصة لكل ضلع من أضلاعه.

المرحلة	0	1	2	3	4	n
عدد المثلثات	1	3	9	27	81	3^n
المساحة	1	3/4	9/16	27/64	81/256	$(3/4)^n$
المحيط	1	3/2	9/4	27/8	81/16	$(3/2)^n$

لوحظ بأن المساحات في الجدول تشير إلى المناطق المثلثية — المظللة والتي تبقت عند وفي كل مرحلة. ينبغي أن يرى الطالب هذه الأرقام بأنها تتقارب نحو 0، فتكون المساحة المحددة لمثلث سيربنيسكي من خلال هذا المفهوم هي 0 !. من جانب آخر، فإن المحيطات بالجدول تشير إلى المسافات حول وعند كل قطعة مثلثية في كل مرحلة. وهنا، يجب على الطالب أن يراها بصيغة تباعد. وبذاك المنظور، فإن المحيط المحدد هو غير متناهي !. ضع هذين السلوكين لكل من المساحة والمحيط، ولنفس الشكل سوية لتحصل على نظرة خاطفة جديدة لتفرد هذه البنية.

التقييم اللاحق Postaessessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على تفسير:

1. خوارزمية بناء، والتي، عندما تكرر، ينشأ عنها مثلث سيربنيسكي.
2. طبيعة التشابه — الذاتي كما نجدها في مثلث سيربنيسكي.
3. كيفية تغاير المحيط والمساحة عندما تتولد مراحل متتابعة.

مرجع Reference

Peitgen, H., H. Jurgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, and L. Yunker, Fractals for the Classroom: Strategic Activities, Volume One, New York: Springen – Verlag, 1991.

125 الفراكتال

Fractals

منذ 25 عاماً مضت، فقط، عمد بنيوت مانديلروت Benoit Mandelbrot إلى ابتكار كلمة فراكتال Fractal. وكان من الصعب جداً، في ذلك الوقت، الاعتقاد بأن هذا الموضوع سوف ينتشر انتشاراً سريعاً فيغزو كل هذه القطاعات بهذا الوقت القصير، كما أننا لا نكاد نعثر على أن هناك من تنبأ بأن هذا الموضوع سوف يثير اهتماماً، وينشئ ارتباطات، ثم يقتحم المنهج الدراسي لرياضيات المدرسة بهذه السرعة الكبيرة. ولكن التقنية، مضافاً إليها رغبتنا الدائمة في إثراء تعليمنا بالأفكار الجديدة، جعل هذا الأمر في حكم الممكن.

تتوفر، في هذه الأيام، الكثير من الحزم البرمجية الجاهزة بالسوق، والتي تستطيع أن تزج ديناميكية وجمالية الفراكتال وتضعها جاهزة بين يدي طلبتك. إنها مسألة أخرى، لحد بعيد، بالنسبة للطلبة لرؤية أي نوع من الرياضيات يشكل البنية التحتية لهذه البنى الساحرة. ويمكن أن ينجز جزء لا بأس به في داخل الصف بوضع اليد على أنشطة وخبرات تم الاعتناء باختيارها وتنسيقها بصورة محكمة.

تسهم هذه الوحدة بتمديد وتوسيع التوليد الهندسي التكراري لمثلث سيربنيسكي ضمن العائلة الكلية لبنى الفراكتال.

أهداف الأداء Performance Objectives

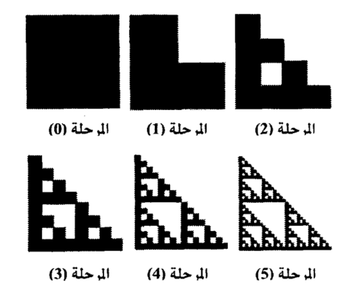
1. سيقوم الطلبة بتوليد مراحل متتابعة من الفراكتال المختلفة بالاستناد إلى تكييف شيفرات البناء لمثلث سيربنيسكي.
2. سيميز الطلبة التشابه — الذاتي في الفراكتال من هذا النوع، والحصول من خلالها على طبيعة شيفرة بنائها.

التقييم السابق Preassessment

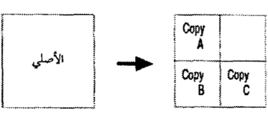
ينبغي أن تكون لدى الطلبة خبرة جيدة بالمقاييس، والتشابه، والتشابه — الذاتي، والتحويلات الهندسية للتدويرات والانعكاسات.

استراتيجيات التعليم Teaching Strategies

تأمل تحويل كتل بناء مثلث سيربنيسكي بحيث تتمركز حول المربعات بدلاً من المثلثات. وتعد هذه الخطوة التي سيباشرونها الأكثر صعوبة بين غيرها. كيف يمكن لمثلث سيربنيسكي أن يبزغ من عملية تتضمن المربعات فقط؟



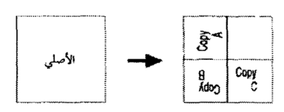
إن كل مرحلة منتهية للفراكتال الذي سنباشر صناعته، تتألف من مجموعة من المناطق المربعة الصغيرة. وكلما ارتقت المرحلة، كلما ازدادت المربعات صغراً. ولكن في ضوء المحدد، فإن كلا من هذه المربعات الصغيرة سوف تقارب نقطة ما، وهو أمر يصح بالنسبة للمثلثات والمربعات جميعاً. وتنص الحقيقة على أن. الشكل المحدد الذي ينشأ عن المربعات أو المثلثات، هو نفس هيكل الفراكتال. والذي يمثل مثلث سيربنيسكي. ورغم تباين تتابعي الشكلين، على الدوام، فانهما يقاربان نفس الجاذب. ويظهر أدناه أنموذج لشيفرة البناء، تم تكرارها مرة بعد أخرى وذلك بنزع مثلث سيربنيسكي منها.



شفرة البناء
تقليص الحجم الى النصف
اصنع ٣ نسخ
أعد البناء

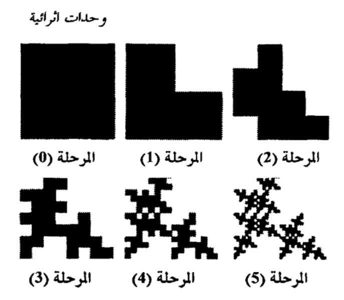
ومتى أرسيت هذه الفكرة على ارض صلبة، اعمد إلى دمج تحويلات المربع في العملية، حيث سيمكن إنشاء العائلة الكلية للفراكتال التي تشابه سيربنيسكي. وستكون النتيجة بأن كل طالب من طلبتك يمكن أن يستكشف الفراكتال الشخصي الذي يعود له / أو لها.

ومع هذه الشيفرة، فإن الخلية A قد تم تدويرها بمقدار 270°، وتدوير الخلية B بمقدار 180°، كل منهما باتجاه عقرب الساعة. وسيرى الطلبة بأن بنية مختلفة سوف تبدأ بالظهور بسرعة.



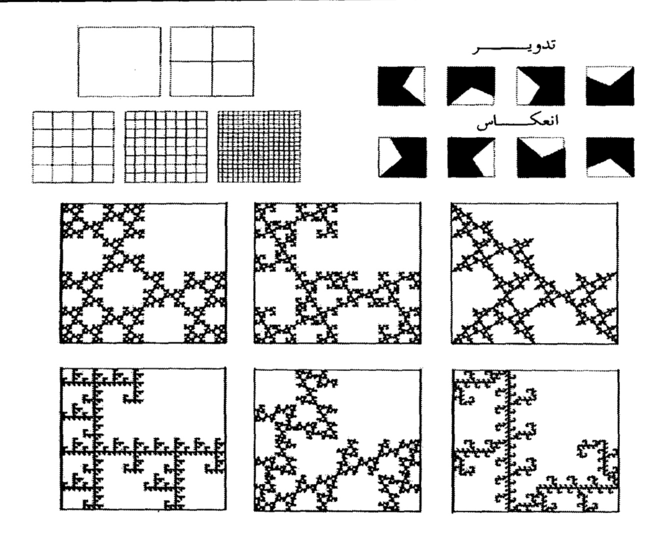
شفرة البناء
تقليص الحجم الى النصف
اصنع ٣ نسخ
أعد البناء وتدوير كل من
A و B

وحدات أثرائية



شجع الطلبة على صناعة شيفراتهم الخاصة، وإنشاء بعض المراحل الأولى للفراكتال المناظر. ويمكن استخدام أوراق الرسوميات التي أحكمت بصورة مرهفة، أو يمكنك تجهيز الطلبة بهذا النوع من شباك القضبان المتصالبة Grids لكي يستخدمونها في النشاط.

تحتوي حزم البرمجيات مثل كلاريس وركس Claris Works على برمجيات للرسم يمكن استخدامها بصورة كفوءة جداً في إنشاء هذه الهياكل وبواسطة هذه العملية. إن ميزة انطباقها على شباك القضبان المتصالبة سيمكن المستخدم من أعداد إنشاءات دقيقة.



ولدينا كلمة تحذير واحدة لا نزيد عليها، فسواء كانت عملية الرسم قد بوشرت باليد، أو باستخدام حاسوب لإنشاء الرسوميات، تذكر دائماً بأن الشكل الكلي عند كل مرحلة، هو الذي يتم تصغيره، وتكراره، ثم إعادة بناءه خلال التحويلات الهندسية. إن الطلبة الذين يطبقون العملية بصورة خاطئة، سينعكس عملهم على الأجزاء الصغيرة فالأصغر بالمراحل المتتابعة، مما يجعل إمكانية إنشائهم للشكل الصحيح أمراً مستحيلاً. واصنع عند وفي كل مرحلة، ثلاثة نسخ مصغرة فقط للكل قبل أن تباشر إعادة بناءها.

سيتضمن الجزء الثاني من هذا النشاط جعل الطلبة يعاينون المراحل التفصيلية للغير، ويحاولون تحديد قدرتهم الشخصية على اكتشاف شيفرات البناء المستخدمة. وستكون هذه العملية ذات تأثير بالغ وتحمل معها تحديات إزاء الخبرة المرئية التي يتصف بها البعض. حاول استذكر، بأن هناك ثماني تحويلات للمربع.

ابدأ أولاً بالهياكل والبنى التي تتضمن التدوير فقط، والتي تعد بالنسبة لكثير من الطلبة من ابسط الهياكل التي يمكن مشاهدتها. واحتفظ بالانعكاسات لمراحل لاحقة، عندما يكون قد اكتسب طلابك خبرة واسعة ومران جيد. وحاول أن تحدد فيما إذا كان باستطاعة طلبتك كتابة شفرات البناء المستخدمة في إنشاء الفراكتال، علماً بأن التدوير، فقط، قد اعتمد في عمليات إنشائها.

التقييم اللاحق Postassessment

ينبغي أن يكون الطلبة قادرين على:

1- متابعة خوارزمية بناء معلومة عبر مجموعة مراحل متتابعة من التكوين والتطوير.

2- استخدام التشابه — الذاتي لتمييز شيفرة البناء من فراكتال أنشئ من هذا النوع.

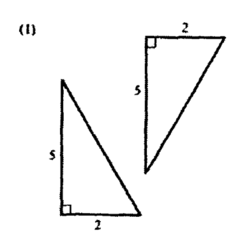
مرجع Reference

Peitgen, H., H. Jurgens, D. Saupe, E. Maletsky, T. Perciante, and L. Yunker, Fractals for the Classroom: Strategic Activities, Volume Three, New York: Springer-Verlag, 1997.



Appendix A الملحق
Additional Exercise تمارين إضافية

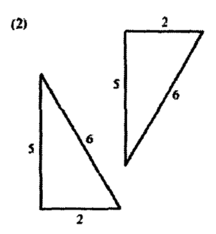
1. اختر أحد الموضوعات من خطة الوحدة حول "الجذور Radicals" المذكورة في الكتاب واكتب خطة درس لها. ما هو نوع خطة الدرس التي قمت بكتابتها؟ ولماذا اخترت هذا الموضوع المحدد لخطة الدرس؟



2. أ. ما هي الخصائص الأساسية التي نجدها في معظم الدروس.
ب. ما هي أنواع الدروس التي تؤدي بذاتها إلى تقانة الاستكشاف !
ج. صح أم خطأ: كل درس يمكن أن يكون ريادياً. ناقش ذلك.

3. اختر موضوعاً من جبر السنة الأولى واعد درساً عنه لمجموعة صغيرة.

4. أ. جد قسماً في الكتاب المنهجي لجبر السنة الأولى بالمدارس الثانوية لغرض تعليمه كدرس للرياضيات — من خلال- القراءة Reading -though- Mathematics. واكتب قائمة بعشرة أسئلة تخطط بطرحها على الصف بعد انتهائهم من قراءة هذا القسم.
ب. افعل نفس الشيء في مادة الهندسة.
ج. افعل نفس الشيء بمادة الجبر للسنة الثانية.
د. افعل نفس الشيء مع مادة الرياضيات للمرحلة الثامنة.

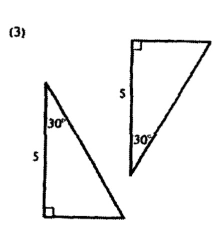


5. اكتب خطة درس لليوم الذي يسبق رحلة استجمام طويلة الأمد، يبرز ألغاز الرياضيات وألعابها.

6. اكتب خطة درس لليوم الأول لأي صف بمادة الرياضيات.

7. اختر موضوعاً من مقرر الرياضيات المتقدمة واعد درساً حوله.

8. اكتب خطة درس تدريبي Drill lesson لكل مما يأتي:
أ. الأسس الكسرية والسالبة.
ب. حساب المثلثات البسيطة (جيب، وجيب تمام، وظل).
ج. صيغة المسافة ونقطة المنتصف في هندسة الإحداثيات.
د. موضوعي LCM و GCD في المرحلة الثامنة.



9. اعد سلسلة من دروس المراجعة حول موضوع "النسب Percent" في مقرر دراسي أساسي.

10. ما هي نقاط القوة والضعف في درس المراجعة الآتي حول تطابق المثلثات؟

أنجز الآن Do-Now: اعرض مسلمة التطابق الموضحة:

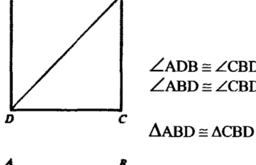
بعدئذ: ناقش مع الصف مستخدماً (AAA) أو (SSA) (حاول توضيح طبيعة الغموض الذي يصاحب استخدام SSA).

وبعدئذ: أنجز البراهين الآتية:

المعطى: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$\overline{DC} \cong \overline{AD}$

برهن: $\Delta ABD \cong \Delta CBD$



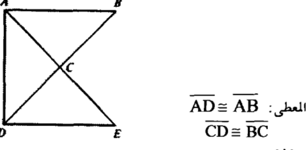
المعطى:

$\angle ADB \cong \angle CBD$

$\angle ABD \cong \angle CBD$

برهن:

$\Delta ABD \cong \Delta CBD$



المعطى: $\overline{AD} \cong \overline{AB}$

$\overline{CD} \cong \overline{BC}$

برهن:

$\Delta ABC \cong \Delta ADC$

11. اعد درساً عن الالة الحاسبة اليدوية حول ما يأتي:
أ. الدرس الأول على نظم المعادلات للسنة الأولى بمادة الجبر.
ب. الدرس الأول حول المنحنيات المثلثية.
ج. الدرس الأول على قانون الجيوب Law of Sines.
د. الدرس الأول على جمع وطرح الأرقام ذات العلامات في الصف المتوسط بالمدرسة.
هـ. الدرس الأول على تغيير الكسور إلى أعشار في الصف الأساسي بالمدارس الثانوية.

12. طور سلسلة من عروض تستغرق 8-10 دقائق حول أي من الموضوعات الآتية، والتي يزمع إعدادها لصف يعمل على تقسيم العمل بالنسبة لجل الفترة الزمنية.
أ. التتابعات.
ب. تاريخ الرياضيات.
ج. الأنماط في الرياضيات.
د. الرياضيات الترفيهية.

13. كيف تميز بين خطة درس رسمية قد تناقشها في مساق على مستوى الكلية في طرائق التدريس، ومخطط تقوم بكتابته لصف بالمدرسة الثانوية تقوم بتعليمه؟

14. افترض انه قد طلب منك تطوير وحدة طويلة المدى حول جداول الصدق Truth Tables للسنة الثامنة بمادة رياضيات المدارس المتوسطة. فينبغي أن يتضمن مفاهيم مثل: النفي Negative، والوصل Conjunction، والفصل Disjunction، وقيم الصدق. بين كل مما يأتي:
أ. ما هي الخطوات التي ستقوم باتخاذها لإعداد مثل هذه الوحدة.
ب. الموضوعات التي تريد تضمينها بالوحدة.
ج. عدد الدروس التي تتطلبها هذه الوحدة.

15. اختر موضوعاً من وحدة جدول الصدق، والتي قمت بإعدادها لتمرين 14 واكتب درس مراجعة لها.

16. قم بإعداد درس للسنة السابعة لصف الرياضيات والذي يعالج موضوع: المتوسط، والوسيط، والمنوال بوقت واحد، وقم بتوفير وقت كاف لتمارين التدريب.

17. جد أربعة معلمين لمادة الرياضيات والذين يمتلكون رغبة بالتعاون معك بإعداد تقرير بحث صغير. وينبغي أن يكون اثنان منهما من ذوي الخبرة العميقة، أما الآخرين فيمكن أن تكون خبرتهما محدودة نسبياً. اطلب من كل واحد منهم كتابة خطة درس حول موضوع في رياضيات المدرسة الثانوية. وحاول أن تجعلهم يعملون جميعاً على نفس الدرس، إذا أتيحت لك فرصة مناسبة، وبعدئذ راقب كلا منهم وهو يقوم بمهام تعليم الدرس المعد، شريطة أن تكون خطة الدرس بين يديك. اكتب نقداً حول الدرس وخطته بناء على المعلومات التي استفدتها من هذا الفصل. (شريطة أن تقطع وعداً بعدم مشاركة النقد الذي أعددته مع أي شخص، وانك ستقوم بإتلافه بعد استخدامه في هذا المشروع).

18. لكل من الموضوعات الآتية اكتب واجباً بيتياً محدداً لصف بقدرات متوسطة. تستطيع استخدام أي كتاب

منهجي مناسب بمادة الرياضيات لكي يعينك في عملك. وحاول أن تعد تدبيرات احتياطية لكل من نهايتي طيف القابليات في هذا الصف.

أ. الدرس الأول حول الصيغة التربيعية.
ب. الدرس الأخير قبل اختبار حول متوازيات أضلاع خاصة.
ج. الدرس الأول حول ضرب الأعداد ذات العلامات.
د. الدرس الأول حول قانون الجيب.
هـ. درس حول العامل المشترك الأعظم للسنة الثامنة.
و. الدرس الأول حول نظرية فيثاغورث (هندسة المدارس الثانوية).
ز. الدرس الأول حول القياسات المترية (السنة السابعة).

19. افترض انك تقوم بتعليم مادة الرياضيات لصف بمدرسة عالية. وقد طلب المدير من هيئة التعليم تحديد مشروع — قصير الأمد لكل صف. صف المشروع الذي سيقوم طلبتك بإجرائه في كل من المقررات الآتية. وناقش بعدئذ كيفية معالجتك لهذا المشروع مع طلبة الصف.
حاول أن تضمن في مناقشتك مقدار الوقت الذي تخصصه له، من وقت الدرس، وتوزيع العلامات، والعقاب الذي يوازي الفشل في إجراء المهمة الجديرة بالإكبار، أو الفشل تماماً في إنجازه، والاستخدامات لأي طالب بحث ينبغي وضعها (أنشطة متابعة).
أ. الجبر الأولي.
ب. جبر السنة الثانية.
ج. حساب مثلثات.
د. الهندسة.

20. استجب لمبررات الطالب الآتية في عدم إنجازه الواجب البيتي:
أ. "لم يكن لدي وقت كاف الليلة الماضية، وذلك لوجود واجبات بيتية كثيرة في موضوعات أخرى".
ب. "عملت خارج وقت المدرسة ولم يتوفر لدي وقت كاف لإنجاز الواجب البيتي".
ج. "كان علي إجراء المزيد من العمل البيتي – اليومي، مع رعاية اخوتي واخواتي الصغار بعد انتهاء المدرسة، ولم يتوفر لدي وقت كاف لإنجاز واجبي البيتي".
د. "لم أفهم الواجب البيتي".
هـ. "نسيت استنساخ واجبي البيتي — المحدد يوم أمس".
و. "فقدت (1) دفتر الواجبات، (2) كتاب المنهج، (3) الواجب البيتي الكامل".
ز. "لم اعمل على واجبي البيتي".
ح. "قمت بحل الواجب البيتي — الخطأ وقمت برميه بعيداً هذا الصباح عندما اخبرني أحد رفاق الصف بأنني قد قمت بحل الواجب الخطأ".
ط. "لقد نسيت أن لدي واجباً بيتياً يوم أمس".

21. اختر وحدة دراسة في المنهاج الدراسي بالمدرسة الثانوية واعد واجباً بيتياً للمراجعة.

22. اعد ثلاث واجبات كشف بيتية محددة. تستطيع اختيار أية ثلاث موضوعات من المنهاج الدراسي لرياضيات المدرسة الثانوية.

23. بين الموضوعات التي ستكون مفيدة في المراجعة خلال "اللولبية" في الواجب البيتي — المحدد في كل من المساحات الآتية:
أ. الدرس الأول في التحليل العاملي لمتعددات الحدود.
ب. درس حول مساحة شبه المنحرف.
ج. درس حول صيغ الاختصار (الزاوية العامة) في المثلثات.
د. درس حول حل المعادلات بالدرجتين الثالثة والرابعة وتحتوي على جذور نسبية وغير نسبية.
هـ. درس تقديمي على الأعداد غير النسبية في الجبر الأولي.

24. اعد مسألة إثرائية لغرض تضمينها في واجب بيتي محدد حول كل من الموضوعات الآتية:
أ. ضرب وقسمة أحاديات الحدود في الجبر الأولي.
ب. العمليات مع الأعداد المركبة في جبر السنة الثانية.
ج. برهنة تطابق المثلثات في الهندسة المستوية.

25. اختر أي موضوع من رياضيات المدرسة الثانوية وبين كيف إن الواجب البيتي المحدد لغرض تهيئة الصف لاختبار وحدة يختلف عن الواجب البيتي المحدد بمكان آخر في الوحدة.

26. استجب إلى شكاوي الطلبة الآتية:
أ. "لقد أعطيتنا الكثير من الواجب البيتي".
ب. "الواجب البيتي صعب جداً".
ج. "بقية المعلمين لا يعطوننا واجباً بيتياً في نهاية الأسبوع".
د. "لقد قمت بجمع واجبي البيتي ثلاثة مرات هذا الأسبوع ولكنك لم تقم بتناول واجب؟؟ ولو لمرة واحدة!"
هـ. "قمت بحل واجبي البيتي في كراس بغلاف سميك وكان علي أن أفرقه من الكراس مما افقدني جميع محتويات الكراس".

و. "لم تمر بالمسائل في الصف بحيث لم استطع فهمها".
ز. "لم تطالع الواجب البيتي الذي سلمته لك، وكان كل ما فعلته هو وضع إشارة عليه فقط".

27. اعد استفتاء يديره اثنتا عشر معلماً لمادة الرياضيات، كحد أدنى، والذي ستطرح خلاله الأسئلة الآتية:
أ. ما مقدار حاجة الطلبة إلى تكرار الواجبات اليومية؟
ب. ما هو نوع الواجبات المحددة المطلوبة؟ وما هي طبيعة الأسئلة المطروحة؟ وكم تستغرق هذه الواجبات؟
ج. هل يتم إعداد الواجبات المحددة على أساس، يومي، أو أسبوعي، أو شهري؟
د. هل يتم تدقيق الواجبات المحددة بواسطة المعلم أو بواسطة طلبة آخرين؟
هـ. كيف تتم مراجعة الواجبات المحددة لتحديد تمامها ونوعيتها؟
و. ما هي الصيغة المطلوبة لهذه الواجبات المحددة؟
ز. هل يقوم المجيب Respondent بتحديد مشاريع بحث أو مقالات الفصل الدراسي في درس الرياضيات؟

بعد أن تقوم بجمع الاستفتاءات، بعد اكتمال العمل عليها، ابدأ بتحليل الإجابات للوقوف على إمكانية وجود اتفاق بين المجيبين حول أي من الأسئلة المطروحة، أو وجود عدم اتفاق بصدد أمر محدد أثير ضمن الاستفتاء. ماذا تستطيع استنتاجه من هذا التحليل؟

28. علق على الملاحظة الآتية الصادرة عن معلم إلى عميد الانضباط:

وجدت فرانك Frank يغش في الاختبار، لذا فقد قمت بتمزيق ورقته. وقد قام بشتمي وتوعدني بشدة، بعدئذ خرج مسرعاً من الصف في منتصف الفترة. اعتقد بضرورة فصله من المدرسة.

29. استلم الطالب بطاقة تقريره والتي تؤشر على وجود غياب لديه بمادة الرياضيات لفترة 23 يوماً، فنجم عن ذلك حصوله على درجة رسوب بالمادة، نظراً لان القانون بالمدرسة يأمر برسوب الطلبة الذين تزيد غياباتهم على إحدى وعشرين يوماً. يلجأ الطالب إلى إنكار غيابه بشدة لهذه الأيام، كما وأن بقية المعلمين لم يثبتوا مثل هذه الغيابات. كيف ستعالج هذه الحالة؟

30. أخبرك مستشار إرشاد المدرسة بأن هناك ثلاثة طالبات يردن الانتقال من صفك بسبب وجود الكثير من الضوضاء بالغرفة وأنهن لا يستطعن التركيز على الدرس. ما هي طبيعة رد فعلك؟

31. وردتك ملاحظة من معاونة المدير تدعوك بالحضور إلى مكتبها لتوضيح سبب التأخير الدائم في تقديم سجلات الحضور، ولماذا يتجول طلبتك باستمرار من غرفة البيت Homeroom ويلاحظون في ممرات الرواق. ما هي بعض التوضيحات التي تستطيع الدفاع عنها؟

32. قام المشرف بتحذير معلم بسبب تأخيره المستمر بالقدوم للصف. كانت استجابة المعلم:

إن كلاً من الواجب البيتي — المحدد، وأنجز – الآن موجودة على الدوام على اللوحة (من الدروس المبكرة) قبل ابتداء فترة الدرس، ويعرف الطلبة تماماً أين يضعون الواجب البيتي وراء السبورة، ولدي طالب مراقب ممتاز يقوم بأخذ الحضور، لذا ليس ثمة فارق بين حضوري مبكراً أو تأخيري لفترة دقيقة أو دقيقتين.

33. سألك أحد طلبتك بالسماح له في مغادرة الصف، ولسبب من الأسباب، سارعت برفض طلبه. وقد أصر على "ضرورة المغادرة"، وبعد حصول مشادة كلامية بينكما، نهض واقفاً وغادر الصف. كيف ستتعامل مع هذا الموقف عند عودته؟

34. يلاحظ بضعة معلمين، بين الحين والآخر، تكرار أحد طلبتهم القيام بالعمل على درس آخر خلال درس الرياضيات، رغم تحذيره بعدم القيام بذلك.
تظهر أدناه الطرق المقترحة لمعالجة المعلمين لهذه الحالة.
ما هي ردود أفعالك تجاه كل حل من هذه "الحلول"؟
أ. تم مصادرة المادة وإتلافها.
ب. نوقشت الحالة مع معلم تلك المادة.
ج. تم إعلام والد الطالب.
د. تم إعلام المدير.
هـ. طرد الطالب خارج الصف.

35. لدى معلم فترة تحضير تلي مباشرة السنتين السابقتين لصفوف السنة الأولى بمادة الجبر. ومن أجل هذا فانه يلجأ إلى إعداد واستنساخ الاختبارات والامتحانات السريعة لهذه الصفوف خلال هذه الفترة. ويشعر المعلم بأن هذا الفعل يزيد من أمن هذه الامتحانات. ما هي بعض النقاشات التي تتفق مع هذه الطريقة أو تختلف معها؟

36. علق على المعالجة الآتية لمسألة الانضباط: إذا أصرت طالبة على إثارة الشغب بصفك، فأبعدتها خارج الصف والى صف بمادة الرياضيات يؤدي بمستوى أداء اقل بكثير (وبترخيص من معلمين آخرين).

37. افترض أن طالباً في المرحلة التاسعة بمادة الرياضيات يعمد باستمرار وبإصرار إلى إزعاج الطلبة المحيطين به. وتذهب الطلبات المستمرة للتوقف عن هذا النشاط المزعج سدى ودون اهتمام. بين بعض الخطوات التي ستقوم باتخاذها لإيجاد سبيل لمعالجة هذه الحالة. وبرر استجاباتك.

38. اسأل مستشار قسم الرياضيات مناقشة إدارة الصف خلال جزء من لقاء القسم والذي ستشارك به بصفة مسجل. وبعد هذا اللقاء، اكتب تقريراً لتلخيص أهم موضوعاته، مؤشراً نحو الأساليب الخاصة بإدارة الصف كما تحدث عنها المعلمون خلال اللقاء.

39. قم بتهيئة شريط فيديو لمادة الرياضيات التي ستقوم بتعليمها. وادع بضعة معلمين، من ذوي الخبرة أو ممن يفتقرون إليها لمعاينة شريط الفيديو وإبداء ملاحظاتهم إزاء تقانات إدارتك للصف. قم بتلخيص الملاحظات المطروحة خلال معاينة شريط الفيديو.

40. لاحظت مدرسة بأنه في بعض مجاميع التعلم التعاوني بصفها هناك طالب لامع يقوم بإنجاز جميع العمل. ما هي بعض التقانات التي يمكن أن تستخدمها لمنع حصول هذا الأمر؟

41. تلقيت مكالمة هاتفية من أب غاضب لأحد طلبتك اللامعين. وكانت شكوى الأب تدور حول تراجع ولده بسبب اضطراره إلى مساعدة الطلبة الضعفاء بمجموعته. كيف ستستجيب لهذا الأب؟

42. لاحظت المدرسة بان أحد الطلبة محدودي القابلية لا يشارك في مجموعته. كيف ينبغي على المدرسة معالجة هذه الحالة؟

43. قم بتصميم تعليم تعاوني لدرس استكشافي والذي سيمكن الطلبة من صنع تخمين يخص العلاقة القائمة بين زوايا المثلث الثلاثة.

44. أدرك مدرس بان مجموعة من المجاميع التعاونية في صفه لا تعمل بصورة فعالة، لذا قد قرر تغيير صيغ المجموعة عند نهاية الوحدة. ما هي الإجراءات التي يستطيع استخدامها لإعادة تشكيل المجاميع بأفضل طريقة ممكنة؟

45. صف ثلاثة خصائص للطلبة ينبغي على المعلم اعتبارها عند إعداد مجموعة هجينة.

46. ما هي مهارات إدارة الخلافات التي يفتقر إليها أعضاء مجموعة تعلم تعاوني — مؤثر؟

47. قدمت طالبة تقريراً بان مجموعتها تعمل بصورة جيدة جداً، ولا توجد خلافات أو نقاط عدم اتفاق. كيف ستعالج هذه الحالة؟

48. صف بعض الطرق والتي يستطيع بواسطتها المعلم مراقبة تقدم مجاميع التعلم التعاوني.

49. قم بتصميم درس سيمكن أعضاء فرق التعلم التعاوني على اكتشاف أن مجموع جذور معادلة بصيغة:
$ax^2 + bx + c = 0$ هو $-b/a$ وان حاصل ضرب هذه الجذور هو c/a. افترض إن الطلبة يستطيعون حل مثل هذه المعادلة التربيعية بأسلوب التحليل العاملي أو بواسطة صيغة.

50. يظهر أدناه وصف هزيل لهدف الأداء:
يجب أن يكون الطالب قادراً على فهم قانون جيوب التمام.
بين فيما إذا كانت أسئلة الاختبار الآتية مناسبة لاختيار مدى تحقيق الهدف من عدمه:
أ. اشتق صيغة لقانون الجيوب، لمثلث حاد أو منفرج.
ب. لديك المثلث ABC وقياس b , a والزاوية $\angle C$. قم بحل المسألة بدلالة c مقرباً إلى اقرب مرتبة عشرية.

51. افترض قدوم المستشارة إلى الصف الذي تقوم بتعليمه، ورغبتها بالاطلاع على أهداف الأداء التي يتوقع بلوغ الطلبة لها خلال الأسبوع الماضي. بعد ذلك قامت باختيار عشوائي لمجموعة من التلاميذ لاختبارهم في ضوء الأهداف.
أ. هل أن هذا الأسلوب يعد منصفاً في تقييم الفاعلية؟
ب. هل ستقوم باختيار أهداف — بمستويات متدنية— من الآن فصاعداً لضمان فرصة أفضل لعرض نجاح طلبتك؟
ج. هل تعتقد بان معرفتك في قيام مستشارك بتكرار هذا

الأمر دورياً سوف يحدو بك أن تكون معلماً أكثر تأثيراً؟ برر إجابتك !

52 اكتب قائمة باثنتي عشر فعلاً Verbs والتي تمتاز بكونها غامضة جداً وغير واضحة عند استخدامها في عبارة أهداف الأداء. ثم اكتب اثنتي عشر فعلاً آخر والتي لا تعاني من الغموض واللبس، والتي يمكن استخدامها في بيان أهداف الأداء بوضوح.

53 تظهر أدناه أربعة أهداف للأداء (ليس من الضروري أن تكون جيدة). اكتب سؤالين تختبر من خلالهما كل هدف لتحديد مدى تحقيقه من عدمه. كذلك وضح هل أن كل هدف من الأهداف قد تمت صياغته بصورة جيدة:

أ. سيقوم التلاميذ ببيان حقل Domain ومدى دالة معلومة تصف شكل الدالة.

ب. سيفهم الطلبة كيفية حل المعادلة التربيعية بأسلوب "إكمال المربع Completing the square".

ج. سيقوم الطالب بتعريف متوازي الأضلاع، والمستطيل، والمربع، والمعين.

د. سيدرك الطالب إدراكاً كاملاً موضوع "الاستدلال غير المباشر" في الهندسة.

الملحق Appendix B
تخصيص (إعطاء) الواجب البيتي
Assigning Homework

بما أن اغلب دروس الرياضيات تتطلب متابعة مستمرة من الطلاب لتحسين وصقل مهاراتهم المكتبية حديثاً، ينصح بان يكون التخطيط لإعطاء الواجب البيتي دقيقاً وحذراً، وان يكون متضمناً في خطة الدرس، والسبب الثاني لإعطاء الواجب البيتي هو لتحسين الاعتماد الذاتي ولتطوير مهارات التأمل والتفكير الخلاق. ولغرض تحقيق هذه الغايات فان كل واجب ينجزه الطلاب يأمل أن يكون مرتباً ومنظماً ودقيقاً وعلى اكمل وجه ممكن.

ويجب أن تتم مناقشة كل واجب بيتي في الصف في اليوم التالي ويراجع كجزء من فعالية مجموعة كبيرة أو صغيرة. وحتى يمكن أن يجمع من وقت لآخر كي يقرأه ويحلله المعلم. تكون تحليلات المجموعة الصغيرة أو الصف كله ملائمة لمختلف أنواع الواجبات ويجب على المعلم أن يتخذ هذا القرار، فليست هناك صيغة لطريقة (استراتيجية) أفضل. وقد كرست بقية هذا المبحث لطبيعة أو ماهية إعطاء الواجب البيتي. ويتضمن الواجب البيتي الأسبوعي أو طويل المدى عادة خطط (مشاريع) تتطلب تراكيباً خاصة يحددها المعلم. وتتطلب أوراق الواجبات اليومية التي توزع قبل بداية الدرس تخطيطاً كثيراً ويحتمل احتياجها إلى بعض التعديلات خلال مسيرة الفصل الدراسي.

لماذا إعطاء الواجب البيتي؟

Why Assigning Homework؟

توجد عدة أسباب لإعطاء الواجب البيتي بصورة منتظمة لدرس الرياضيات. وربما يكون السبب الأكثر أهمية هو إعطاء كل الطلاب دوراً فاعلاً في العلمية التعليمية. ويعتقد بعض المثقفين انه بالرغم من إن الصف قد يعطى مناخاً تعليمياً فاعلاً، فان (التعليم الفعلي) يحدث عندما يعمل الطالب وحده بسرعته الخاصة خارج الصف. ولا يعني ذلك التقليل من أهمية العلمية التعليمية الصفية. وإنما التأكيد على أهمية إعطاء الواجب البيتي. وفي الصف يعطي المعلم معلوماته بصورة عامة على وفق مستوى الطالب المتوسط مع بعض التكيفات للطالب الأضعف والأقوى، وقد يبقى هناك العديد من الطلاب الذين لا تناسبهم خطوات تقديم المعلومات بصورة دقيقة جداً. وقد يخدم التعليم الصفي هؤلاء الطلاب كونه صيغة (تركيبة) لتعريضهم لمادة جديدة، في حين يوفر الوقت الذي انفق على الواجب البيتي التجربة (الخبرة) التعليمية الأصيلة.

وتمنح الواجبات البيتية الطلاب فرصة للحصول على فهم أوسع للموضوعات والمفاهيم التي درست في الصف، وتمنحهم كذلك شكلاً لتحليل اعمق للموضوع ذات الصلة. وهذا مما تندر إمكانية حصوله في الصف، حيث يكون المعلم سائراً بخطوات محددة سلفاً. ويعطي الواجب البيتي الوقت للطلاب للتفكير في الواجب بسرعتهم الخاصة لكي يمكن للعمل الخلاق أن يتولد من خلال المشاريع الخاصة والدراسة المستقلة.

السبب الآخر المهم لإعطاء الواجب البيتي هو تحفيز الطلاب للتعلم أكثر. وأن السماح بالتوسع لما قد تم تعلمه في الصف قد يمنح الطلاب رغبة بزيادة معرفتهم. ويمكن للمعلم بين فترة وأخرى أن يلمح لدرس اليوم التالي. ويجعل الطلاب يعملون على مثل هذا النوع من الواجبات المعدة بعناية في البيت حيث يمكنهم العمل بمفردهم على تطوير الرغبة الحقيقية للمضي قدماً في مجال الدرس

إن أحد الأسباب الأكثر شيوعاً لإعطاء الواجب البيتي ربما يكون توفير التمرين للمهارة المطورة حديثاً. وإذا ما خطط له بصورة صحيحة، فان مثل هذه الأمثلة للمهارات الضرورية يمكن أن تكون فاعلة جداً. ولسوء الطالع، فان مثل هذا النوع من الواجب يساء استخدامه في الغالب. فعندما يستخدم كعقاب لسبب تأديبي فان إعطاء مثل هذا الواجب البيتي لا يصبح بلا فاعلية فحسب وإنما قد يصبح ذو نتاج معاكس.

لا يتطلب الأداء التعليمي الفاعل والمخطط له بشكل جيد عادة الأخذ بعين الاعتبار مسألة التأديب (الإطاعة). وعلى أية حال فان التعليم الضعيف الذي غالب ما يزيد المشاكل التأديبية يتحطم أكثر بتخصيص واجب بيتي عقابي يعطى لحل تلك المشاكل التأديبية.

إن إعطاء الواجب البيتي يعد جزءاً تكاملياً من العلمية التعليمية كلها ويجب أن يعالج بالتالي بصورة صحيحة. وما تبقى من هذا المبحث قد رتب لإعطاء فرصة للمعلم للتركيز على النواحي المفتاحية عند إعطاء الواجبات البيتية، ومن ثم تكوين خطة شخصية.

ما الذي يجب أن يتضمن في إعداد تخصيص الواجب البيتي؟

What Should Be Involved In Preparing The Homework Assignment?

من المفيد لكل من المعلم والطلاب توقع أو تخمين الواجب البيتي. ويجب على المعلم كجزء من التحضير للدرس والواجب البيتي أن يقوم محل التمارين المعطاة كواجب للطلاب. ولن يكون هذا نافعاً أكثر في تحديد الوقت المطلوب بدقة من الطلاب للحل حسب، ولكنه سيساعد كذلك في تمكين المعلم من تنبيه الطلاب حول مكامن المشكلات المتوقعة في الواجب البيتي قبل أن يواجهوها في البيت. وهكذا، وبأخبار الطلاب سلفاً ما سيكون منهم بالنسبة للواجب البيتي، يجعل المعلم الواجب جزءاً أكثر معنى في العملية التعليمية برمتها.

كيف يجب أن تكون طبيعة (ماهية) إعطاء الواجب البيتي؟

What Should Be The Nature Of The Homework Assignment ?

هناك العديد من أنواع إعطاء الواجبات البيتية المكنة لدروس الرياضيات. وليست الواحدة أفضل من الأخرى بالضرورة، كما يجب أن يحدد محتوى الدرس وطبيعة نوع الواجب البيتي. وربما يكون المفهوم المفتاحي الذي يجب أن نضعه في أذهاننا عند التحضير لإعطاء الواجب البيتي هو (التنويع Variety). ومن المحتمل أن تكون الرتابة هي العامل الرئيس الذي يؤدي بالطلاب إلى ترك الواجب البيتي والتخلي عنه. يجب على المعلمين المحاولة لإعطاء مختلف أنواع التمارين. فمثلاً، يجب أن تتضمن بعض أنواع التمارين التي سيتم اختيارها تمارين ممارسة، ومسائل شفوية، وبراهين، وتمارين تركيبية (بنائية)،

وأسئلة فكرية، وتطبيقات على مفاهيم ومبادئ تم أخذها حديثاً، ثم قراءة الواجبات. ويحتاج الواجب المقروء وخصوصاً في درس الرياضيات تحفيزاً كبيراً للطلاب لان الواجب الشفوي يحتمل أن يحذف، أو أن يكون في حكم غير الضروري عند الطلاب.

وفضلاً عن تنويع أنماط التمارين المقدمة، فيمكن أن تتنوع التمارين في طبيعتها كذلك. فعلى سبيل المثال يمكن أن يكون القصد من أحد التمارين بشكل كلي المراجعة للمادة التي تم دراستها سابقاً، في حين يمكن أن يشتمل آخر على أسئلة استكشافية "Discovery questions". وقد تشمل مختلف أنواع التمارين في واجب المراجعة. ويمكن أن يقدم الواجب ببساطة التمارين التي تراجع عمل الدروس السابقة، أو قد توفر التمارين التي ستساعد الطلاب على المراجعة لاختبار حول كامل الوحدة (الفصل Unit).

وقد يتضمن نوع آخر من إعطاء الواجبات البيتية مدخلاً استكشافياً (Discovery Approach). وهنا يعطى الطالب سلسة من التمارين التي تلقي الضوء على الدرس القادم، أو اللاحق. وترتب الأسئلة عادة بنظام يتيح للطالب أن يكتشف فكرة جديدة بعد إكمال سلسلة التمارين. وفيما يأتي أمثلة على هذا النوع من التمارين.

مثال:

قد يشمل الواجب البيتي السابق تماماً النقاش حول علاقة المنحنى بين خطين متوازيين وخطين متعامدين على ما يأتي:

1. استخدم شكل تقاطع المنحنى لمعادلة الخط المستقيم لتحديد منحنى كل خط، بعدها استخدم آلة حاسبة رسومية لرسم كل زوج من هذه الدوال:

(a) $y = 2x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x + 3$

(b) $y = \frac{3}{5}x + 2$, $y = -\frac{3}{5}x - 2$

(c) $y = -\frac{3}{5}x + 2$, $y = -\frac{3}{5}x + 1$

(d) $5x + 3y = 5$, $5x + 3y = 15$

2. أي خطين يبدوان متعامدين؟وما العلاقة بين منحنياتها؟
3. أي الخطوط تبدو متوازية؟ وما العلاقة بين منحنياتها؟
4. ضع جملة عامة تخص منحنيات الخطوط المتوازية والمتعامدة (على أساس التمرين الجاري).

تعطي مجموعة التمرين هذه مراجعة للمهارة المتعلمة سلفاً، وبعدها تتطلب من الطالب إعطاء تعميمات بسيطة من التفاصيل المقدمة.

مثال:

يمكن أن يتضمن الواجب البيتي لما قبل إعطاء التماثل الفيثاغوري لدرس تشابه اوجه المثلثات على ما يأتي:

- استخدم حاسبة علمية لإكمال الجدول التالي.
- استخدم العلاقات التربيعية حيثما أمكن.

θ	sinθ	cosθ	$\sin^2θ$	$\cos^2θ$	$\sin^2θ+\cos^2θ$
30					
45					
60					
50					

ما هي القواعد العامة التي يمكن أن تصح عن $\mathrm{Sin}^2θ + \mathrm{Cos}^2θ$؟

ورغم أن إكمال الجدول يجب أن يكون بسيطاً نسبياً للطلاب فانه يجب أن يقودهم لاكتشاف علاقة ذات أهمية.

ومن أحد الأنماط الأكثر شيوعاً لتخصيص الواجب البيتي هو ما يسمى غالباً بالواجب (المحلزن Spiraled) لأنه يعود بشكل حلزوني على المادة التي تم تعلمها سابقاً. ولربما تعود شعبية هذا النوع إلى قدرته على تلبية وظائف إعطاء واجبين بيتيين. وفضلاً عن تمكينه الطلاب من تعزيز تعليم الصف الحالي فانه يوفر مراجعة للموضوعات التي تمت دراستها سابقاً. فعلى سبيل المثال، افترض انك تخصص واجباً بيتياً بعد درس عن (قياس الزاوية بالدائرة) في مدرسة هندسة ثانوية.

وكجزء من هذا الواجب يمكن أن تضمن تمريناً يراجع التشابهات، وآخر برهان يتضمن متوازي الأضلاع، وآخر تركيباً أو بناءاً. وبصرف النظر عن الموضوعات السابقة التي ستنتخب لكي تدرج في التمرين البيتي، ويجب أن يكون الاختيار بأسلوب منظم ومرتب.

ومن إحدى الطرائق المقنعة لحلزنة إعطاء الواجب البيتي هي برسم تواريخ الواجب في الهامش المجاور للتمارين في نسخة الكتاب المنهجي للمعلم. وهذا سيساعد في الحفاظ على سجل لكل مادة تم إعطاؤها كواجب بيتي من عدمه. وتعتمد درجة ومدى الحلزنة على الحاجات الخاصة لكل صف. وتعزز هذه الإضافة فكرة أن خطط الدرس (بضمنها إعطاء الواجب البيتي) يجب أن لا تستخدم من سنة لأخرى بدون إجراء تعديلات ملموسة لكل درس.

ويمكن استخدام عدة أنواع أخرى من تخصيصات الواجب البيتي لدرس الرياضيات. ويمكن أن تشمل هذه التجارب البيتية لبعض المبادئ الرياضية (مثلاً، إلقاء العملة المعدنية لحساب الاحتمالات عملياً). والمقالات القصيرة عن أشهر الرياضيين، أو بعض الجوانب الوصفية لتاريخ الرياضيات (مثلاً، كيف قاس ارسطوثين محيط الأرض)؛ والواجبات المكتبية (مثلاً إيجاد اصل الرمز $\sqrt{\ }$ أو الاستخدام الأول للحرف π ليمثل معدل أو نسبة المحيط الدائري إلى قطره).

وأياً كان الواجب الذي يختاره المعلم لاستخدامه في موقف معين فان مفتاح النجاح هو التنويع Variety. ولا يجب أن يكون التنويع في أنواع التمارين فحسب، وإنما يجب أن يملي الموضوع نوع الواجب وان يغير لذلك كلما دعت الحاجة. وبالرغم من ان بعض المعلمين يخصصون الواجب البيتي الذي يتكون من خليط من أنواع الواجبات البيتية. إن مثل هذه الواجبات لمثل هؤلاء المعلمين تقرأ ببساطة مثل (حل ص 353 المثال 1-29 الأرقام الفردية فقط). ولن يمر وقت طويل على الطلاب ليتصرفوا بالمثل (أو يردوا بالمثل) على هذا النوع من التخصيص في الواجبات البيتية. والنتيجة هي فوات الفرصة لتحقيق التعليم المعنوي (المفيد Meaningful leaving) في الرياضيات خارج الصف. تذكر بان احتياجات الصف تحدد نوع التمرين، أو الواجب البيتى الذي يجب أن يعطى للطلاب.

كم من العمل يجب أن يتطلبه كل لواجب؟
How Much Work Should Each Assignment Require?

ان الجواب على هذا السؤال يجب أن يختلف تبعاً لكل جمهور معين. ونستطيع الإجابة على هذا السؤال فقط بتوفير الخطوط العامة لوضع وترتيب طول الواجب المناسب لصف معين.

وسيكون لكل واجب بيتي أهدافاً معينة مبنية على حاجات الدرس. والبراعة في إعداد الواجب المناسب هي تحقيق الأهداف بأقل كم من وقت العمل للطلاب. ويجب أن لا يكون هناك تكرار غير ضروري أو يقلل على اقل تقدير. ويجب أن يتم انتخاب التمارين بعناية بحيث يكون محل واحد ذو فاعلية كبيرة في تلبية تحقيق الأهداف لواجب بيتي معين.

ان الطلاب حاذقين في إدراك متى يكون الواجب ذو وقت كاف، ومتى يكون محملاً بمادة زائدة. وإذا ما كان الواجب أو التمرين مكرراً دائماً فيمكن أن يشعر الطلاب بالملل بسرعة ولا يتحفزون لحله. ونتيجة لذلك فربما يقومون بحله (كثير لا بد منه) أو لربما يستنسخونه من أحد الزملاء في الصف ثم يسلمونه. ومن الطبيعي أن يؤدي هذا الأمر إلى إهدار وقت الطلاب من غير أو القليل من الإنجاز في التعليم. ولهذا يجب أن يكون التخصيص للواجب البيتي موجزاً ومغطياً بصورة صحيحة للمحتويات المطلوبة بأقل وقت ممكن.

من الصعب تحديد سقف زمني لواجب الرياضيات البيتي. ومن الواضح أن معلم الرياضيات سيفضل إعطاء الصف واجباً بيتياً أطول ليتأكد فقط من أن كل شيء قد تم تغطيته بالكامل. ولكن عليه أن يتذكر إن الرياضيات إنما هي مادة واحدة فقط من بين عدة دروس ينبغي على الطالب دراستها. ولذلك يجب أن يكون الوقت المخصص لواجب الرياضيات البيتي عموماً بمعدل نصف ساعة للواجب الواحد (وهذا مجرد خط عام يمكن تغييره تبعاً لكل ظرف معين أو خاص)

هل يجب إعطاء جميع الطلاب العمل نفسه؟
Should All Students Be Assigned The Same Work ?

مرة أخرى (وبمجازفة التكرار) يعتمد جواب هذا السؤال على نوع المعلم الذي يقصد إليه إعطاء الواجب البيتي. فإذا كان الصف متجانساً طبقاً لقابليات وإنجازات الطلاب الرياضية، فعندها ربما يكون الواجب البيتي الموحد بجميع الصف مناسباً. وفي واقع الأمر ليس بجميع الصفوف عموماً هذا النوع من التركيب الموحد. ولذلك قد يكون من الأفضل البحث عن بديل للواجب الواحد.

إن التعليم والإرشاد الأفضل ينصح به حسب الحاجات الفردية لكل طالب. ولسوء الطالع، ليس من الأمر العملي في شيء تلبية مثل هذا الهدف المرجو في صفوف المدارس الثانوية النظامية (الاعتيادية). ولربما تكون إحدى الطرق المتعددة للوصول إلى مثل هذا الهدف من خلال إعطاء الواجب البيتي. ويوفر إعطاء الواجب البيتي وسيلة مفيدة لتعديل وتنظيم تعليم الصف لتلبية الاحتياجات الفردية للطلاب.

ويمكن إعطاء واجبات تعزيزية خاصة للطلاب الأكثر إمكانية والذين يمكن عندها إعفاءهم من بعض الأمثلة أو تمارين المراجعة. ومن جهة أخرى، يمكن إعطاء الطلاب الذين يحتاجون أمثلة ومراجعة أكثر لمهارات ضرورية معينة تمارينا مخصصة لهذا الغرض. ولا يجب أن يهمل معلم الرياضيات هذه الفرصة الدقيقة لجعل جزء على الأقل من العملية التعليمية فردياً.

كم مرة يجب أن يتكرر إعطاء الواجب البيتي؟
How Frequently Should Homework Be Assigned ?

بما أن إحدى الوظائف الأساسية لإعطاء الواجب البيتي هي

تعزيز تعليم الصف، فان إعطاءه يجب أن يتبع كل درس صفي. ومن الطبيعي أن لا تتطلب بعض الدروس واجباً تبعياً. عندها يمكن عدم إعطاء واجب بيتي أو حتى واجب مراجعة.

يعتقد بعض المعلمين انه ليس من الضروري إعطاء واجب بيتي عند عطلات نهاية الأسبوع. ويقول البعض الآخر إن الواجب البيتي يجب أن يعطى أربعة أيام من كل خمسة أيام على أن يتنوع اليوم الذي ليس فيه أي واجب على وفق الاحتياجات التعليمية للصف. إن كلاً من هاتين الخطتين العقلانيتين لا تخلو من الفخاخ. ومن المستحسن في الغالب ابتداء المنهج الدراسي بوجهة نظر صارمة اخذين بالحسبان تكرار الواجب البيتي وبعدها إجراء بعض التعديلات حيثما يكون ذلك مناسباً، خير من البدء بـ(وعود) بعدم إعطاء واجب بيتي وبعدها تخلف هذه الوعود عندما تتطلب الاعتبارات التعليمية تغييراً باتجاه تكرار الواجب البيتي أكثر فاكثر. ويرحب الطلاب دائماً بالتغيير نحو مسيرة أكثر تساهلاً من فعل العكس.

ويمكن أن يشير السؤال عن تكرار إعطاء الواجبات البيتية إلى عدد التكرارات التي يقدم بها الواجبات إلى الصف. فهل يجب أن تعطى إلى الصف على أساس يومي، أو أسبوعي، أو نصف شهري، أم شهري؟ ومرة أخرى يجب أن يحدد المعلم أية استراتيجية (أو خليط من الاستراتيجيات) هي الأفضل تلاءماً لدروسه أو أسلوب تعليمه للطلاب. وربما يكون هناك عدد متساوي الجودة من النقاشات للعديد من الخطط.

وربما سيذهب أولئك الذين يفضلون تخصيص الواجب البيتي على أساس يومي في النقاش إلى ان هذه هي الطريقة الوحيدة التي يمكن بها،وبانتظام، تكييف الواجب البيتي للمتطلبات التعليمية. وفي كل يوم يخطط لدرس جديد (مبني على الخبرة من الدرس السابق) يحضر واجب جديد لإعطائه بناءاً على المتطلبات الآنية للطلاب. وتكون مثل هذه التخصيصات التمرينية الملائمة بالتحديد أصعب بكثير لإنجازها (إذا لم يكن مستحيلاً) عندما تعطى الواجبات بأسبوع كل مرة. وقد يجد المعلمون الذين خططوا لواجبات أسبوعية وأعطوها للطلاب بأن تبديلها غير مقنع، ولذلك قد لا يكونون ممتعضين من إجراء التغييرات المبنية على المتطلبات التعليمية فحسب وإنما قد لا يحاولون المسير في دروسهم (لدرجة معينة) لهذه الخطة المسبقة. خذ مثلا الحالة التي يجد فيها المعلم (منتصف الطريق في واجب الأسبوع) الصف بحاجة لبعض التمرينات التطبيقية على مهارة معينة. ويمكن أن يمتعض الصف من زيادة الواجب البيتي الذي يعطى في اللحظة الأخيرة. وقد تؤثر وجهة النظر السلبية هذه من الطلاب على الفوائد التعليمية المقصودة من هذا العمل الإضافي. وحتى لو تم حذف أو إسقاط بعض من الواجب البيتي السابق للتكيف مع وضع الواجب الإضافي الجديد فقد يبقى الواجب الناتج دون مستوى الفاعلية التي لو كان قد خطط له بالطريقة اليومية لتلبية الحاجات المستمرة والمتواصلة للدرس. وهكذا يكون للواجب المخطط له يومياً كفائدته الأساسية — القدرة على تلبية متطلبات الطلاب المقيمة بانتظام والمبنية على الخبرات الصفية وأداء الواجبات الصفية السابقة.

وعلى ما يبدو، تدعم النقاشات المقنعة بصورة متعادلة تخصيص الواجبات البيتية المخطط لها أسبوعياً. وهنا سيجادل المعلمون انه بتخصيص الواجب أسبوعياً (أو أكثر) لمرة واحدة، فإمكانهم التخطيط بصورة أفضل وكذلك حلزنة واجباتهم البيتية. ولسوف يقولون أن بإعطائهم الطلاب واجباً واحداً كل عدة أيام سيوفرون وقت الصف على خلاف إعطاء الواجبات الجديدة. أضف إلى ذلك، سيوضح مناصرو إعطاء الواجب أسبوعياً انهم بذلك يوفرون فرصة للطلاب الذين يتغيبون عن المدرسة لمتابعة زملائهم الباقين بشكل انسيابي.

وكذلك يمكن الواجب الأسبوعي الطالب من السبق في واجبه البيتي بتقدمه سلفاً أمام صفه (إذا استطاع ذلك). وهذه العملية لها فائدتين وسيئتين. فمثلاً إذا وجد الطالب انه —ولنقل– في يوم الأربعاء لن يكون له وقت لأداء الواجب البيتي، فلربما سيكمل واجبه (إذا استطاع) يوم الثلاثاء. ورغم ان هذه ليس بالممارسة المثالية، فهي أفضل من مجيئه يوم الخميس إلى الصف بلا تحضير. إن سيئة معرفة الواجب القادم (المستقبلي) هي فقدان عامل المفاجئة. فهناك فائدة تحضيرية لجعل الطلاب يكتشفون المفاهيم الجديدة. وبمعرفة خطط الواجبات المستقبلية سيعرف الطلاب كذلك أي المواضيع التي ستتم دراستها أو متى. وقد تكون إزالة هذا العامل الاستكشافي نقطة ضعف للخطة التعليمية.

إن السؤال حول تكرار الواجب البيتي —مثل البقية في هذا الفصل– لا يمكن إجابته إلا من قبل المعلم شخصياً. ونقدم النقاشات الرئيسة لمختلف المواقف ونترك الاختبار للقارئ. ومهما كان الاختيار فيجب أن تكون المبررات ثابتة تبعاً لشخصية المعلم وأسلوب التعليم وفلسفة وطبيعة الدرس.

متى يجب إعطاء الواجب البيتي؟
When Should Homework Be Assigned?

لربما يكون الوقت المثالي لإعطاء الواجب البيتي هو في تلك النقطة من الدرس حيث تقود طبيعياً إلى العمل الذي سيكون

واجباً. فمثلاً يمكن أن يقول المعلم (والآن بما أنكم تعرفون كيف تحلون معادلة ثنائية، جربوا ما يأتي كواجب بيتي). وعلى أية حال يمكن أن يقول البعض أن هذه الطريقة تقطع تواصل الدرس ومن أجل ذلك يجب تجنبها.

ومرة ثانية، وفيما يخص المعلم الذي يختار تخصيص الواجب يومياً. فليس هناك (وقتاً دقيقاً) معينا لتخصيص الواجب البيتي. أما أولئك الذين يقولون بتخصيص الواجب البيتي في بداية الدرس فهم يعتقدون إن الطلب من الطلاب كتابة واجبهم عند دخول القاعة يضمن انهم سيندمجون حالما يدخلون ولن ينسوا كتابة واجبهم.

وقد يقول البعض أن بتخصيص الواجب البيتي في بداية الدرس قد يفصح المعلم عن موضوع الدرس التالي وبذلك يقتل تأثير أو صدمة طريقة الاستكشاف. ومن الممكن كذلك انه عندما يعطى واجب في بداية الدرس فقد يبدأ بعض الطلاب بحله (خلال) الدرس (للتخلص منه مبكراً) وحسب، وكنتيجة لذلك يفوتهم العمل الجديد المقدم خلال الدرس. ويجب أن لا يشجع الطلبة على ذلك أبداً.

ويمكن أن يرد المعارضون بقولهم إن المعلم يمكن أن يصبح مندمجاً جداً بالدرس بحيث انه / أنها ينسى أن يخصص واجباً بيتياً أو لربما يعطيه للطلاب وجرس نهاية الدرس يدق والطلاب في عملية مغادرة الصف. ويمكن لهذا أن لا يعطي فرصة للمعلم لتوضيح الواجب البيتي للصف، فضلاً عن أن بعض الطلاب قد يفوتهم استلام الواجب لخروجهم بسرعة كبيرة جداً. وعلى أية صورة فان الواجب المستعجل غير مرغوب به.

وجواباً على ذلك، فان المناصرين لواجب نهاية الدرس يمكن أن يناقشوا بقولهم أن بتخصيص الواجب البيتي في نهاية الدرس سيكون المعلم قادراً على عمل التعديلات في الواجب المخطط له أصلا بناءاً على أداء الصف خلال الدرس من غير أن يعلم الطلاب ذلك. وبهذه الطريقة لن يكون هناك شعور غير مرض ناتج من جهة الصف.

هنالك العديد من النقاشات التي يمكن أن تقدم في سبيل (أفضل وقت Best Time) لتخصيص الواجب البيتي. وقد قدمنا وببساطة عينة من الخيارات المتاحة لكي يستطيع القارئ أن يتخذ القرار. ومهما يكن الوقت الذي يجده مناسباً أكثر له ولصفه يجب عليه مراجعة الواجب بعناية مع الصف. ويجب توضيح الأجزاء الغامضة ونقاط الصعوبة المحتملة. كما أن ذلك يجب أن يجعل الطلاب واعين ومدركين الغرض من تخصيص واجب بيتي معين.

كيف يجب أن يعد الواجب البيتي؟

How Should The Assignment Be Made ؟

إن إعداد الواجب البيتي يعتمد على الطريقة التي صمم بها الواجب. فإذا كان الواجب البيتي قد صمم على أساس أسبوعي عندها يجب أن يكون الواجب مكتوباً ومستنسخاً وموزعاً على الصف. ويمكن أن تحتوي ورقة الواجب النموذجية على رقم الواجب، وموضوع الدرس، والتاريخ، والواجب الفعلي، وبعضاً من نقاط الدرس المهمة التي يجب دراستها. وهناك ترتيب واحد ممكن مبين نموذج ورقة (الواجب البيتي الأسبوعي).

وفيما يخص الطلاب، فان مثل ورقة تخصيص الواجب البيتي هذه يمكن كذلك أن تخدم في توظيف تعزيز الأهداف الصفية. فضلاً عن أن هذه الورقة يمكن أن تفيد كنموذج مستمر للتخاطب (التواصل) مع الآباء. وستجعلهم مدركين لاتجاه المنهج وأين يمكنهم تقديم المساعدة لأولادهم. وسوف يصبح كذلك اتجاه المنهج مركزاً بوضوح أكثر للطلاب كنتيجة لاستخدام أوراق الواجبات البيتية هذه.

ومن إحدى فوائد استخدام أوراق الواجب البيتي الصغيرة (وربما الكبيرة) هي تجنب إمكانية كتابة الطلاب للواجب الخطأ عرضياً. ومثل هذا قد يحدث إذا كان عليهم نسخه من السبورة أو عبر إملاءه من المعلم.

ويمكن كذلك استخدام أوراق الواجبات البيتية من قبل المعلم على أساس يومي. وفي هذه الحالة يمكن أن تقسم الأوراق إلى تمارين فردية أو تكتب (تملى) يومياً. ومن صعوبات استخدام أية ورقة واجب يومي هي أن أية تعديلات في الواجب يجب أن يشارك الصف في إجراء التغيير. وقد يكون لهذا الإجراء مردود سلبي بين الطلاب رغم أن عمل ذلك بصورة صحيحة قد يقلل أو ربما ينهي التأثير السلبي هذا.

ومن الطرق الشائعة في إعطاء الواجبات البيتية لمادة الرياضيات هي عبر السبورة. إن المعلمين محظوظون جداً إذا جعلوا صفهم يكتب الواجب لجميع صفوفهم الباقية على السبورة، أي انه عندما يدخل كل صف القاعة فان الطلاب سيستنسخون (ينقلون) الواجب ببساطة في دفتر ملاحظاتهم. وفي هذه الحالة يفضل استخدام السبورة الجانبية (إذا توفرت) وليس الأمامية التي يمكن أن تدخر لاستخدامها في الدرس الاعتيادي.

ويمكن للمعلم الذي يخصص واجباً بيتياً في نهاية الدرس أن يستخدم السبورة لهذا الغرض. وفي هذه الحالة يفضل السبورة الأمامية أكثر بما أنها لن تكون ضرورية بعد ذلك للاستخدام الصفي. ويمكن أن يرى الواجب البيتي في السبورة الأمامية أفضل

صحيفة الوظيفة المنزلية الأسبوعية

Weekly Homework Assignment Sheet

____

الصف (Class)

التاريخ (Date)	الموضوع (Topic)	الوظيفة رقم (Assignment No.)
		الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises
		" " " " " "
		" " " " " "
		المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها
		Concepts and Relationships to Remember

التاريخ (Date)	الموضوع (Topic)	الوظيفة رقم (Assignment No.)
		الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises
		" " " " " "
		" " " " " "
		المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها
		Concepts and Relationships to Remember

التاريخ (Date)	الموضوع (Topic)	الوظيفة رقم (Assignment No.)
		الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises
		" " " " " "
		" " " " " "
		المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها
		Concepts and Relationships to Remember

التاريخ (Date)	الموضوع (Topic)	الوظيفة رقم (Assignment No.)
		الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises
		" " " " " "
		" " " " " "
		المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها
		Concepts and Relationships to Remember

التاريخ (Date)	الموضوع (Topic)	الوظيفة رقم (Assignment No.)
		الكتاب / الصفحة ، التمرين Book / Page / Exercises
		" " " " " "
		" " " " " "
		المفاهيم والعلاقات المطلوب تذكرها
		Concepts and Relationships to Remember

ولذلك تقل احتمالية تجاوزه من الطلاب. وكذلك قد تعطى الواجبات شفوياً ولكن هذه الطريقة ليست هي الأكثر فاعلية في الغالب فقد لا يسمع الطالب قسماً من الواجب أو ربما يسمع جزءاً غير صحيح من الواجب. وقد تكون النتيجة تأثيرات سلبية على عملية التعليم. ويمكن أن يتطلب إعطاء الواجب البيتي الشفوي اعادات عدة مما يسبب التشوش. وعندما تساء إدارة إعطاء الواجب الشفوي فانه يترك الطلاب على انطباع إن الواجب أما اختياري أو غير مهم جداً.

وبغض النظر عن الطريقة التي تم بها إعطاء الواجب، على المعلم أن يبذل قصارى جهده للتأكد من عدم وجود أي غموض. فمثلاً. إذا كانت هناك تمارين مرقمة بشكل مشابه في أعلى واسفل صفحة ما من الكتاب المنهجي فان الموقع والأعلى والأسفل يجب أن تحدد في الواجب. ويجب أن يحدد كل واجب بصورة صحيحة بنوعه وتاريخه وموضوعه أو أية معلومات ذات صلة. وفوق كل اعتبار، فان الأسلوب الذي يقدم به الواجب البيتي يجب أن يكون ثابتاً مع الأسلوب التعليمي للمعلم وملائم لنوع الدرس ويعتقد بعض المعلمين أن صف الرياضيات الأضعف يميل أكثر لاختيار الواجب البيتي المقدم على أوراق لأنهم قد ينسخون واجبهم بصورة غير صحيحة أو ربما ببساطة ينسون نسخه. وهكذا. فان نوع الصف قد يكون مهماً جداً لأخذه بالاعتبار في اختيار أفضل صيغة لتقديم الواجب البيتي من خلالها.

كيف يجب أن يخصص الواجب طويل المدى؟
How Should Long-Term Assignment Be Given ?

بين الفينة والأخرى قد يكون الواجب طويل المدى مناسباً لصف الرياضيات. وربما يستطيع المعلم أن يقرر إعطاء واجب بكتابة تقرير عن رياضي مشهور، أو يكلف الطلاب بمشروع تركيب (بناء هندسي أو تجربة إحصائية). ومن المهم جداً الطريقة التي يقدم بها الواجب لأي من هذه الواجبات طويلة المدى.

إن إمكانية إعطاء الواجب طويل المدى يجب أن تعلن إلى الصف في بداية الدوام. وعندما يكون المعلم جاهزاً لإعطاء هذا المشروع رسمياً للصف، عليه أن يتأكد من ضمان الأمور الآتية:

- مدى العمل المطلوب (يجب إدراج مواضيع معينة).
- الخطوط الأساسية المحددة لاختيار الموضوع (إذا ما تطلب اختياراً).
- مدى وحدود المشروع.
- صيغة تقديم العمل.
- المصادر المتوفرة (مثلاً المدرسة، أو القسم، أو المكتبة العامة، أو الحاسوب).
- جدول المواعيد للواجب.

بعد فترة معقولة من الزمن، يجب على المعلم أن يراقب تقدم سير الطلاب. كذلك يجب مساعدة الطلاب الذين يتعثرون كما يجب تشجيعهم، وتقويم الاتجاه الخاطئ للقائمين بالعمل. وفي هذا الوقت يستطيع المعلم أن يناقش مع الصف بعض الصعوبات التي ربما واجهها بعض الطلبة في عمل الواجب، وربما مساعدة الآخرين في مواجهة نفس المشاكل.

وفي منتصف الطريق، أثناء المشروع، يجب أن تراجع صيغة الواجب مع الصف. ويجب يذكر الطلاب بالمصادر المتوفرة (مثلاً، مكتبة قسم الرياضيات أو مكتبة المدرسة).

ولأجل أن يكون الواجب طويل المدى مفيداً إلى أقصى حد يجب أن يجدول الطلاب على اللقاءات الفردية مع المعلم للحصول على الساعدة المستمرة. ولا يوفر ذلك مدخلاً ضرورياً للتوصية حسب وإنما كذلك تحفيزاً مطلوباً أكثر في الغالب لمزيد من العمل.

وعلى خلاف الواجب البيتي المعتاد، يتطلب الواجب طويل المدى مراقبة وإرشاداً ومساعدة وتقويماً مستمراً. ومن المحتمل أن يكون مثل هذا الواجب غير فاعل إلا إذا كانت هناك عناية خاصة لتحضير ومساعدة الطلاب في هذه المساعي.

صياغة الواجب البيتي
Format of the homework assignment

من المحير جداً بالنسبة للمعلم المبتدئ أن يبحث الطلاب عن توجيه المعلم في ناحية من نواحي العمل المدرسي تقريباً. وهذا يشمل بالتأكيد التوجيه فيما يخص صيغة إعطاء الواجب البيتي. ويبرز هنا سؤالان أساسيان في هذا المنحى: كيف يجب أن يرتب؟ وأين يجب أن يكتب؟ ورغم إن الإجابة عن هذين السؤالين مترابطتان جداً فسنناقشها كل على حدة.

أسئلة حول تنظيم الواجب البيتي
Questions About Arrangement Of Homework

إن صيغة الواجب البيتي — إذا كانت موحدة بين الطلاب — ستكون مفيدة للمعلم عند قراءة الواجبات الفردية. وهناك مالا نهاية من الخيارات لانتخاب صيغة يتبعها الطلاب عند كتابة واجبهم البيتي. وسنشير لبعض الأفكار الأخرى المفيدة للقارئ على أمل أن هذا النقاش سيولد نقاشاً آخر. وعندما تحدد صيغة لكي يتبعها طلابك يجب أن تأخذ بالاعتبار (عملك) على هذه

الواجبات البيتية وكذلك استخدام الطلاب النهائي لها.

وجهي الورقة؟ ربما يمكنك البدء بسؤال نفسك حول ما إذا كان من المرضي جعل طلابك يستخدمون وجهاً واحداً للورقة عند كتابة الواجب أم استخدام كلا الوجهين. وباستثناء بعض المواقف (مثلا برهان غير اعتيادي، مسألة، أو تقرير للتسليم) فان جعل الطلاب يكتبون على وجه واحد من الورقة هو ربما أمر مكلف وتبذيري. مع ذلك قد يفضل بعض المعلمين فعل ذلك ويعطون تبريراتهم المقنعة.

تحديد المعلومات؟ على المعلم أن يحدد المعلومات التي يجب أن تكتب على ورقة الواجب البيتي. فبالإضافة إلى اسم الطالب، هل يجب تضمين صنف الموضوع ورقم الواجب البيتي وتاريخه ... الخ؟ هل يجب ترقيم كل واجب بطريقة معينة؟ ومهما تكن المعلومات المطلوبة التي يختارها المعلم يجب أن تكون موحدة لكل الصف.

كتابة الأسئلة؟ القضية الأخرى التي يجب على المعلم تحديدها هي هل أن على الطلاب كتابة أسئلة الواجب البيتي قبل إجابتها؟

يعد العديد من المعلمين ذلك استخداماً ضعيفاً لوقت الطالب: في حين يعتقد آخرون أن وجود الأسئلة أمام الطالب تجعل من ورقة الواجب البيتي مصدراً جيداً للدراسة فيه.

الهوامش؟ إن المعلم الذي يستلم ورقة واجب بيتي من طالب لم يترك هوامش على الصفحات سيقدر كثيراً جعل الطلاب ينركون هوامش كافية لتعليقات المعلم. وربما سيفضل الطلاب كذلك استخدام هذا المجال لعمل التصحيحات الضرورية بعد الاستماع إلى مراجعة الصف للواجب البيتي.

تأطير الأجوبة؟ يطلب بعض المعلمين من طلابهم تأطير أجوبتهم (بمربع) لسؤال ما لغرض فصله عن بقية العمل. وهذا يجعل عمل المعلم ايسر عندما يقرأ أوراقاً كثيرة. والفائدة الإضافية الأخرى المشتقة من هذه العملية هي أنها تتطلب من الطلاب تحديد الجواب لسؤال ما. وهي مهارة غالباً ما تكون مضمونة ولكنها أحيانا ليست بالتافهة جداً. وبعد حل أية مسألة يفقد بعض الطلاب التركيز على ما تم سؤاله بالضبط، وبعد حل المسألة بصورة صحيحة قد لا يسلمون الجواب الصحيح.

صيغة (شكل) الورقة؟ لأجل بعض المسائل القصيرة في الجبر أو الرياضيات قد يرغب المعلم أن يطوي طلابه الورقة بعدد معين من المربعات. وهذا قد لا يؤدي إلى ورقة مرتبة أنيقة فحسب وإنما يتيح كذلك للطالب لان يعمل أكثر على الورقة (في ترتيبها). ويمكن الحصول على تأثير مماثل من خلال تسطير الورقة بخطوط بدلاً من طيها.

ويصر المعلمون غالباً على صيغة للعمل على أنواع معينة من المسائل. فمثلاً ولحل المعادلات من المفضل جعل الطلاب يخططون الرموز (الاعلامات) المتساوية عموديا. وقد يبسط الطلاب الجذور بالعمل أفقيا. ويمكن إعطاء تعليمات وتوجيهات خاصة عندما يتضمن الواجب البيتي رسم دوال أو إثبات نظريات هندسية. وبما ان كلا النوعين الأخيرين من التمارين تحتاج بصورة متساوية لاستخدام صفحة كاملة لكل مسألة. ستتضمن صيغة أكثر كفاءة طي قطعة ورقية من قياس 8.5×11 إلى نصفين لتكون (كراسا) 8.5×5.5 من أربع صفحات تكفي الواحدة منها مسألة فقط (انظر الشكل في أعلى الصفحة). وتتيح هذه الصيغة للطالب أن يصنع أربع مسائل أطول بدلاً من اثنين (مثل برهان هندسي أو رسم دالة) على ورقة. إن معالجة المعلم للأوراق يجب أن تكون كذلك اسهل. وبغض النظر عن الصيغة التي سيختارها المعلم للاستخدام، تخدم التوحيد بين الطلاب في وظيفتين مفيدتين: تعطي الطلاب التوجيه المرغوب وتجعل من مهمة المعلم في القراءة ايسر بكثير.

أين يجب أن يكتب الواجب؟

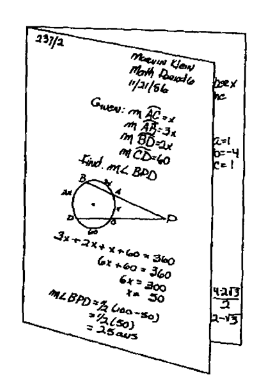
Where Should The Homework Be Written?

يجب أن يعد تنظيم وترتيب موحد للصف اعتماداً على نوع الصف المشترك وموضوع الدرس. فمثلا قد يطلب المعلم في موضوع الهندسة للمدرسة الثانوية (الإعدادية) أوراقاً منفصلة الترتيب أو دفتر حلزوني (سبايرول) 11×8.5 بماسكة أو ظرف كبير مربوط إلى الغلاف الداخلي الخلفي. وهذا سيمكن الطلاب من الحفاظ على ملاحظاتهم وواجبهم البيتي سوية في كراسات مطوية.

وبدلاً من ذلك يمكن للمعلمين الطلب من طلابهم الحفاظ على السطر غير واضح بالاستنساخ.

لكي، وبعد أن يجمع بواسطة المعلمين، أن يعاد في دفتر الملاحظات أو يوضع في محفظة الطالب.

هنالك العديد من الطرق النافعة لجعل الطلاب يحافظون على واجبهم البيتي. ويجب أن يحدد الأسلوب تماماً من قبل المعلم وقد يختلف مع اختلاف كل صف اخذين بالاعتبار أشياء مثل الموضوع، ودرجة إطاعة الصف، وعادات الطلاب الكتابية.



مراجعة إعطاء الواجب البيتي
Reviewing The Homework Assignment

على المعلم أن يجيب على عدة أسئلة حول مراجعة الواجب البيتي فعلى المعلم أن يقرر متى وكيف يراجع الواجب البيتي، سواء مراجعته مع الصف أو ما سيناقش منه. أي هل يجب مراجعة كل تمرين أمام كل الصف أم يقتصر على جزء عيني منه فقط؟ سنناقش هذه الأسئلة في هذا الفصل.

أسئلة حول مراجعة الواجب البيتي
Questions About Reviewing Homework Assignment

متى تجب مراجعة الواجب البيتي؟ ربما ليس هناك (أفضل وقت) أثناء الدرس لمناقشة واجب الليلة السابقة. ويتمسك بعض المعلمين بوجوب أن يبدأ كل درس بمراجعة للواجب البيتي للدرس السابق. ويقولون بان أي عمل جديد يجب ان لا يقدم حتى يتم إتقان الدرس السابق (على شكل واجب بيتي).

يراجع المعلمون الآخرون الواجب البيتي للدرس السابق في نهاية الدرس كي يتيح للدرس الجديد أن يبدأ بسهولة وبداية محفزة ويفضل هؤلاء المعلمين أن يبدءوا الدرس بنشاط محفز يؤدي إلى تطوره. وبعد أن يناقش الموضوع الجديد برمته عندها فقط يفضلون مراجعة الواجب البيتي للدرس السابق.

يستطيع المعلم بكل تأكيد تبني كلا النظامين وربما يدخل آخر يتطلب مراجعة للواجب البيتي السابق في نقطة ما من وقت الدرس والتي تكون مناسبة طبيعياً. وفي حالة الواجب البيتي نوع (الاستكشاف Discovery type) فقد يكون مناسباً مناقشة الواجب البيتي تماماً قبل تقديم مفهوم أو علاقة قد تظهر في منتصف الدرس. وهنا سيكون الواجب البيتي نافعاً لاشتقاق أو استنتاج العلاقة الرياضية المرغوبة من الطلاب. وحين استخدامه بهذه الطريقة يمكن مراجعة أجزاء مختلفة من الواجب البيتي بصورة جيدة في أوقات مختلفة في وقت حصة الدرس. ورغم ان هذا التنويع لطيف فان الهدف النهائي يجب أن يبنى على حاجات الدرس الخاصة به وملاءمته.

كيف يجب مراجعة واجب الصف كله؟ تتطلب مختلف أنواع تمارين الواجب البيتي مختلف الطرق للمراجعة مع الصف. ويمكن مراجعة بعض تمارين الواجب البيتي شفوياً —مثل التمارين التي تتطلب في جوابها كلمة واحدة أو عبارة قصيرة.

إن استخدام السبورة هو إحدى أكثر الطرق شيوعاً لمراجعة الواجب البيتي لدرس الرياضيات، حيث يمكن استخدامها بعدد من الطرق المختلفة. فيمكن للمعلم أن يكتب الحلول الصحيحة على السبورة أو يكلف الطلاب بكتابة مسائل معينة من الواجب عليها. ومن إحدى الطرق الشائعة لمراجعة الواجب البيتي على السبورة تكليف الطلاب بكتابة حل مسألة معينة على السبورة الجانبية عند دخولهم للصف. ومن الأفضل حل تمارين السبورة حال دخول الطلاب بدلاً من حلها بعد إعطاء الواجب البيتي كي لا يركز الطلاب —عند حلهم الواجب البيتي— على المسألة المعطاة على السبورة فقط وعلى حساب بقية التمارين. وفي الوقت المناسب من الدرس يجب أن يوضح هؤلاء الطلاب عملهم للبقية وكذلك يجيبون عن أية أسئلة قد تكون لدى زملائهم. وبين فترة وأخرى قد يكفي ببساطة أن يجعل المعلم الصف يقرأ العمل على السبورة وان يسأل أسئلة الكاتب إذا كان هناك شيء غير واضح. وهذا يجب أن لا يتم على أساس منتظم إلا إذا شعر المعلم بتأكده من أن لعدم وجود أحد من الطلاب يدع حل مسألة يمر بلا سؤال وهو غير واضح له. وخلال فترات معينة ستساعد بعض من أسئلة المعلم المتعلقة بتمارين الواجب البيتي على تحديد مدى فهم الطلاب للعمل. وفي ظروف معينة فقط مثل بقاء وقت قليل للدرس يجب على المعلم توضيح العمل الذي كتبه الطلاب على السبورة. وقد يمتعض في البداية على توضيح عملهم المكتوب على السبورة لبقية الصف، ولكنهم سيتمتعون بذلك لاحقاً بل وحتى يفخرون به. ويرتقي هذا النوع من الإجراءات كثيراً بالمحيط التعليمي الناشط للصف.

طريقة أخرى لمراجعة الواجب البيتي وتكون بجعل بعض الطلاب المنتخبين سلفاً يحضرون حلولاً نموذجية. وقبل بعض الوقت من بداية درس الرياضيات يعمل هؤلاء الطلاب نسخاً كافية

لبقية الصف. بعدها توزع هذه الأوراق في وقت مناسب من الدرس. والفائدة الرئيسة لهذه العملية هي عدم إبقاء أي طالب خارج فترة الحل في بداية الدرس لكتابة الحلول للواجب البيتي السابق على السبورة. وستتم كل التصحيحات الضرورية على هذه الأوراق عند مراجعة الواجب مع الصف. وهذا الإجراء مكلف وغير عملي لأنه يتطلب وقتاً إضافياً كبيراً لعمل النسخ. ولكن وعلى أية حال فهي تتيح الفرصة للطلاب لمغادرة الصف مع نسخة صحيحة من الواجب البيتي والقليل من الكتابة عندما تتم مراجعة المسائل في الصف.

ومن الطرق التي يمكن بها تجنب مساوئ هذه الطريقة التي ذكرناها آنفاً والتي تقلل من فوائدها العديدة التي تقدمها تكمن بجعل الطلاب الذين تم اختيارهم تحديداً يكتبون الواجب على شفافيات عارض الإسقاط الضوئي. عندها وحينما يكون المعلم مستعداً لجعل الصف يراجع الواجب البيتي لليوم السابق سيعرض ببساطة هؤلاء الطلاب الواجب على الجهاز العارض. وبهذه الطريقة يجب أن يكون لكل طالب في الصف خزين من الشفافيات الحامضية التي يمكن إعادة استعمالها كي يستطيع هؤلاء الطلاب عندما تعطى لهم مسائل معينة من الواجب لغرض مراجعتها في اليوم اللاحق مجرد نسخ الحلول للمسائل المختارة من الشفافيات بعد أن يكونوا قد اكملوا واجبهم البيتي برمته. وتتضمن هذه الطريقة عدة خصائص مفضلة من الطرق الأخرى التي وصفت سابقاً وبأسلوب كفء نوعاً ما. وتكمن الصعوبة الوحيدة لهذه الطريقة بالحاجة المستمرة للجهاز العارض والوقت القصير نسبياً المتاح للطلاب لرؤية الواجب المضاد على الشاشة.

وهناك بالتأكيد طرق أخرى لمراجعة الواجب البيتي لم تذكر هنا. وقد اخترنا مجرد مجموعة مجربة لإعطاء القارئ فكرة مقتضبة. وللمعلم ذو المخيلة الواسعة أن يطور ما يشاء من الطرق.

الواجب البيتي للمجموعة الصغيرة
Small Group Homework Assignment

على المعلم أن يحدد جزءاً من كل واجب بيتي لإعطاءه سواء لمجموعة صغيرة أو لكل الصف. ومن الأفضل أن تنجز واجبات المراجعة والأمثلة في مجاميع صغيرة، أما الواجبات التحضيرية للدروس التقديمية فمن الأفضل أن تنجز في مجاميع كبيرة.

إن مراجعة الواجب البيتي في مجاميع صغيرة هي وسيلة فاعلة لتحقيق هدف تحديد المسؤولية لأداء الواجب البيتي. ويصبح ضمان إتقان الواجب البيتي من كل فرد من المجموعة مسؤولية تلك المجموعة بأكملها. ويعلم الطلاب جيداً انه سيصادف أن أحدا منهم، والذي قد لا يكون متأكداً من مسألة ما، وإذا ما اختير لتمثيل المجموعة أمام كل الصف فسيكون أداؤه الضعيف انعكاساً سيئاً عنهم جميعاً. ومن محاسن هذه الطريقة هو الضغط من الزملاء لإتقان الموضوع بشكل جيد. فضلا عن ذلك فان توضيحات الزملاء في المجموعة الصغيرة يمكن أن تقدم رؤيا قد يكون المعلم تجاوزها في تقديمه الأصلي. ويمكن للمعلم توضيح ما هو غير واضح بعد التقرير الذي تقدمه المجموعة.

وتكون هذه الطريقة غير مستهلكة للوقت، متيحة الفرصة لتركيز مراجعة الواجب البيتي بان يكون مسلطاً على مسألة أو مسائل لطلاب معينين. وهكذا فان بقية الصف لن يحملوا أو يملوا بتكرار المادة التي أتقنوها في الأساس.

وسيتم القضاء على مشكلة نسخ الواجب البيتي بسبب الخوف من أن (يمسك) الطالب بدونه لان الواجب البيتي اصبح الآن مسؤولية المجموعة والأمر الآخر الذي سوف يقل هنا بصورة مهمة هو مسألة جمع وتصحيح عدد كبير من أوراق الواجبات البيتية الفردية. ورغم إن الأوراق لا تزال تجمع هنا، إلا أنها أصبحت مسؤولية (المجموعة) فيما يخص الدقة والاكتمال. وسيجد الطلاب الذي غابوا عن الدرس التوضيحات الموجهة من الزملاء في المجموعة الصغيرة قيمة. إن مراجعة المادة التي فاتت على الطلاب الغائبين أمام الصف كله غير عادل لان هذه الإعادة هي تكرار واستهلاك غير جيد للوقت. ولذلك فان واجبات المجموعة الصغيرة تعد مثالية.

كم يجب أن يراجع من الواجب البيتي؟
How Much Of The Homework Should Be Reviewed ?

ربما يكون قرار المعلم هو الطريقة الوحيدة لتحديد ما يجب أن يراجع من الواجب البيتي. ويجب على المعلم أن يراعي موضوع المادة ذات الصلة، ومستوى الصف وقدرته على تعلم موضوع معين، ونوع الطلاب، ثم مدى ما يحققونه. فإذا كان الصف ذا مستوى عال في الرياضيات عندها تكون مراجعة نموذج واحد من الواجبات البيتية كاف تماماً. وإذا ضمن المعلم انه لا توجد صعوبة لأي طالب في الواجب البيتي عندها تكون المراجعة غير ضرورية، وتكفي حينها مجرد وقفة فحص من المعلم من خلال بعض الأسئلة الموجهة للتأكد من إن الصف بأكمله، في حقيقة الأمر، ليس لديه أية صعوبة في الواجب البيتي.

ومن ناحية أخرى، قد يحتاج الصف الذي يكون مستواه هابطاً في الرياضيات إلى مراجعة كلية للواجب البيتي وربما بمجاميع صغيرة. وقد يكون هناك العديد من الطلاب الذين فاتهم بعض من أسئلة الواجب البيتي ويستفادون بشدة من المراجعة الشاملة للواجب.

كم مرة أن يراجع الواجب البيتي؟
How Frequently Should The Homework Assignment Be Reviewed?

في معظم الحالات، تتم قراءة الواجب البيتي مع الصف أثناء الدرس الذي يلي الواجب. وهناك بالتأكيد استثناءات لهذا الأمر. فمثلاً لو كان الواجب البيتي ليس ذا صلة بالموضوع التالي وإنما بموضوع سيأتي بعد أيام في المستقبل فمن المستحسن تأجيل مناقشة الواجب البيتي حتى يحين موعد ذلك الدرس. إن مستوى القابلية (أو مستوى الإنجاز) للصف يمكن أن يكون عاملاً محدداً لمدى تكرار مراجعة الواجب البيتي. وقد لا يحتاج الصف الجيد مراجعة يومية بل يمكن القيام بها فقط عند الطلب. ويجب أن يحذر المعلم من مراجعة الواجب يومياً. فقد يعطي الطلاب المعلم شعوراً كاذباً بالأمان بقولهم انهم لا يحتاجون مناقشة الواجب البيتي في حين تكون مثل هذه المراجعة في حقيقة الأمر مساعدة لهم.

وبصورة عامة يفضل مراجعة الواجب البيتي مباشرة بعد القيام به من قبل الطلاب لان هذا يضمن انه لا يزال طازجاً في أذهانهم ويبقى جزءاً من العملية التعليمية بأكملها.

فحص الواجب البيتي
Checking Homework Assignment

عندما يعطى الواجب البيتي ومن ثم ينجز على وفق صيغة محددة، يجب على المعلم أن يوجه بمراجعة هذا الواجب. وفي ذات الوقت يجب على المعلم أن يتمسك بمسألة جمع وفحص كل الواجبات الفردية. وهنا يبرز السؤال الآتي: هل يجب أن يجمع الواجب؟ وممن؟ وكم مرة؟ وهل يجب أن يصحح؟ وبغض النظر عن قراءة واجب الطالب البيتي، كيف للمعلم أن يحدد مستوى إتقان الطلاب للواجب البيتي؟ وهنا سوف نأخذ بالاعتبار هذه الأسئلة وأسئلة أخرى حول فحص الواجب البيتي.

أسئلة عن فحص الواجب البيتي
Questions On Checking Homework Assignment

هل يجب أن يجمع الواجب البيتي؟ على الرغم من أن بعض المعلمين يجمعون الواجب يومياً فانه عمل روتيني شاق للمعلم بان يتحمل العبء التعليمي الكامل في قراءة عدد كبير من الأوراق. ولنفرض أن للمعلم خمسة صفوف يضم كل واحد منها ثلاثين طالباً. فإذا كان على المعلم أن يجمع أوراق الطلاب يومياً فعليه أن يقرأ 750 ورقة أسبوعيا ! وإذا ما استغرق في قراءة كل ورقة دقيقة واحدة فقط (وهو وقت قصير جداً لإعطاء تعليقات مفيدة) فانه يقضي 12.5 ساعة أسبوعياً لقراءة الواجبات البيتية. وهذا عمل مبالغ فيه وخصوصاً عندما يقترن بأعباء التخطيط للدروس، وتهيئة الاختبارات، وكذلك العناية بشؤون المدرسة الأخرى. وما لم يكن المعلم راغباً بتكريس هذه الكميات الهائلة من الوقت لقراءة أوراق واجبات الطلاب، فمن الأفضل جمع القليل من الأوراق ولكن لتقرأ بعناية اكبر.

وإذا كان الواجب مهماً جداً كي يخصص للحل فذلك يعني أن تصحيحه أمر ضروري. ولهذا السبب يكون تصحيح الواجب مهماً بما انه تم تخصيصه كواجب. وبما أن هناك عمل روتيني هائل في القراءة وإعطاء التعليقات على كل واجب للطالب كل يوم، فانه ينصح بجمع نسبة صغيرة فقط من واجبات الصف يومياً. وتدخل هذه في محفظات الطلاب كمصادر للمستقبل. وبقراءة نموذج مختلف من أوراق واجبات الطلاب كل يوم يمكن للمعلم أن يشعر عقلانياً بتطور كل الطلاب في الصف.

ولا حاجة لجمع أوراق الواجب البيتي لمواضيع معينة لبعض الصفوف. ويمكن للمعلم أن يتمشى في الصف خلال فترة الدرس حينما يكون الطلاب يعلمون في حل مسائل صفية ويفحص بسرعة بعض أوراق الواجب البيتي للطلاب. قد يكون هذا النوع من قراءة الواجب البيتي ممكناً عندما يكون الواجب مشتملاً على رسم بعض الدوال والتي يمكن فحصها بسرعة بالتفتيش.

يجب أن يوجه النقد البناء وكذلك الملاحظات التكميلية على أوراق الطلاب التي تم فحصها. وتذكر بان ذلك جزء من العملية التعليمية. وقد تبدو النقاشات التالية حول طرائق عقابية نوعاً ما ورغم ذلك يجب أن لا تغيب عن انتباه المعلم.

كيف يجب أن يجمع الواجب البيتي؟
How Should The Homework Assignment Be Collected ?

يجب أن لا يتمكن الطلاب من توقع وقت جمع أوراقهم من قبل المعلم. وبخلافه فانهم قد يتجنبون أداء واجبهم في الأيام التي يشعرون فيها بتأكيد من أن أوراقهم لن تجمع. على المعلم أن يضع توقيتاً عشوائياً للاختيار واضعاً ملاحظة في سجله عن وقت قراءة واجب كل طالب. ويمكن للمعلم أن يجمع واجب أحد الصفوف من القاعة في أحد الأيام ثم يجمعه بشكل قطري (مائل) في يوم آخر ومن ثم لعمود من الطلاب في يوم آخر. إن مثل هذا النظام يتيح للمعلم جمع واجب أحد الطلاب والذي هو بحاجة إلى مساعدة إضافية ليومين أو ثلاثة على التوالي من دون التسبب بإحراجه أمام بقية الصف. وهذا سوف يكون الطالب الذي يمكن وضعه في التقاطع الطولي والعرضي والقطري من

الصف. وفي هذه الحالة قد يعزي الطالب هذا الجمع المتكرر لواجبه إلى (سوء حظه) فقط في حين إن الأمر كان مخطط له بقصد. وهنا تكون للمعلم فرصة لمساعدة الطالب بشيء إضافي من خلال الواجب البيتي.

ماذا يجب أن يصنع بالواجب البيتي الذي تم جمعه؟

هناك مدى واسع للخيارات حول ما يجب عمله بالواجب البيتي الذي تم جمعه. أحدها أن لا يفعل المعلم شيئاً لهذه الأوراق. والآخر أن يصحح المعلم الأوراق بدقة متناهية مسجلاً تعليقاته ومانحاً درجة. وهنا لا تنصح بهذين التطرفين في المعاملة مع الواجب. فعدم فعل شيء للواجب البيتي المجموع من الصف يعد قلة أمانة تجاه الطلاب. فحين يتم جمع الواجب البيتي يتوقع الطلاب أن يلقي المعلم ولو مجرد نظرة عليه وهذا هو الصواب.

أما التطرف الثاني فلا ينصح به كذلك من وجهة نظر اعتبارات العبء الثقيل الذي نوقش سابقاً. فضلاً عن ذلك يقدم التطرف هذا كذلك مسألة إعطاء الدرجات للواجب البيتي. وهذه عموماً ممارسة سيئة لان تتبع، لأنها تجلب ناحية عقابية محتملة للواجب البيتي. فإذا ما أعطى المعلم درجات على الواجب البيتي فمن المحتمل إن الطلاب سيسلكون مختلف الطرائق للوصول للحل الصحيح. فقد يلجئون إلى زملائهم، أو آباءهم، أو أصدقائهم، أو حتى معلمين آخرين لينجزوا عنهم الواجب البيتي هذا. ورغم ان هذا قد يكون له فائدة تعليمية أحيانا (مثلا عندما يرى الطالب الحل الصحيح الذي أعطاه إياه الغير فانه يتعلم المادة فعلا نتيجة لذلك)، فان الاهتمام عادة ينصب على وضع الجواب الصحيح على الورقة مجرد لان يراه المعلم وليس لغرض تعلم الحل الصحيح للمسألة.

إن أوراق الواجب البيتي التي تم جمعها يجب أن تقرأ بدقة وبالكامل. وحيثما يكون مناسبا يجب أن تسجل التعليقات المفصلة وتقدم الملاحظات التعاطفية للتشجيع. وبعد أن يقرأ المعلم بعضاً من نماذج الواجب البيتي يصبح مجهزاً أفضل بكثير لتعليم الصف لأنه سيصبح الآن أكثر معرفة بنقاط ضعف وقوة الطلاب أن مثل هذه المعلومات يمكن أن تحسن من العملية التعليمية بشكل جيد.

وربما تكون هناك مواقف يرغب فيها المعلم بفحص واجب الصف البيتي بالتفصيل. وربما يرغب بتحديد فيما إذا كانت النقاط الصعبة تحديداً قد تم إتقانها بصورة صحيحة أو إن الطلاب يعدون أنفسهم بشكل ملائم لامتحان قادم (مثل امتحان تحديد الموقع المتقدم Advanced Placement Exam الذي يعطى من قبل خدمة الامتحانات التعليمية Educational Testing Service) وبصورة عامة لا يستطيع أي معلم على أية حال أن يفحص كل الواجب البيتي يومياً وبتفصيل دقيق لان ذلك منفقة كبيرة للوقت.

تذكر أن القيمة الرئيسة للواجب البيتي هو عمل الطلاب عليه فيمكن أن يخدم فحص المعلم للواجب البيتي كحافز للطلاب للدرس القادم. ويجب أن يوضح هذا في الذهن عند تقديم التعليقات على ورق الطلاب.

كيف يجب أن يتعامل المعلم مع الطلاب الذين ينسخون الواجب البيتي من الآخرين؟

من المتعارف عليه تقليدياً إن الطالب الذي ينسخ (ينقل) واجباً بيتياً (إذا ما ثبت ذلك) من الآخرين يعاقب بطريقة معينة. فيمكن للطالب إذا ما يئس أن يحاول مرة أخرى في المستقبل مستغلاً الفرصة في نسخة من زميل بدلا من أن يعاقب على عدم كتابته. ومن الطرق الفاعلة في معالجة مثل هذه المشكلة هي (بتجفيف المنبع) (dry up the source). سوف تجعل معاقبة الطالب الذي أعطى الواجب لزميله الآخر كي ينسخه المعطي (المانح) ممعض جدا لتكرار هذه الحادثة. وبهذا الأسلوب فان مهاجمة المصدر قد تقضي على مشكلة الواجب البيتي المنسوخ.

طريقة أخرى فاعلة في معالجة هذه المشكلة هي بالتحدث لكل الطالبين المشتركين في الموضوع. واجههم (بالدليل) وتحدث معهم عن فضائل الصدق. وإذا ما تكرر النسخ منهما يجب إخطار والديهم بالأمر. أن تحذيراً للصف حول هذا الموضوع وإجراءاته في بداية السنة الدراسية كفيل بمنع هذه المشكلة تماماً.

هل يجب استخدام الامتحان السريع (Quiz) للتأكد من إتقان الواجب البيتي؟

طالما إن الامتحان السريع لا يعطى في الأساس لأسباب عقابية، فانه يمكن استخدامه كإجراء احتياطي لتحديد مستوى الإتقان (Mastery) الحقيقي للصف حول واجب بيتي معين. يجب أن يكون الامتحان موجزاً ويحوي على المادة التي تمت تغطيتها في الواجب البيتي (إذا كانت هذه هي منطقة الاهتمام). ويجب أن تكون أسئلة الامتحان السريع مصاغة بوضوح وإيجاز وبلا تعقيدات لتجنب الإرباك. إن الدافع الجانبي المقدم من توقعات الامتحان السريع قد يكون عاملا نافعا في مجمل العملية التعليمية.



Teaching Secondary Mathematics

Techniques and Enrichment Units

Beirut: Telfax: 009611 272225
009613 334648 / 312124
Amman: 0096279 5688899

University Book House
Al Ain -United Arab Emirates
P.O.Box 16983 - Fax: 7542102
Tel: (971) (3) 7554845 - 7556911



دار الكتاب الجامعي
العين - الإمارات العربية المتحدة
ص.ب: ١٦٩٨٣ - فاكس: ٧٥٤٢١٠٢
هاتف: ٧٥٥٤٨٤٥ - ٧٥٥٦٩١١ (٣) (٩٧١)

E-mail: bookhous@emirates.net.ae